

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ  
Fakulta strojní

Numerické řešení dvourozměrného a třírozměrného  
turbulentního impaktního proudění

Ing. Petr Louda

Obor:  
Termomechanika a mechanika tekutin

Teze disertační práce

Disertační práce vznikla na školícím pracovišti FS ČVUT Praha

Disertant: Ing. Petr Louda

Školitelé: Prof. RNDr. Karel KOZEL, DrSc.

Oponenti:

Teze se rozesílají dne:

Obhajoba disertační práce se koná dne:

v zasedací místnosti č. 17 přízemí Fakulty strojní ČVUT, Technická 4, Praha 6 - Dejvice, před komisí jmenovanou ve vědním oboru Termomechanika a mechanika tekutin

S disertační prací je možné se seznámit v oddělení pro vědu a výzkum Fakulty strojní Českého vysokého učení technického v Praze, Technická 4, Praha 6 - Dejvice.

## Abstract

The work deals with the numerical solution of 2D and 3D turbulent flows of incompressible newtonian fluid in technical applications with the emphasis on impinging jet flows.

The mean turbulent flow-field is found by solving Reynolds averaged Navier-Stokes equations with low- $Re$  turbulence models applicable in the whole flow-field. The goal of the work was to develop a numerical method of sufficient accuracy to distinguish effects of a particular turbulence model yet effective and general enough to be suitable for supposed future use, to study behavior of turbulence models, and to explain influence of the turbulence model on the quality of results.

The numerical model is based on the artificial compressibility method. The discretisation in space is done by means of finite volume method or finite difference method. The discretisation in time is done using explicit—MacCormack, multistage Runge-Kutta—, semiimplicit, and implicit method. The methods are compared in the case of laminar flow and the implicit 3rd order upwind method is shown to be the most effective.

Several one- and two-equation linear and two-equation non-linear eddy viscosity models in modifications for low Reynolds numbers of turbulence are considered. The models are scrutinized in flows paralel to the wall, without presence of a wall, and perpendicular to the wall. The results are compared with those of direct numerical simulation, measurement, and computations of other authors. The best results provides Menter's *SST* turbulence model. As the source of its success the shear-stress-transport is identified. It is shown how shear-stress-transport can improve performance of  $k$ - $\epsilon$  model as well.



# Obsah

Úvod	9
1 Matematický model turbulentního proudění	10
2 Hierarchie modelů turbulence	10
3 Použité modely turbulence	10
4 Numerické řešení	12
5 Výpočet laminárního impaktního proudu	13
6 Předběžné výpočty turbulentních proudění	14
7 Výpočet 2D turbulentního impaktního proudu	15
8 Výpočet 3D turbulentního impaktního proudu	15
9 Závěr	17



## Seznam značení

$f_i^I$	vektor plošné hustoty nevazkého toku
$f_i^V$	vektor plošné hustoty vazkého toku
$k$	kinetická energie fluktuací [ $\text{m}^2\text{s}^{-2}$ ]
$p$	kinematický tlak [ $\text{m}^2\text{s}^{-2}$ ]
$S_{ij}$	tenzor rychlosti deformace [ $\text{s}^{-1}$ ]
$t$	čas [s]
$u_i$	vektor rychlosti [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$V$	kontrolní objem [ $\text{m}^3$ ]
$\beta$	umělá rychlost zvuku [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$\delta_{ij}$	Kroneckerovo delta [1]
$\epsilon$	rychlost disipace [ $\text{m}^2\text{s}^{-3}$ ]
$\nu$	kinematická vazkost [ $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ]
$\nu_T$	turbulentní vazkost [ $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ]
$\Omega_{ij}$	tenzor rychlosti rotace [ $\text{s}^{-1}$ ]
$\tau_{ij}$	tenzor Reynoldsových napětí [ $\text{m}^2\text{s}^{-2}$ ]
$\tau_0$	časové měřítko turbulence [s]





# Úvod

Práce se zabývá numerickým řešením turbulentního proudění nestlačitelné newtonské tekutiny ovlivněného nepropustnými stěnami, se zaměřením na impaktní proud.

Impaktním prouděním rozumíme proudění, kdy je tekutina nárazem na stěnu nucena náhle změnit směr pohybu. Speciálnější případ, kdy je k takové změně nucen veškerý objem pohybující se tekutiny, označujeme jako *impaktní proud*. V technice je vytvářen záměrně s cílem vyvolat přenos pouze hybnosti, nebo i tepla či hmoty mezi tekutinou a stěnou. Dynamických účinků proudu se využívá např. při bezdotykovém vedení tenkých pásů materiálů, řízení vrstvy povlaku při povlakování roztaveným kovem, nanášení materiálů pomocí sprejů, separaci prachových částic. Široké je použití při přenosu tepla (chlazení, ohřívání) nebo hmoty (sušení), vzhledem ke zvýšení součinitelům přestupu v oblasti nárazu.

Silové působení impaktního proudu a součinitele přestupu je možné v nejjednodušších případech odhadnout pomocí empirických vztahů nebo kritériálních rovnic. Ve složitějších konfiguracích (soustavy proudů, šikmé proudy) je však pro předpověď k dispozici jen měření na modelech a metody počítačové mechaniky tekutin.

Ze tří všeobecně použitelných přístupů počítačové mechaniky tekutin – přímé numerické simulace, simulace velkých vírů a řešení zestředněných Navierových-Stokesových (RANS) rovnic – přichází pro technické aplikace v úvahu jen poslední z nich. Matematický model založený na RANS rovnicích je třeba doplnit modelem turbulence, který aproximuje korelace fluktuací rychlosti, Reynoldsova napětí. Pro důležitost transportních procesů v případné aplikaci uvažovaného modelu používáme modely turbulence pro nízká Reynoldsova čísla, tzn. platné v celém průřezu mezní vrstvy.

Cíle předkládané práce jsou

- implementovat moderní metody numerického řešení zestředněných Navierových-Stokesových rovnic založené na metodě umělé stlačitelnosti, převážně s dvourovnicovými modely turbulence,
- najít efektivní a dostatečně přesný způsob diskretizace v čase a prostoru s ohledem na případnou rozšiřitelnost na jiné typy proudění, robustnost, přesnost a nároky na strojový čas,
- studovat chování modelů turbulence pro nízká Reynoldsova čísla,
- najít modely turbulence vhodné pro impaktní proudění.

Pro ověření správnosti numerického řešení bylo zvoleno převážně srovnání s měřeními. Zde se ukázalo, že měření impaktních proudů jsou orientována buď na studium přenosu tepla a hmoty na impaktní stěně nebo na studium celého proudového pole, ale bez detailních měření smykového napětí na stěně. V práci jsme se proto omezili na výpočet rychlostního a tlakového pole a použili srovnání s druhým typem měření.

# 1 Matematický model turbulentního proudění

Ve druhé kapitole práce jsou uvedeny bilance hmoty a hybnosti a konstitutivní vztahy pro nestlačitelnou newtonskou tekutinu vedoucí k Navierovým-Stokesovým rovnicím. Ty jsou středovány podle Reynoldse, abychom obdrželi systém rovnic pro střední proudové pole (RANS), ve tvaru pro kartézský souřadný systém,

$$\int_V \frac{\partial W}{\partial t} dV + \int_{\partial V} (f_i^I - f_i^V) n_i dS = 0$$

$$W = \|0, u_1, u_2, u_3\|^T,$$

$$f_i^I = u_j \|1, u_1, u_2, u_3\|^T + p \|0, \delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i}\|^T,$$

$$f_i^V = \|0, 2\nu S_{1i} - \tau_{1j}, 2\nu S_{2i} - \tau_{2i}, 2\nu S_{3i} - \tau_{3i}\|^T,$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

kde  $V$  je kontrolní objem,  $n_i$  jednotkový normálový vektor hranice kontrolního objemu,  $u_i$  vektor střední rychlosti,  $p$  střední statický tlak dělený hustotou tekutiny,  $\nu$  kinematická vazkost,  $\delta_{ij}$  Kroneckerovo delta a

$$\tau_{ij} = \overline{u_i' u_j'} \quad (2)$$

korelace fluktuací rychlosti nazývané Reynoldsova napětí. Reynoldsova napětí jsou aproximována pomocí modelů turbulence, jimiž se zabýváme v dalších kapitolách práce. Zde jsou předběžně uvedeny některé rovnice pro Reynoldsova napětí, které dále umožní vysvětlit podstatu popř. nedostatky modelů turbulence. Je uveden pojem mezní vrstvy a z něj vyplývající možnosti řešení Reynoldsových rovnic.

## 2 Hierarchie modelů turbulence

Zde diskutujeme současné postupy při modelování turbulence v RANS rovnicích a jejich omezení. V pořadí klesající složitosti jsou uvedeny modely Reynoldsových napětí (RS modely), algebraické RS modely, explicitní algebraické RS modely a nelineární modely turbulentní vazkosti a lineární modely turbulentní vazkosti. Vzhledem k tomu, že požadujeme model turbulence použitelný v celém proudovém poli, tj. včetně oblastí nízkých Reynoldsových čísel v mezní vrstvě, přicházejí při současném stupni vývoje v úvahu nelineární modely turbulentní vazkosti a nižší.

## 3 Použité modely turbulence

Modely použité pro impaktní proudění jsou nelineární a lineární modely turbulentní vazkosti. Lineární modely používají konstitutivní rovnici získanou

zobecněním Boussinesqovy hypotézy

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3}k\delta_{ij} - 2\nu_T S_{ij}, \quad \nu_T = C_\mu f_\mu k \tau_0, \quad (3)$$

kde  $k$  je kinetická energie fluktuací,  $\nu_T$  turbulentní vazkost,  $\tau_0$  časové měřítko turbulence a  $C_\mu f_\mu$  empirická funkce. Obecná konstitutivní rovnice pro 2D střední proudění, použitá v nelineárních modelech turbulence, je kubická vzhledem k derivacím střední rychlosti

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{ij}}{k} &= \frac{2}{3}\delta_{ij} - 2C_\mu f_\mu \tau_0 S_{ij} - 2c_{\mu 3} \tau_0^3 (S^2 - \Omega^2) S_{ij} \\ &+ c_{\mu 1} \tau_0^2 (2S_{ik} S_{kj} + \Omega_{ik} S_{kj} - S_{ik} \Omega_{kj} - \frac{2}{3}\delta_{ij} S_{lk} S_{kl}) \\ &+ c_{\mu 2} \tau_0^2 (2S_{ik} S_{kj} - \Omega_{ik} S_{kj} + S_{ik} \Omega_{kj} - \frac{2}{3}\delta_{ij} S_{lk} S_{kl}), \end{aligned} \quad (4)$$

kde  $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ ,  $\Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$ ,  $\Omega_{ij} = (1/2)(\partial u_i/\partial x_j - \partial u_j/\partial x_i)$ . Platnost omezenou na tenké smykové vrstvy s vlivem stěny má další konstitutivní rovnice pro smykové Reynoldsovo napětí, Bradshawova hypotéza

$$\tau_{12} \approx 0,31k. \quad (5)$$

Nejjednodušší z uvažovaných modelů turbulence je Spalartův-Allmarasův model [11], řešící transportní rovnici se zdrojem pro turbulentní vazkost v (3). Dále uvažujeme dvourovnicové lineární modely dobře známé z literatury, i když zčásti nepoužité (např. *SST*) pro impaktní proudění

- Launderův-Sharmův  $k$ - $\epsilon$  model [7]
- Yangův-Shihův  $k$ - $\epsilon$  model [15]
- Menterův dvourovnicový *BSL* model [5]
- Menterův *SST* model (model transportu smykového napětí) [5],

z nichž *SST* model lokálně používá Bradshawovu hypotézu. Další dvourovnicové modely jsou modifikace navržené domácími autory

- dvouvrstvý  $k$ - $l$ / $k$ - $\epsilon$  model [9]
- modifikovaný Chienův  $k$ - $\epsilon$  model.

Na základě výsledků práce byl modifikován  $k$ - $\epsilon$  model zavedením transportu smykového napětí analogicky *SST* modelu

- *sst*  $k$ - $\epsilon$  model.

Nelineární konstitutivní rovnice vyžaduje rovněž odhadnout kinetickou energii fluktuací a časové měřítko turbulence. To je provedeno pomocí mírně upravených dvourovnicových modelů podle návrhu z literatury [8]. Dostáváme tím

- nelineární Yangův-Shihův  $k$ - $\epsilon$  model
- nelineární *SST* model.

## 4 Numerické řešení

Matematický model statisticky stacionárního turbulentního proudění lze zapsat spolu s vhodnými okrajovými podmínkami pomocí rovnice

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial W}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}} (f_i^I - f_i^V) n_i d\mathcal{S} = Q, \quad (6)$$

kde vektor  $W$  nyní obsahuje vektor střední rychlosti a proměnné modelu turbulence a význam nevazkého a vazkého toku je obdobný laminárnímu případu,  $Q$  obsahuje zdrojové členy modelu turbulence.

Systém (6) řešíme metodou umělé stlačitelnosti [1], kde rovnice kontinuity je modifikována derivací tlaku v iteračním čase

$$W = \left\| p/\beta^2, u_1, u_2, u_3, k, \epsilon \right\|^T, \quad (7)$$

kde  $\beta^2$  je volitelný parametr. Řešení (6) pak získáme metodou ustalování pro  $t \rightarrow \infty$ .

Diskretizace v prostoru je provedena metodou konečných objemů na strukturované síti čtyřúhelníků (2D) nebo šestistěnů (3D) [4] nebo metodou konečných diferencí na ortogonální síti. Pro aproximaci nevazkého toku je použito centrální schema 2. řádu přesnosti nebo AUSM (upwind) schema 3. řádu přesnosti. Diskretizace vazkého toku je vždy centrální 2. řádu přesnosti.

Pro diskretizaci v čase uvažujeme explicitní

- MacCormackovo schema
- vícestupňová Rungova-Kuttova schemata,

implicitní

- Crankovo-Nicolsonovo schema
- zpětné Eulerovo schema

a

- semiimplicitní schema.

Systém lineárních algebraických rovnic vzniklý při použití implicitních schemat je řešen bodovou nebo blokovou relaxační metodou s využitím Gaussovy eliminace pro blokově třídiagonální soustavy. Jako nezbytný se ukázal vhodný způsob numerické disipace. Disipace Jamesonova typu je při výpočtech turbulentního proudění nahrazena vhodnější stabilizací tlaku známou spíše z metody konečných prvků. Zvláštní pozornost je věnována řešení systému transportních rovnic s nelineárním zdrojovým členem. Je navržen způsob řešení dvouvrstvého  $k-l/k-\epsilon$  modelu a nelineárních modelů turbulence implicitními schematy vhodný pro stacionární úlohy.

## 5 Výpočet laminárního impaktního proudu

V této části řešíme rovinné laminární impaktní proudění při Reynoldsově čísle z rychlosti a šířky trysky  $Re = 50$ . Síť je ortogonální a téměř rovnoměrná.

Použijeme následující centrální schemata metody konečných diferencí 2. řádu přesnosti

- MacCormackovo schema
- 3- a 4-stupňové Rungovo-Kuttovo schema
- semiimplicitní schema s řešením lineárního systému
  - a) bodovou relaxační metodou
  - b) blokovou relaxační metodou
- Crankovo-Nicolsonovo schema s umělou disipací Jamesonova typu, řešení lineárního systému bodovou iterační metodou,

a tři varianty prostorové diskretizace metody konečných objemů pro

- zpětné Eulerovo schema s řešením lineárního systému blokovou relaxační metodou
  - a) centrální schema 2. řádu
  - b) centrální schema 2. řádu se stabilizací tlaku
  - c) upwind schema 3. řádu se stabilizací tlaku.

a pro srovnání nároků pouze prostorové diskretizace také

- 4-stupňovou Rungovu-Kuttovu metodu konečných objemů, centrální schéma 2. řádu, bez stabilizace tlaku

Výsledky byly srovnány ve formě izochar rychlosti a jsou podle očekávání prakticky stejné pro všechny metody. Rychlost konvergence a dosažení stacionárního stavu bylo sledováno užitím  $L_2$  normy stacionárního rezidua. V tab. 2 jsou uvedeny strojové časy výpočtů vztahené k časům pro MacCormackovo schéma a potřebný počet iterací. Je vidět, že implicitní metoda může být, za předpokladu vhodné diskretizace v prostoru, efektivnější než explicitní i v případě laminárního proudění za nízkých Reynoldsových čísel. Poslední způsob diskretizace byl vybrán pro řešení turbulentních proudění.

<i>schema</i>	<i>čas CPU/1 iterace</i>	<i>čas CPU do ustálení</i>	<i>n<sub>max</sub></i>
MacCormack	1,00	1,00	9500
Runge-Kutta, 3-st.	1,51	1,36	8500
Runge-Kutta, 4-st.	1,98	1,25	6000
semiimplicitní a)	28,04	8,85	3000
semiimplicitní b)	17,33	5,47	3000
Crank-Nicolson	89,26	4,70	500
Runge-Kutta, 4-st.	11,28	8,30	7000
zpětný Euler a)	202,91	3,63	170
zpětný Euler b)	203,44	1,07	50
zpětný Euler c)	203,44	0,54	25

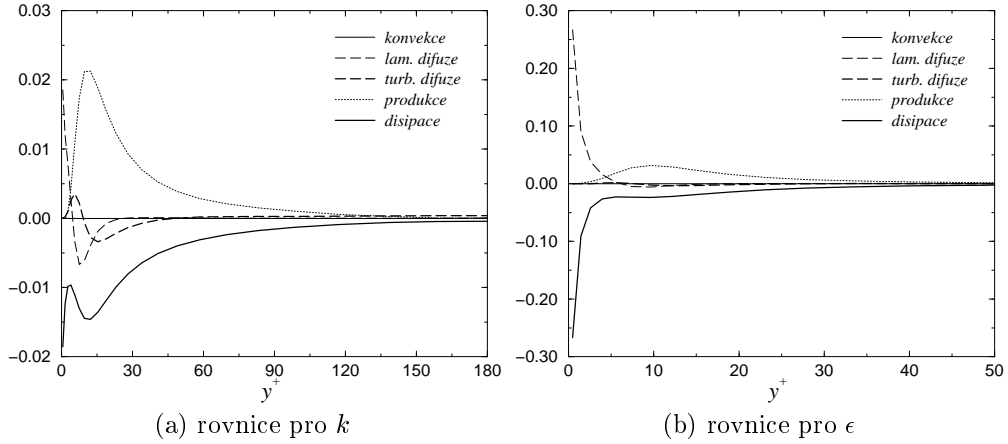
Tabulka 2: Výpočetní náročnost diferenčních schemat

## 6 Předběžné výpočty turbulentních proudění

Pro výpočet impaktních proudění jsou důležité vlastnosti modelů turbulence jak v mezní vrstvě, tak ve volných smykových oblastech. Uvažované modely turbulence byly tedy ve spojení se zvolenou metodou konečných objemů ověřeny při řešení proudění v rovinném kanálu a v rovinném volném proudu.

Výsledky prvního případu jsou srovnány s daty z přímé numerické simulace [3] a empirickými vztahy a shledány přijatelné pro všechny modely. Jsou ukázány rozdíly v chování členů v rovnicích modelů turbulence pro různé modifikace pro nízká Reynoldsova čísla, příklad viz na obr. 1.

Modely turbulence se ukázaly vhodné také pro proudění typu volného proudu s výjimkou Spalartova-Allmarasova modelu. Výsledky jsou srovnány s nezávislým výpočtem a ověřeny z hlediska vlastnosti sebezachování.



Obrázek 1: Balance  $YS$   $k$ - $\epsilon$  modelu turbulence pro rovinný kanál

## 7 Výpočet 2D turbulentního impaktního proudu

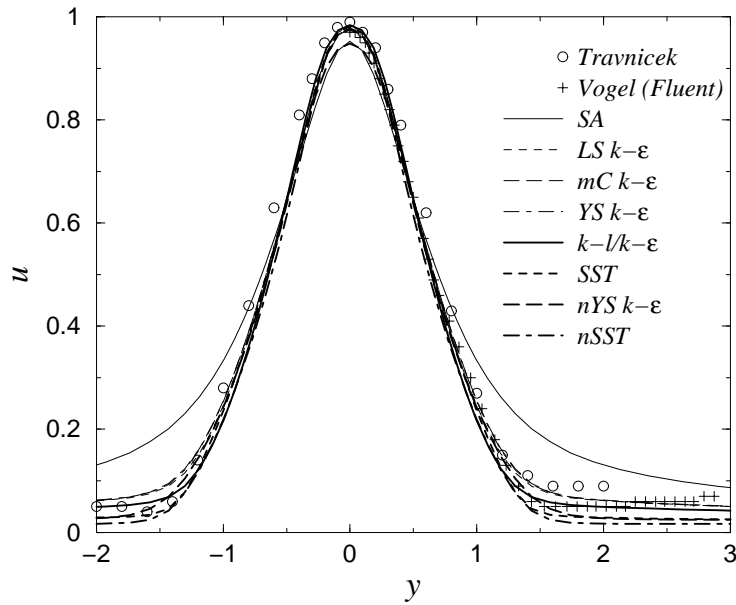
V této části práce je řešen případ proudu vytékajícího ze štěrbinové trysky ( $Re = 21000$ ) a dopadajícího na stěnu ve vzdálenosti 10 šířek trysky.

Výsledky jsou srovnány s měřením a nezávislým výpočtem [13]. Je použita většina uvažovaných modelů turbulence. Přetlak způsobený nárazem na stěnu téměř nezávisí na modelu turbulence, což dovoluje relativní volnost ve volbě modelu turbulence při výpočtech zaměřených na silové působení proudu na tělesa. Vývoj stěnového proudu na impaktní stěně se však pro různé modely turbulence liší, obr. 2. Nejlepší shody s měřením dosáhl dvouvrstvý  $k-l/k-\epsilon$  a  $SST$  model turbulence. Výsledky nelineárních modelů nejsou lepší než lineárních. Jejich přesnost zůstává omezena odhadem časového měřítka turbulence, přestože konstitutivní rovnice je nadřazená Boussinesqově hypotéze. To je potvrzeno i vzájemným srovnáním obou variant nelineárního modelu. Zde je možné vidět praktické omezení vývoje konstitutivních rovnic pro Reynoldsova napětí směrem k úplné formě vzhledem k rychlosti deformace a rotace (explicitní algebraické modely Reynoldsových napětí).

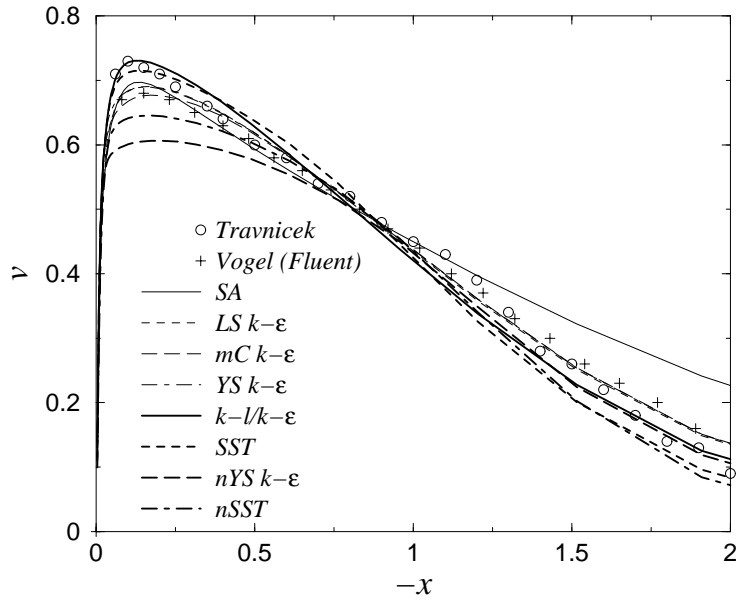
## 8 Výpočet 3D turbulentního impaktního proudu

V této části práce je řešen případ proudu vytékajícího z trubice kruhového průřezu ( $Re = 28000$ ) a dopadajícího na stěnu ve vzdálenosti 2 průměrů trubice. Výsledky měření jsou dostupné v databázi ERCOFTAC [2].

Případ je z uvažovaných proudění nejnáročnější na modelování turbulence. Modely typu  $k-\epsilon$  selhávají už při předpovědi volného proudu před nárazem, což se zde však pro malou vzdálenost ke stěně neprojeví. Přesto byl testován také



(a) "free jet" region



(b) wall jet on impingement wall

Obrázek 2: Velocity profiles for 2D impinging jet.



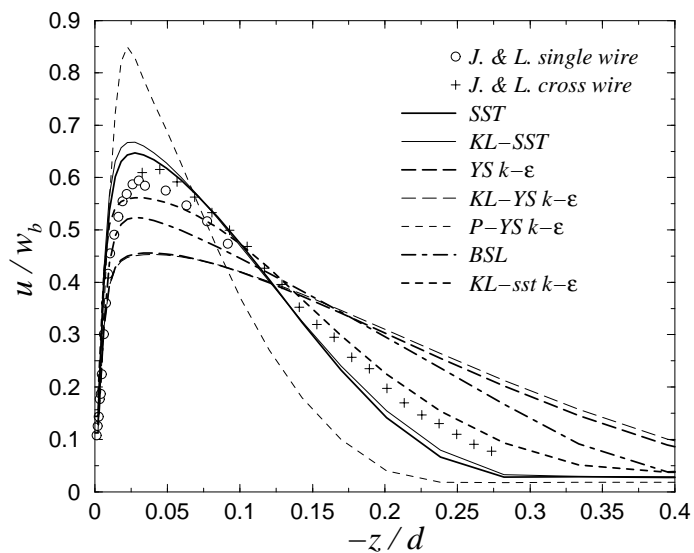
model  $k-\epsilon$  v Popeho úpravě, který je pro volný proud vyhovující. Tlak na impaktní stěně a rychlost na ose proudu zde jako ve 2D případě na modelu turbulence nezávisí. Všechny testované modely založené na Boussinesqově hypotéze však selhávají při předpovědi stěnového proudu. Vyšší nároky na přesnost může splnit pouze Menterův *SST* model, který dosahuje dobré shody s měřením jak na úrovni středního proudění, tak na úrovni Reynoldsových napětí. Jako příčina jeho úspěchu byl identifikován transport smykového napětí spočívající v lokálním nahrazení Boussinesqovy hypotézy hypotézou Bradshawovou. Dále je ukázáno, že analogicky lze zlepšit předpověď modelu  $k-\epsilon$  (model *sst k-ε*), což někdy může být výhodné vzhledem k rozdílnému chování modelů *SST* a  $k-\epsilon$  v oblasti nízkých Reynoldsových čísel. Pro zlepšení předpovědi normálových Reynoldsových napětí v oblasti nárazu je nezbytné snížení produkce kinetické energie fluktuací, zde provedené podle Kato a Laundera. Po této modifikaci je možné předpovědět i nemonotónní průběhy transportních součinitelů na impaktní stěně pozorované při měřeních [12]. V tomto ohledu se zdá být nejlepší model  $k-\epsilon$ , avšak pro kvantitativní posouzení chyběly údaje z měření.

## 9 Závěr

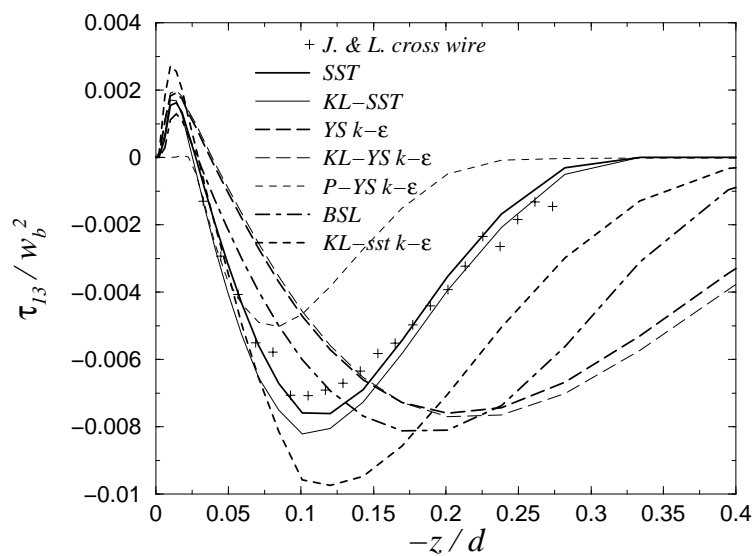
Byly implementovány moderní metody konečných objemů a metody konečných diferencí založené na metodě umělé stlačitelnosti. Byly uvažovány centrální i upwind způsoby diskretizace v prostoru nejméně druhého řádu přesnosti a explicitní, semiimplicitní a implicitní diskretizace v iteračním čase. Byly aplikovány vhodné starší i moderní modely turbulence (algebraické, jedno- a dvourovnicové).

Jako nejefektivnější z uvažovaných metod a dostatečně přesná pro výpočty turbulentního proudění byla shledána upwind diskretizace 3. řádu v prostoru a implicitní diskretizace v čase. Nezbytný je vhodný způsob užití numerické disipace. Stabilizace tlaku ve spojení s upwind schematem 3. řádu se ukázala robustní a přitom vhodná i z hlediska přesnosti. Metodu lze relativně snadno rozšířit i na případy proudění stlačitelné newtonské tekutiny, popř. přenosu tepla a hmoty v nestlačitelné tekutině.

Pro dvourozměrný impaktní proud vyhovuje nejlépe dvouvrstvý  $k-l/k-\epsilon$  a *SST* model turbulence, ostatní uvažované modely jsou stále přijatelné kromě modelu Spalartova-Allmarasova. Impaktní proud s osově symetrickou geometrií je na modelování turbulence podstatně náročnější. Zde může vyšší nároky na přesnost splnit ze studovaných pouze Menterův dvourovnicový model transportu smykového napětí. Pro inženýrské kvalitativní rozhodování („lepší – horší“) mezi více variantami konkrétního technického řešení je možné z nároků na přesnost slevit a skupinu použitelných modelů rozšířit i o modely typu  $k-\epsilon$ , které mohou dát aspoň přijatelnou předpověď smykového napětí na stěně. Jako příčina úspěchu Menterova *SST* modelu byl identifikován transport smykového Reynoldsova napětí spočívající v lokálním nahrazení Boussinesqovy hypotézy hypotézou Bradshawovou. Bylo ukázáno, že analogickým způsobem



(a) střední rychlost



(b) smykové Reynoldsovo napětí

Obrázek 3: Stěnový proud ve vzdálenosti  $r/d = 25$  od osy proudu

lze zlepšit i předpověď modelu  $k-\epsilon$ . Pro zlepšení předpovědi normálových Reynoldsových napětí v oblasti nárazu je nezbytné snížení produkce kinetické energie fluktuací. Pro předpověď smykového napětí na impaktní stěně se zdá být lepší model  $k-\epsilon$ , avšak pro kvantitativní posouzení chyběly údaje z měření.



## Seznam publikací

- [1] Fialová, M., Kozel, K., Louda, P.: Výpočet některých 3D případů proudění nestlačitelné vazké tekutiny. In: *Dynamika tekutin 2000*, Praha, 2000. ÚT AVČR.
- [2] Kolman, D., Kozel, K., Louda, P., Sopuch, P.: Development towards a numerical solution of high temperature flow. In: *Fluid Dynamics 2001*, Praha, 2001. IT ASCR.
- [3] Kozel, K., Ležák, D., Louda, P., Tesař, V.: Numerické řešení dvou případů nestlačitelného vazkého proudění. In: *Aktuální problémy mechaniky tekutin '95*, Praha, 1995. ÚT AVČR.
- [4] Kozel, K., Louda, P.: Numerical solution of 2D and 3D free and impinging jet. In: *Numerical Modelling in Continuum Mechanics*, Praha, 1997. UK.
- [5] Kozel, K., Louda, P.: Explicit and implicit scheme solving 2D and 3D impinging jet flows. In: *Euler and Navier-Stokes Equations (Theory, Numerical Solution, Applications)*, Praha, 1998. ÚT AVČR.
- [6] Kozel, K., Louda, P.: Implicitní diferenční schema pro 3D metodu konečných objemů. In: *Aktuální problémy mechaniky tekutin '98*, Praha, 1998. ÚT AVČR.
- [7] Kozel, K., Louda, P.: Numerical solution of the laminar flow through a 2D and 3D backward facing step. In: *Topical problems of fluid dynamics 2000*, Praha, 2000. IT ASCR.
- [8] Kozel, K., Louda, P.: Numerical solution of the flow through a 2D and 3D backward facing step. In: *Numerical modelling in continuum mechanics*, Praha, 2001. Matfyzpress.
- [9] Kozel, K., Louda, P.: Numerical solution of the flow through a 2D and 3D backward facing step. In: *Review of results and the set of selected publications achieved on IBM RS 6000/SP*. ČVUT, Praha, 2001.
- [10] Kozel, K., Louda, P., Příhoda, J.: Numerical solution of 2D and 3D impinging jet flows. In: *Finite Volumes for Complex Applications*, Duisburg, 1999.
- [11] Kozel, K., Louda, P., Příhoda, J.: Numerical solution of 2D and 3D turbulent impinging jet flows. In: *8th International Symposium on Computational Fluid Dynamics*, Bremen, 1999. CD-ROM.
- [12] Kozel, K., Louda, P., Příhoda, J.: Numerical simulation of 2D and 3D turbulent impinging jet flows. In: *16th IMACS congress*, Lausanne, 2000. CD-ROM.

- [13] Kozel, K., Louda, P., Příhoda, J.: Numerical solution of 2D and 3D incompressible viscous flow problems. In: *Internal Flows*, 5th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows, Gdansk, 2001.
- [14] Kozel, K., Louda, P., Příhoda, J.: Numerical solution of flow through a 2D and 3D backward facing step. In: Sonar, T., editor, *Proc. of the GAMM Workshop Discrete Modelling and Discrete Algorithms in Continuum Mechanics*, pp. 167–176. Logos Verlag Berlin, 2001.
- [15] Kozel, K., Louda, P., Příhoda, J.: Performance of several turbulence models in impinging jet flows. In: *Topical problems of fluid dynamics 2002*, Praha, 2002. IT ASCR.
- [16] Kozel, K., Louda, P., Tesař, V.: Numerické řešení 2D proudu. In: *Dynamika tekutin '95*, Praha, 1995. ÚT AVČR.
- [17] Kozel, K., Louda, P., Tesař, V.: Computation of 2D and 3D jet flows. In: *Aktuální problémy mechaniky tekutin '97*, Praha, 1997. ÚT AVČR.
- [18] Kozel, K., Louda, P., Tesař, V.: Numerické řešení rovinného a třírozměrného impaktního proudu. Technická zpráva, Katedra technické matematiky FS ČVUT, Praha, 1997.
- [19] Kozel, K., Louda, P., Vicher, M.: Numerical solution of 2D and 3D flows through a backward facing step. In: *8th International Symposium on Computational Fluid Dynamics*, Bremen, 1999. CD-ROM.
- [20] Louda, P.: Numerický výpočet rovinného zatopeného proudu. Diplomová práce, FS ČVUT, Praha, 1995.
- [21] Louda, P.: Numerické řešení proudění vazké nestlačitelné tekutiny. In: *Numerická řešení 2D a 3D stacionárních a nestacionárních proudění*. Katedra technické matematiky FS ČVUT, Praha, 1997.
- [22] Louda, P.: Investigation of self-similar subgrid models for LES. Technická zpráva 2001-20, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhode-Saint-Genève, 2001.
- [23] Louda, P., Střílka, T., Tesař, V.: Vyšetřování osově symetrického impaktního proudění anemometrem se žhaveným drátkem. In: *Dynamika tekutin '96*, Praha, 1996. ÚT AVČR.

## Literatura

- [1] Chorin, A. J.: A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J. of Computational Physics*, 2(1):12–26, 1967.
- [2] Cooper, D., Jackson, D. C., Launder, B. E., Liao, G. C., Baughn, J. W., Yan, X., Masbah, M.: Normally impinging jet from a circular nozzle. Classic ERCOFTAC Database at University of Surrey. <http://www.ercoftac.org/>.
- [3] Kim, J., Moin, P., Moser, R.: Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177:133–166, 1987.
- [4] Kozel, K., Dvořák, R.: *Matematické modelování v aerodynamice*. Vydavatelství ČVUT, Žitná 4, Praha 6, 1996.
- [5] Menter, F. R.: Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8):1598–1605, August 1994.
- [6] Merkle, C., Venkateswaran, S., Deshpande, M.: Efficient implementation of turbulence modeling in computational schemes. In: *Second U.S. National Congress on Computational Mechanics*, Washington, D.C., August 16-18 1993.
- [7] Patel, V. C., Rodi, W., Scheuerer, G.: Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: A review. *AIAA Journal*, 23(9):1308–1319, September 1985.
- [8] Pattijn, S.: *Non-linear, low-Reynolds, two-equation turbulence models*. PhD thesis, University of Gent, 1999.
- [9] Příhoda, J., Hlava, T., Kozel, K.: Testování délky přechodové oblasti pomocí dvouvrstvého modelu turbulence. In: *Engineering Mechanics'97*, pp. 157–162, Svratka, 1997.
- [10] Příhoda, J., Hlava, T., Kozel, K.: Modelling of bypass transition including the pseudolaminar part of the boundary layer. *ZAMM*, 79, 1999.
- [11] Spalart, P. R., Allmaras, S. R.: A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *La Recherche Aéronautique*, 1:5–21, 1994.
- [12] Trávníček, Z.: Vybrané případy impaktních proudů: šterbinová tryska, kruhová tryska, anulární tryska. Technická zpráva Z-1238/97, Ústav termomechaniky AV ČR, Praha, 1997.
- [13] Trávníček, Z., Vogel, J.: Experimental and numerical solution of two-dimensional impinging jet with controlled entrainment. In: *Engineering mechanics 2000*, pp. 141–146, Svratka, 2000.

- [14] Vierendeels, J., Riemslag, K., Dick, E.: A multigrid semi-implicit line-method for viscous incompressible flows. In: *Euler and Navier-Stokes Equations*, pp. 89–92, Praha, 1998. ÚT AVČR.
- [15] Yang, Z., Shih, T. H.: A new time scale based  $k$ - $\epsilon$  model for near wall turbulence. Technická zpráva, NASA Lewis Research Center, January 1992.