

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ  
Fakulta strojní  
a  
UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE  
Centre de Mathématiques et d'Informatique

Numerické řešení transonického proudění užitím TVD a  
ENO schémat.

Ing. Jiří Fürst

Obor:  
Matematické a fyzikální inženýrství  
Mécanique

Teze disertační práce

Disertační práce vznikla na školícím pracovišti FS ČVUT Praha a l'Univerisité de la Méditerranée Marseille.

Disertanat: Ing. Jiří FÜRST  
Školitelé: Prof. Philippe Angot  
Prof. RNDr. Karel KOZEL, DrSc.  
Oponenti:

Teze se rozesílají dne:

Obhajoba disertační práce se koná dne:

v zasedací místnosti č. 17 přízemí Fakulty strojní ČVUT, Technická 4, Praha 6 - Dejvice, před komisí jmenovanou ve vědním oboru Matematické a fyzikální inženýrství.

S disertační prací je možné se seznámit v oddělení pro vědu a výzkum Fakulty strojní Českého vysokého učení technického v Praze, Tecnická 4, Praha 6 - Dejvice.

# Obsah

Úvod	4
1 Schémata typu TVD pro řešení hyperbolických problémů	5
2 Použití TVD a ENO schémat pro numerické řešení vícerozměrných systémů Eulerových a Navierových-Stokesových rovnic	6
3 Numerická analýza ENO schémat	11
4 Implicitní metoda pro řešení nevazkého transonického proudění	12
5 Modelování interakce rázové vlny a polytropického víru	13

## Seznam značení

$A$  - jakobiho matice  $\frac{\partial F}{\partial U}$ .

$C$  - Prostor spojitých funkcí.

$d$  - Dimenze prostoru.

$f_j$  - Tok zachovávané veličiny (skalární případ)  $f_j \in C(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^d \times \mathbf{R})$ .

$F$  - Tok zachovávané veličiny (systém rovnic)  $F \in C(\mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^l)$ .

$F_{i+1/2}$  - Numerický tok definovaný jako funkce  $p + q + 1$  parametrů

$$F_{i+1/2} = \tilde{F}(U_{i-p}^n, U_{i-p+1}^n, \dots, U_{i+q}^n) .$$

$\gamma$  - Poissonova konstanta  $\gamma = c_p/c_V$ .

$l$  - Počet rovnic hyperbolického systému.

$M$  - Machovo číslo  $M = \frac{|u|}{\sqrt{\gamma p/\rho}}$ .

$M_n$  - Veličina charakterizující sílu víru  $M_n = \frac{v_{max}}{\sqrt{nRT}}$ .

$n$  - polytropická konstanta definující tvar víru.

$N_p$  - Počet procesorů.

$p$  - Statický tlak.

$p_0$  - Stagnační tlak  $p_0 = p(1 + \frac{\gamma+1}{2} M^2)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ .

$\rho$  - Hustota.

$\rho_0$  - Stagnační hustota  $\rho_0 = \rho(1 + \frac{\gamma+1}{2} M^2)^{\frac{1}{1-\gamma}}$ .

$\mathbf{R}$  - Množina reálných čísel.

$\mathbf{R}_+$  - Množina nezáporných reálných čísel.

$R^1(W^n)$  - Reziduum počítané metodou prvního řádu.

$R^2(W^n)$  - Reziduum počítané metodou druhého řádu.

$T_{N_p}$  - Doba potřebná k výpočtu na  $N_p$  procesorech.

$u_0$  - Počáteční podmínka  $u_0 : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ .

# Úvod

Práce se zabývá analýzou numerických metod pro řešení hyperbolických problémů popsaných parciální diferenciální rovnicí (resp. systémem rovnic)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_j(u)}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

kde  $u$  je hledaná funkce  $u \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^l$ , toky  $f_j$  jsou spojité funkce  $f_j \in C(\mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^l)$ ,  $d$  je dimenze prostoru a  $l$  je počet rovnic systému. Tímto typem rovnic je popsána celá řada praktických problémů. Připomeňme Eulerovy rovnice popisující proudění nevazké stlačitelné tekutiny či rovnice Navierovy-Stokesovy popisující vazké stlačitelné tekutiny, kde vystupují navíc oproti rovnicím Eulerovým členy závislé na druhých derivacích řešení.

Nelinearita těchto problémů daná členy  $f_j$  (toky) způsobuje mnohé obtíže nejen při analýze existence či jednoznačnosti řešení počáteční úlohy pro tuto rovnici, ale i při jejím numerickém řešení. Je totiž dobře známo, že i při libovolně hladké počáteční podmínce mohou vzniknout v řešení nespojitosti - tzv. rázové vlny. Kvůli těmto nespojitostem je třeba přejít od pojmu řešení klasického, kdy hledáme funkci  $u$  ve třídě spojitých diferencovatelných funkcí, k řešení slabému (viz kapitola 1). V první kapitole je naznačen jeden z možných postupů důkazu existence slabého řešení pro skalární problém ( $l = 1$ ) a navíc je diskutována třída tzv. TVD metod jež jsou konvergentní v tom smyslu, že při zjemňování vypočetní sítě se numerická aproximace blíží k řešení slabému. Dále je využit postupu dle [3] pro důkaz konvergence TVD MacCormackova schématu vyššího řádu pro dvourozměrný skalární problém.

Další kapitola se zabývá konstrukcí a použitím TVD schémat pro vícerozměrné skalární problémy a systémy rovnic. Popisujeme zde modifikaci zjednodušeného Causonova TVD schématu jež vykazuje menší množství umělé vazkosti než původní Causonovo schéma a zdá se proto vhodné i pro výpočet vazkého proudění. Ukazujeme zde též některé výsledky získané řešením třírozměrného proudění v reálné turbíně dané Škodou Plzeň.

Třetí kapitola popisuje konstrukci tzv. ENO schémat. Pomocí numerických experimentů se pokoušíme určit přesnost těchto ryze nelineárních metod pro modelové případy Burgersovy rovnice v jednorozměrném případě a lineární rovnice v případě dvojrozměrném. Dále ukazujeme aplikaci ENO schémat pro výpočty transonického proudění popsaného systémem Eulerových či Navierových-Stokesových rovnic.

V další kapitole popisujeme konstrukci implicitní metody pro výpočet dvojrozměrného transonického proudění na obecných nestrukturovaných sítích.

Ukážeme značné vylepšení přesnosti metody při použití jedné varianty váženého ENO schématu druhého řádu proti přesnosti základní metody prvního řádu. Dále srovnáváme tyto implicitní metody s odpovídajícími explicitními metodami z hlediska jejich efektivnosti (tj. strojového času potřebného k dosažení ustáleného řešení) a ukazujeme, že i pro případ nevazkého proudění může být implicitní metoda efektivnější.

Poslední kapitola je věnována numerické simulaci interakce rázové vlny s polytropickým vírem. V tomto případě jsme nuceni použít schémat vysokého řádu přesnosti neboť musíme zachytit v řešení nejen struktury větších měřítek jako je rázová vlna či vír ale i struktury malých měřítek jako jsou slabé akustické vlny produkované během interakce.

## 1 Schémata typu TVD pro řešení hyperbolických problémů

V této kapitole podáváme stručný přehled teorie stability nelineárních numerických metod typu TVD pro řešení počáteční úlohy pro jednorozměrnou či vícerozměrnou skalární parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_j(u)}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

s počáteční podmínkou

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (3)$$

Neznámou je zde reálná funkce  $u$  definovaná na kartézském součinu  $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+$ .

Je dobře známo, že řešení  $u$  může být nespojitě i pro libovolně hladkou počáteční podmínkou  $u_0$ .<sup>1</sup> Kvůli tomuto faktu jsme nuceni upustit od snahy hledat řešení klasické (tj. hledat  $u$  ve třídě spojitě diferencovatelných funkcí) a přejít k hledání řešení slabého. V literatuře lze nalézt několik různých definic slabého řešení. My se držíme definice uvedené v [12].

**Definice 1** *Funkci  $u \in L_\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+)$  nazveme slabým řešením počáteční úlohy (2-3) právě tehdy, když pro každou testovací funkci  $\phi \in C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+)$  s kompaktním nosičem je splněna následující rovnost:*

$$\int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+} u \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt + \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+} \sum_{j=1}^d f_j(u) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx dt = - \int_{\mathbf{R}^d} u_0(x) \phi(x, 0) dx. \quad (4)$$

<sup>1</sup>To je ilustrováno v kapitole 3 kde řešíme počáteční úlohu pro Burgersovu rovnici (tj. pro rovnici 2 s  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ ) s počáteční podmínkou  $u_0(x) = \sin(x)$ .

Lze dokázat, že za jistých předpokladů existuje jednoznačné (tzv. entropické) slabé řešení počáteční úlohy (2-3)  $u = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u_\epsilon$  kde  $u_\epsilon$  je řešení počáteční úlohy pro parabolicky perturbovanou rovnicí  $\partial_t u + \sum \partial_j f_j(u) = \epsilon \Delta u$  (viz např. [6]).

V této kapitole využijeme postup navržený Coquelem a LeFlochem v [4] resp. [3] pro důkaz konvergence numerické aproximace získané pomocí modifikace TVD MacCormackova schématu pro vícerozmerný skalární případ.

## 2 Použití TVD a ENO schémat pro numerické řešení vícerozměrných systémů Eulerových a Navierových-Stokesových rovnic

První část popisuje konstrukci TVD schémat pro nelineární hyperbolické systémy v jednorozměrném případě. Vycházíme ze schémat pro skalární problém a rozšíření pro systém děláme třemi možnými přístupy:

- Plné TVD schéma založené na projekci do charakteristických veličin. Schémata tohoto typu jsou obecně velmi robustní a přesná avšak výpočet pomocí nich je náročný na strojový čas. Modelový příklad tohoto typu schémat je Roeho protiproudové schéma prvního řádu s numerickým tokem daným předpisem:

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} [F(U_i) + F(U_{i+1}) - |A_{i+1/2}|(U_{i+1} - U_i)] \quad (5)$$

kde  $F(U_i)$  je hodnota toku  $F$  pro stav  $U_i$ ,  $A_{i+1/2}$  je Roeho matice s vlastními čísly  $a_1, \dots, a_l$  ( $l$  je počet rovnic systému). Absolutní hodnota matice  $A$  je definována pomocí matice sestavené z jejích vlastních vektorů  $R$  jako  $R \text{diag}(|a_1|, \dots, |a_l|) R^{-1}$ .

- Zjednodušená verze TVD schématu. Numerický tok je pro modelové schéma dán vztahem

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} [F(U_i) + F(U_{i+1}) - \rho_{A_{i+1/2}}(U_{i+1} - U_i)]. \quad (6)$$

Zde  $\rho_A$  značí spektrální poloměr matice  $A$ . Toto schéma je méně náročné na strojový čas. Na druhou stranu se však ukazuje, že jeho numerická vazkost je často příliš silná pro výpočet vazkého proudění s vysokým Reynoldsovým číslem.

- Modifikované schéma používá podobný tvar umělé vazkosti jako zjednodušené TVD schéma, avšak na místě spektrálního poloměru matice  $A$  vystupuje absolutní hodnota vlastního čísla s nejmenší velikostí <sup>2</sup>:

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} [F(U_i) + F(U_{i+1}) - \min(|a_1|, \dots, |a_l|)(U_{i+1} - U_i)]. \quad (7)$$

Aby nedocházelo k porušení entropické podmínky v případě, že jedno z vlastních čísel je rovno nule, nahrazujeme  $\min(|a_1|, \dots, |a_l|)$  entropickou korekcí  $\Psi(\min(|a_1|, \dots, |a_l|))$ .

Ukážeme tyto tři přístupy na případě TVD MacCormackova schématu. Plné schéma je popsáno např. v [19] (první přístup). Zjednodušená varianta byla navržena D.M. Causonem v [2] (druhý přístup) a námi navržená modifikace byla poprvé publikována v [1] (třetí přístup). Porovnáváme tři výše uvedené varianty MacCormackova schématu na testovacím případě transonického proudění dvourozměrným kanálem a ukazujeme, že přesnost modifikovaného schématu je mnohem lepší než přesnost schématu zjednodušeného.

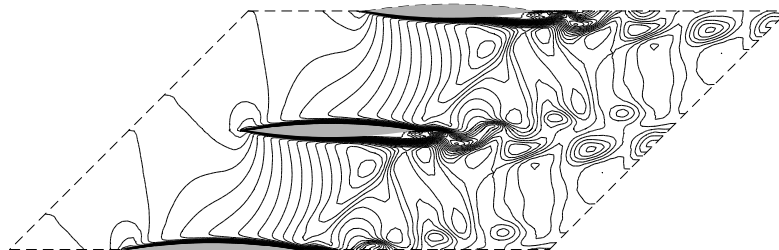
Dále řešíme případ transonického vazkého proudění experimentální turbínovou mříží DCA 8% při  $Re = 6400$ . Tento případ byl již dříve řešen Milošem Huňkem a Karlem Kozlem [8], kde bylo k výpočtu použito centrální schéma s reziduálním vyhlazováním. Jejich metoda vedla ke stacionárnímu řešení, zatímco naše výpočty ukázaly řešení nestacionární. Abychom ověřili platnost našeho výsledku, provedli jsme stejný výpočet pomocí váženého ENO schématu pátého řádu (tedy naprosto jiným typem metody) a dostali jsme kvalitativně shodné výsledky jako pomocí modifikovaného TVD MacCormackova schématu (viz obr. 1).

Dále v práci ukazujeme srovnání výsledků získaných řešením vazkého a nevazkého proudění dvourozměrnou turbínovou mříží SE 1050 zadanou Škodou Plzeň. Tyto výsledky naznačují, že námi navržená modifikace Causonova schématu je použitelná pro výpočty transonického proudění o vysokých Reynoldsových číslech.

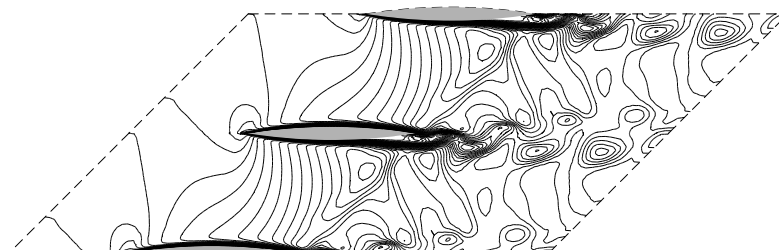
Dvourozměrné metody popsané v této kapitole byly dále rozšířeny pro výpočty trojrozměrných úloh na jednoduchých typech strukturovaných sítí. Přestože tyto typy sítí se nezdaří nejhodnější pro složitější geometrie, dosáhli jsme na nich uspokojivé výsledky což je prezentováno v poslední části této kapitoly kde ukazujeme výsledky získané výpočtem nevazkého transonického proudění statorovou řadou třírozměrné turbínové mříže zadané Škodou Plzeň (obr. 2). Je zde taktéž ukázáno srovnání s výpočty provedenými J. Forťem a J. Halamou [7] na stejných typech sítí avšak naprosto odlišnou metodou.

<sup>2</sup>Tuto metodu je třeba kvůli zlepšení stability kombinovat s Runge-Kuttovou či MacCormackovou metodou pro integraci v časové proměnné.

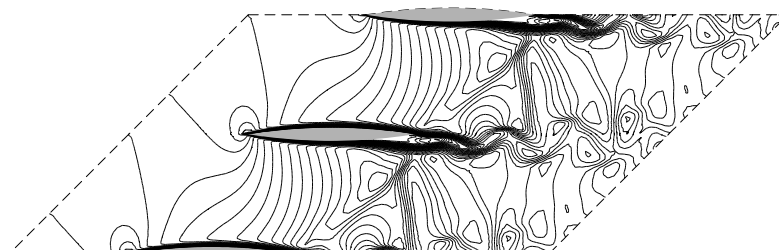




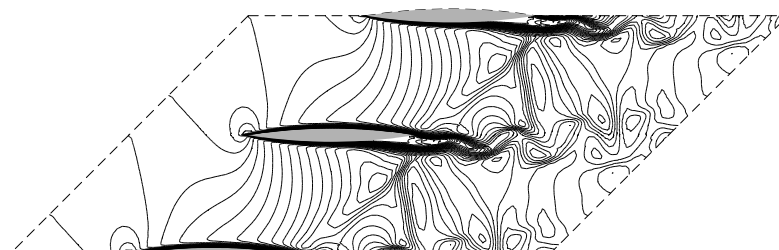
(a) 50000 iterací, modif. Casonovo schéma



(b) 50100 iterací, modif. Casonovo schéma

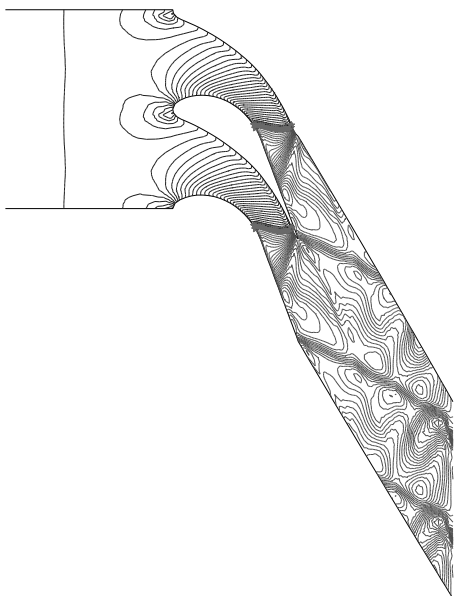


(c) 50000 iterací, ENO schéma

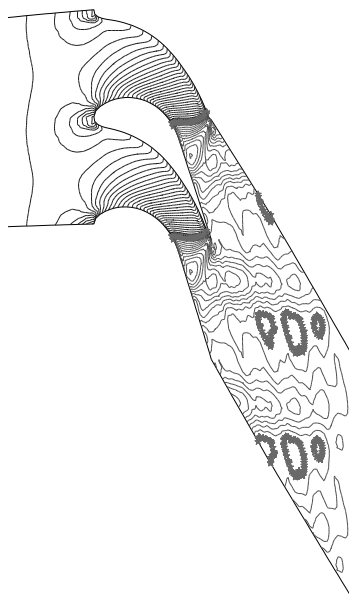


(d) 50100 iterací, ENO schéma

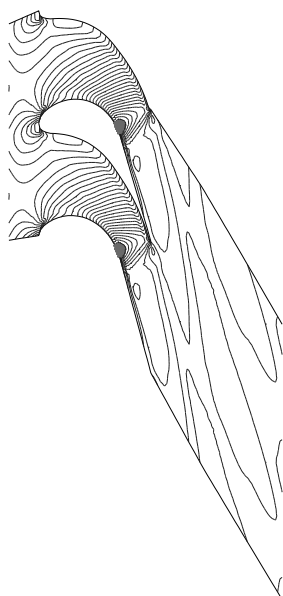
Obrázek 1: Rozložení Machova čísla počítané modifikovaným Casonovým schématem (nahore) a váženým ENO schématem (dole) pro případ mříže DCA 8% ( $Re = 6450$ ).



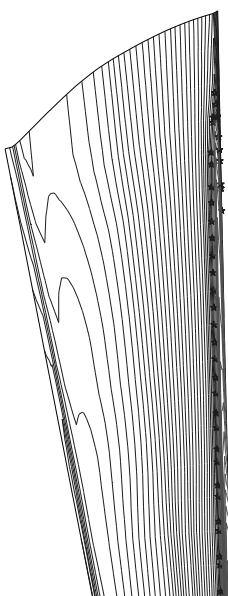
(a) Řez u paty lopatky ( $k = 1$ ).



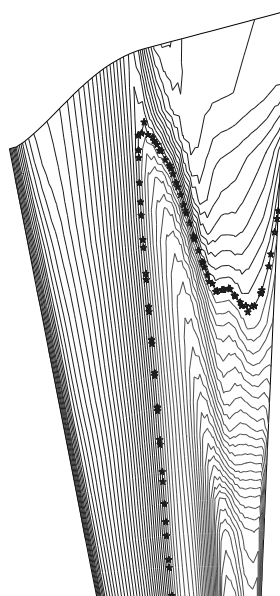
(b) Řez středem oblasti ( $k = 9$ ).



(c) Řez u špičky lo-  
patky ( $k = 18$ ).

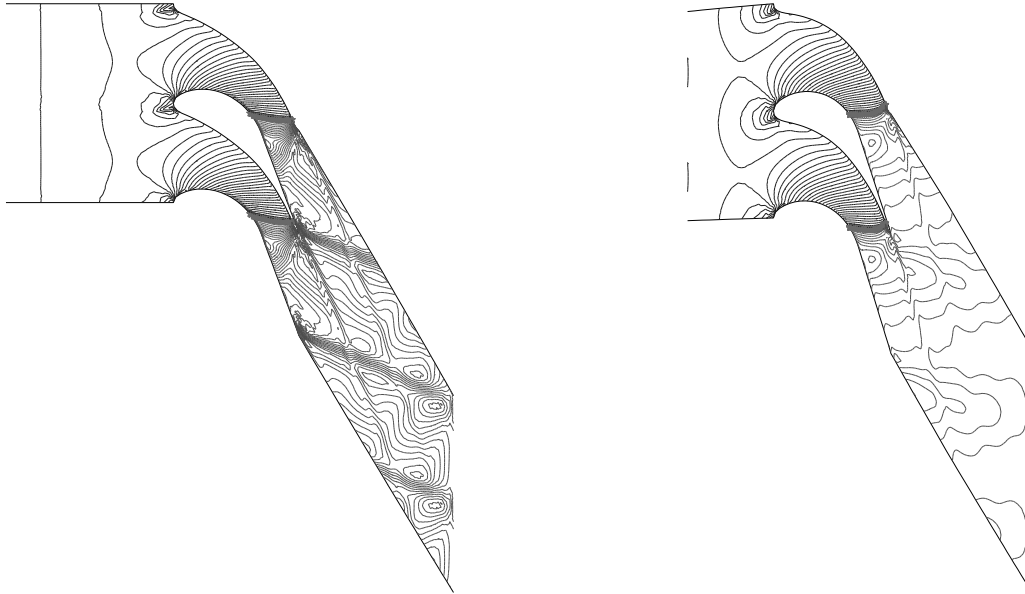


(d) Tlaková  
strana lopatky.



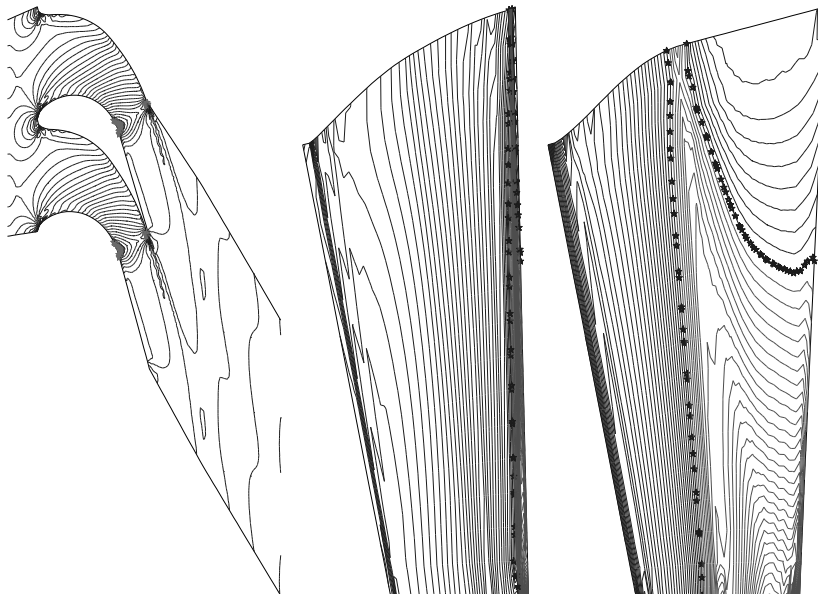
(e) Sací strana lo-  
patky.

Obrázek 2: Rozložení Machova čísla v realné 3D turbínové mříži počítané pomocí modifikovaného schématu ( $\Delta M = 0.025$ , síť  $90 \times 24 \times 17$  buňek).



(a) Řez u paty lopatky ( $k = 1$ ).

(b) Řez středem oblasti ( $k = 9$ ).



(c) Řez u špičky lo-  
patky ( $k = 18$ ).

(d) Tlaková  
strana lopatky.

(e) Sací strana lo-  
patky.

Obrázek 3: Rozložení Machova čísla v realné 3D turbínové mříži počítané Fořtem a Halamou pomocí cell-vertex schématu [7] ( $\Delta M = 0.025$ , síť  $90 \times 24 \times 17$  buňek).

### 3 Numerická analýza ENO schémat

Určitou nevýhodou schémat typu TVD je snížení řádu přesnosti v okolí extrémů. Jedna z možností, jak odstranit toto snížení přesnosti je použití schémat typu ENO (z angl. *Essentially non-oscillatory*) navržených A. Hartenem (viz např. [9], [10]) či Osherem a Shuem (viz např. [17], [18] či [16]).

Hlavním rozdílem mezi metodou typu ENO a klasickými metodami spočívá v tom, že při výpočtu  $u_i^{n+1}$  pomocí klasických metod se používá hodnot  $u_{i-p}^n, \dots, u_{i+q}^n$  nezávisle na hladkosti řešení. ENO schéma naproti tomu nepoužívá pevnou množinu bodů (tzv. stencil), ale sestavuje interpolační formule na základě informace o hladkosti řešení tak, aby nezvyšovalo příliš totální variaci řešení.

Výhodou ENO schémat je, že lze bez obtíží sestavit interpolační formule libovolného řádu a tím tedy získáme metodu libovolného řádu přesnosti (alespoň formálně). Je ovšem třeba připomenout, že teorie ENO schémat je velmi komplikovaná a dodnes se nepodařilo dokázat konvergenci numerické metody ke slabému řešení. Na druhou stranu však numerické experimenty ukazují, že ENO schémata jsou stabilní a konvergentní.

Pozornost zaměřujeme především na konzervativní ENO schémata v konečných diferencích [17], [18], [16] či [11]. Tuto třídu ENO schémat preferujeme před ENO schémata v konečných objemech hlavně pro jejich jednoduchost při výpočtech vícerozměrných úloh.

Vzhledem k tomu, že analýza ENO schémat je velmi nesnadná, musíme se pro určení jejich vlastností spolehnout na numerické experimenty. V [16] se Shu pokouší pomocí numerických experimentů určit skutečný řád přesnosti pro různá ENO schémata pro řešení počáteční úlohy pro skalární lineární rovnici  $u_t + u_x = 0$ . My doplňujeme tyto experimenty studií řádu přesnosti pro případ nelineární Burgersovy rovnice  $u_t + uu_x = 0$ . Vyšetřujeme zde tři případy:

- Hladké řešení - zde je skutečný řád přesnosti schémat roven formálnímu řádu.
- Nespojité řešení - zde je možné vysledovat snížení řádu přesnosti vážejících ENO schémat, neboť v okolí nespojitosti přecházejí automaticky na ENO schémata nižšího řádu.
- Řešení s pohybující se nespojitostí - v tomto případě pozorujeme drastické snížení řádu přesnosti.

Dále studujeme skutečný řád přesnosti pro řešení lineární dvourozměrné úlohy pro rovnici

$$u_t - yu_x + xu_y = 0. \quad (8)$$

I v tomto případě se projevuje výhoda vážených ENO schémat oproti původním ENO schématům.

V poslední části této kapitoly ukazujeme, jak lze použít ENO schémata pro výpočet transonického proudění v turbínových mřížích.

## 4 Implicitní metoda pro řešení nevazkého transonického proudění

V této kapitole provádíme konstrukci implicitní metody druhého řádu přesnosti pro výpočty stacionárního transonického proudění. V první části popisujeme Riemannův řešič navržený Osherem [13]. Dále ukazujeme implementaci okrajových podmínek a pro podzvukový vstup odvozujeme podmínku, jež se nám osvědčila pro některé úlohy vnitřní aerodynamiky, totiž zadávat na vstupu hodnotu stagnačního tlaku  $p_0 = p(1 + \frac{\gamma+1}{2}M^2)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ , stagnační hustoty  $\rho_0 = \rho(1 + \frac{\gamma+1}{2}M^2)^{\frac{1}{1-\gamma}}$  a úhlu náběhu  $\alpha_1$ .

Pomocí tohoto Riemannova řešiče odvozujeme nejprve explicitní schéma prvního řádu jež můžeme zapsat jako

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \Delta t R^1(W^n)_i, \quad (9)$$

kde  $\Delta t$  je časový krok,  $W_i^n$  je hodnota řešení v bodě  $i$  a čase  $n$  a  $R^1$  je residuum počítané pomocí metody prvního řádu. Implicitní schéma prvního řádu dostáváme jednoduše záměnou  $R^1(W^n)$  za  $R^1(W^{n+1})$  ve vztahu (9). Máme tedy

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \Delta t R^1(W^{n+1})_i. \quad (10)$$

Tento nelineární systém linearizujeme pomocí náhrady  $R^1(W^{n+1}) \approx R^1(W^n) + \frac{\partial R^1}{\partial W}(W^{n+1} - W^n)$  a dostáváme

$$\left( \frac{\mathbf{I}}{\Delta t} + \frac{\partial R^1}{\partial W} \right) (W^{n+1} - W^n) = -R^1(W^n). \quad (11)$$

Tento lineární systém řešíme pomocí GMRES metody s blokově diagonálním či ILU předpodmíněním.

Vzhledem k tomu, že se jedná o metodu prvního řádu a její přesnost není uspokojivá, ukazujeme v další části rozšíření na metodu druhého řádu pro stacionární řešení. Tato metoda používá stejně tak jako metoda prvního řádu Osherův numerický tok. Navíc je však přidána po částech lineární rekonstrukce typu ENO, jež značně vylepšuje přesnost metody. Stejně tak jako pro metodu prvního řádu, popisujeme nejprve explicitní variantu schématu druhého řádu, kde používáme Runge-Kuttovu metodu pro integraci v čase.

Vzhledem k tomu, že jakobián  $\frac{\partial R^2}{\partial W}$  pro metodu druhého řádu má mnohem více nenulových prvků než jakobián pro metodu prvního řádu, rozhodli jsme se při linearizaci nahradit  $\frac{\partial R^2}{\partial W} \approx \frac{\partial R^1}{\partial W}$ . Dostáváme tedy schéma:

$$\left( \frac{\mathbf{I}}{\Delta t} + \frac{\partial R^1}{\partial W} \right) (W^{n+1} - W^n) = -R^2(W^n), \quad (12)$$

kde  $R^1$  je reziduum počítané metodou prvního řádu a  $R^2$  reziduum počítané pomocí ENO schématu druhého řádu. Lze snadno nahlédnout, že dosáhneme-li stacionárního řešení, je  $W^{n+1} = W^n$  a tedy levá strana je rovna nule. Z toho důvodu je  $R^2(W^n) = 0$  a jedná se tedy o stacionární řešení s druhým řádem přesnosti. Pro nestacionární případ je metoda pouze prvního řádu.

Obrázek 4 ukazuje rozložení Machova čísla získané pomocí implicitní metody druhého řádu pro případ transonického proudění dvourozměrným testovacím kanálem.

V budoucnu bychom chtěli otestovat tuto metodu na případech výpočtů na tzv. hybridních sítích složených ze čtyřúhelníků v blízkosti pevných stěn a trojúhelníků ve zbytku výpočetní oblasti. Dále bychom rádi tuto metodu otestovali pro případ vazkého transonického proudění.

## 5 Modelování interakce rázové vlny a polytropickeho víru

V této poslední kapitole popisujeme další z aplikací ENO schémat a to pro případ řešení interakce rázové vlny s polytropickým vírem. Interakce nehomogenity s rázovou vlnou vykazuje v zásadě dva typy chování. Pro případ teplotní nehomogenity je možné sledovat vznik dvou vírů a akustická vlna vznikající během interakce má bipolární charakter (viz např. [15]). Naopak při interakci s izentropickým či vírem nedochází ke vzniku vírů a akustická vlna má quadrupolární charakter (viz [5]).

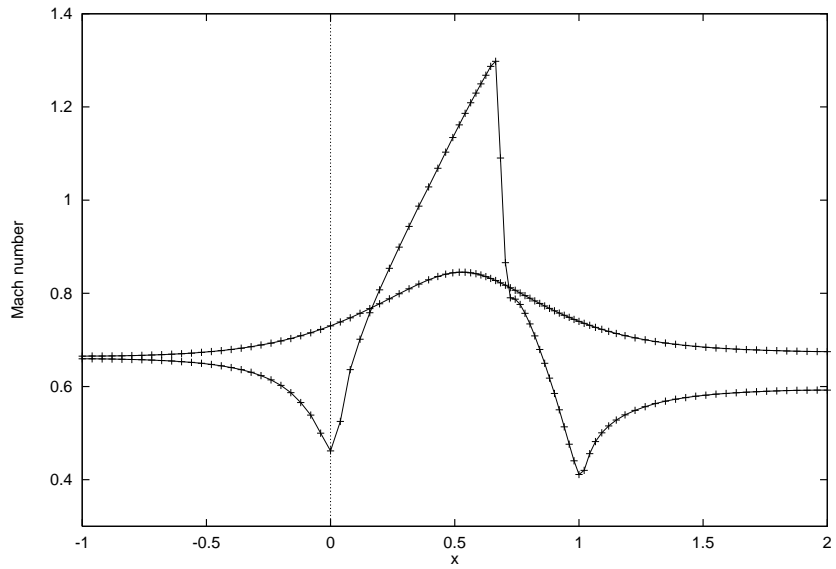
V našem případě jsme se rozhodli studovat interakci rázové vlny s polytropickým vírem splňujícím rovnici  $p/\rho^n = const.$ . Volbou polytropického exponentu  $n$  tak dostáváme různé typy proudové nehomogenity:

$n = 1.4$  - v tomto případě dostáváme izentropický vír,

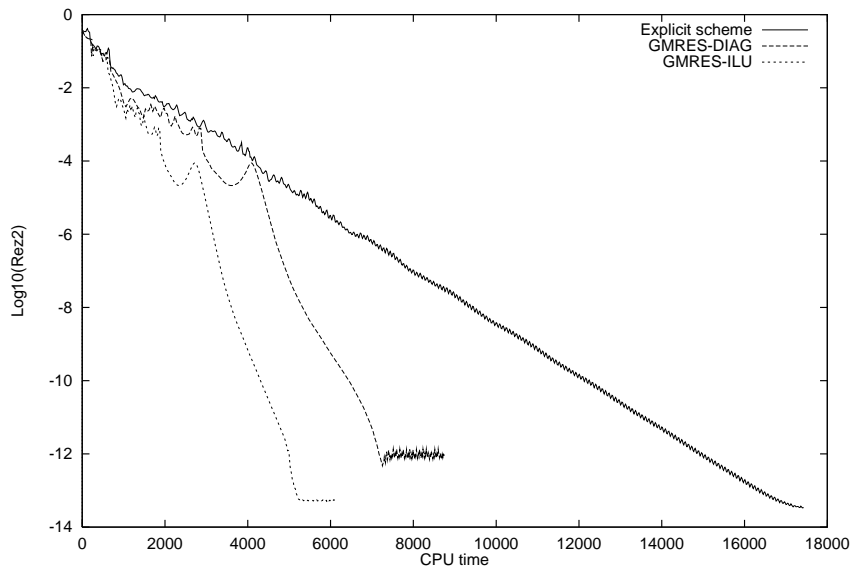
$n = 1$  - pro tuto volbu exponentu dostaneme izotermální vír,

$n = 0$  - tato volba dává izobarickou nehomogenitu s nerovnoměrným teplotním polem,

$n = \infty$  - tento případ vede na vír s konstantní hustotou.



(a) Machovo číslo



(b) Rychlost konvergence

Obrázek 4: Rozložení Machova čísla podél stěn testovacího kanálu počítané implicitní metodou druhého řádu a srovnání rychlosti konvergence s explicitní metodou.

V první části popisujeme použité numerické metody založené na váženém ENO schématu podle [11]. Abychom zajistili dostatečnou přesnost, kombinujeme toto schéma s adaptivní sítí v okolí rázové vlny. Jako druhou možnost jsme implementovali metodu dodatečného stlačení (*artificial compression method*) podle [11] na jemné síti. Vzhledem k tomu, že výpočty na jemné síti vyžadují značnou výpočetní kapacitu, přistoupili jsme k implementaci na paralelním počítači typu MIMD (IBM SP2 ve Společném superpočítačovém centru VŠCHT, ČVUT a IBM). Tabulka 1 ukazuje stupeň paralelizace WENO schématu. Můžeme z vyčíst, že například pro 8 procesorů je čas potřebný k výpočtu přibližně 7.77 krát menší než při výpočtu na jednom procesoru. Dále ukazujeme kvalitativní srovnání našich numerických výsledků s výsledky

$N_p$	arrangement	elapsed time ( $T_{N_p}$ )	Speedup	Efficiency
1	$1 \times 1$	3020.25	1.00	100.00%
2	$2 \times 1$	1495.95	2.02	100.94%
3	$3 \times 1$	986.24	3.06	102.08%
4	$4 \times 1$	753.14	4.01	100.25%
6	$3 \times 2$	504.10	5.99	99.86%
8	$4 \times 2$	388.47	7.77	97.18%

Tabulka 1: Stupeň paralelizace WENO schématu na počítači IBM SP2 (sít  $512 \times 256$ ).

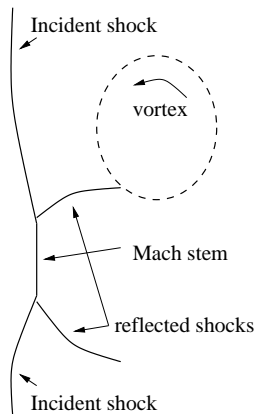
uveřejněnými v [5] (viz obr. 5).

V další části studie se zabýváme vyšetřováním polytropických vlastností interakce. Pokoušíme se zodpovědět na otázku, zda zůstane polytropický zákon použitý pro definici tvaru víru před interakcí platný též po interakci. Pomocí numerických experimentů ukazujeme, že po interakci můžeme v proudovém poli vysledovat dvě kvalitativně odlišné části:

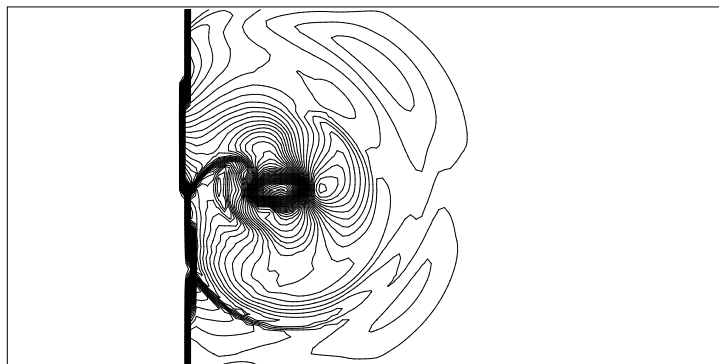
- Část splňující přibližně původní polytropický zákon  $p/\rho^n = const..$  Tato část odpovídá nehomogenitě po interakci.
- Část splňující adiabatický zákon  $p/\rho^\gamma = const.$  kde  $\gamma = c_p/c_V = 1.4$ . Tato část proudového pole odpovídá akustickým vlnám vzniklým během interakce.

Dále se zabýváme produkcí vířivosti v průběhu interakce. Srovnáváme produkci cirkulace v jedné polovině oblasti s přibližným vzorcem navrženým v [14]. Ukazujeme, že pro nehomogenity s  $n$  blízkým 1.4 je produkce vířivosti velmi slabá v porovnání s počátečním vírem a nedojde tedy k rozdělení na

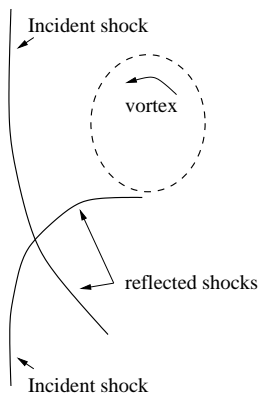




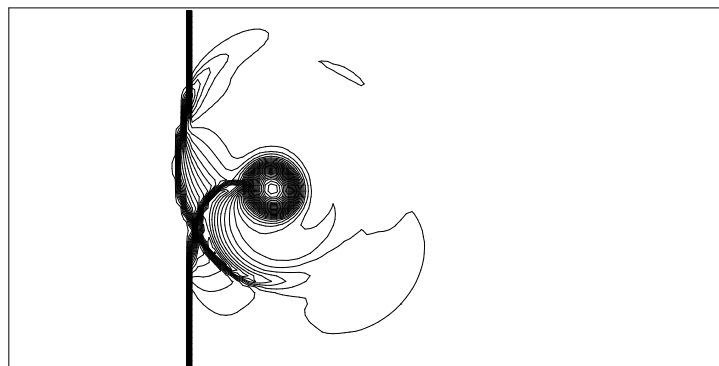
(a) Silný ráz - silný vír



(b) Ráz:  $M_1 = 1.5$ , vír:  $n = 1.4$ ,  $M_n = 0.8$



(c) Slabý ráz - silný vír



(d) Ráz:  $M_1 = 1.1$ , vír:  $n = 1.4$ ,  $M_n = 0.5$

Obrázek 5: Struktura rázové vlny po interakci s vírem dle [5] (vlevo), izočáry tlaku získané naším výpočtem pro bezrozměrný čas  $t = 0.4$  (vpravo).

dva víry. Naopak pro  $n$  blízké nule je počáteční vířivost velmi slabá a díky tomu vířivost vzniklá v důsledku interakce způsobuje vznik dvou vírů.

V poslední části ukazujeme dva kvalitativně odlišné typy akustických vln vzniklých během interakce: bipolární vlnu pro případ  $n$  blízkého nule a quadrupolární vlnu pro  $n \approx 1.4$ .

V budoucnu bychom se chtěli pokusit zjistit pomocí numerických experimentů, zda je možné nalézt takovou hodnotu polytropického exponentu  $n$ , při které dochází ke kvalitativní změně typu interakce.

## Reference

- [1] Philippe Angot, Jiří Fürst, and Karel Kozel. TVD and ENO schemes for multidimensional steady and unsteady flows. a comparative analysis. In Fayssal Benkhaldoun and Roland Vilsmeier, editors, *Finite Volumes for Complex Applications. Problems and Perspectives*, pages 283–290. Hermes, July 1996.
- [2] D. M. Causon. High resolution finite volume schemes and computational aerodynamics. In Josef Ballmann and Rolf Jeltsch, editors, *Nonlinear Hyperbolic Equations - Theory, Computation Methods and Applications*, volume 24 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 63–74, Braunschweig, March 1989. Vieweg.
- [3] Frédéric Coquel and Philippe Le Floch. Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions: the corrected antidiffusive flux approach. *Mathematics of computation*, 57(195):169–210, July 1991.
- [4] Frédéric Coquel and Philippe Le Floch. Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions: a general theory. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(3):675–700, June 1993.
- [5] Janet L. Elzzey, Michael R. Henneke, J. Michael Picone, and Elaine S. Oran. The interaction of a shock with a vortex: Shock distortion and the production of acoustic waves. *Phys. Fluids*, 7(1):172–184, January 1995.
- [6] M. Feistauer. *Mathematical methods in fluid dynamics*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.
- [7] J. Fořt, J. Halama, A. Jirásek, M. Kladrubský, and K. Kozel. Numerical solution of several 2d and 3d internal and external flow problems. In

- R. Rannacher M. Feistauer and K. Kozel, editors, *Numerical Modelling in Continuum Mechanics*, pages 283–291, September 1997.
- [8] Jaroslav Fořt, Miloš Huněk, Karel Kozel, J. Lain, Miroslav Šejna, and Miroslava Vavřincová. Numerical simulation of steady and unsteady flows through plane cascades. In S. M. Deshpande, S. S. Desai, and R. Narasimha, editors, *Fourteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Lecture Notes in Physics, pages 461–465. Springer, 1994.
- [9] A. Harten, B. Enquist, S. Osher, and S. Chakravarthy. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes iii. *Journal of Computational Physics*, 71:231–303, 1987.
- [10] Ami Harten and Sukumar R. Chakravarthy. Multi-dimensional ENO schemes for general geometries.
- [11] Guang-Shan Jiang and Chi-Wang Shu. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *Journal of Computational Physics*, 126(1):202–228, 1996.
- [12] Randall J. Le Veque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.
- [13] Stanley Osher and Sukumar Chakravarthy. Upwind schemes and boundary conditions with applications to Euler equations in general geometries. *J. Comp. Phys.*, (50):447–481, 1983.
- [14] J. M. Picone and J. P. Boris. Vorticity generation by shock propagation through bubbles in a gas. *J. Fluid. Mech.*, 189:23–51, 1988.
- [15] J. M. Picone, E. S. Oran, J. P. Boris, and T. R. Young. Theory of vorticity generation by shock wave and flame interaction. *AIAA*, 94:429–448, 1985.
- [16] Chi-Wang Shu. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. Icase report no. 97-65, ICASE, 1997.
- [17] Chi-Wang Shu and Stanley Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, 77(2):439–471, August 1987.

- [18] Chi-Wang Shu and Stanley Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II. *Journal of Computational Physics*, 83(1):32–78, July 1989.
- [19] H. C. Yee. A class of high-resolution explicit and implicit shock-capturing methods. Technical Memorandum 101088, NASA, Moffett Field, California, February 1989.