

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
Fakulta strojní

Numerické řešení proudění v mezní vrstvě atmosféry

Ing. Luděk Beněš

Obor:
Matematické a fyzikální inženýrství

Teze disertační práce

2000

Praha

Disertační práce vznikla na školícím pracovišti FS ČVUT Praha.

Disertant: Ing. Luděk BENEŠ
Školitelé: Prof. RNDr. Karel KOZEL, DrSc.
Oponenti:

Autoreferát se rozesílá dne:

Obhajoba disertační práce se koná dne:

v zasedací místnosti č. 17 přízemí Fakulty strojní ČVUT, Technická 4, Praha 6 - Dejvice, před komisí jmenovanou ve vědním oboru Matematické a fyzikální inženýrství.

S disertační prací je možné se seznámit v oddělení pro vědu a výzkum Fakulty strojní Českého vysokého učení technického v Praze, Technická 4, Praha 6 - Dejvice.

Obsah

Úvod	5
1 Matematický model	6
1.1 Základní rovnice MVA	7
1.2 Algebraický model turbulence	8
1.3 Transportní rovnice pro pasivní příměsi	9
2 Numerický model pro 1D rovnice	9
2.1 Rovnice s konvekcí	9
2.2 Rovnice s konvekcí a difuzí	10
2.3 Rungeovy-Kuttovy metody	10
2.3.1 Rovnice s konvekcí (RK metody)	11
2.3.2 Rovnice s konvekcí a difuzí (RK metody)	11
2.3.3 Stabilita Rungeových-Kuttových metod	12
3 Numerický model pro 3D případ	13
4 Numerické výsledky	14
5 Závěr	17
Literatura	19

Použité značení

a	advektivní koeficient v 1D případě
\mathbf{a}	zrychlení [ms^{-1}]
C^i	koncentrace i-té příměsi
$\mathbf{f} = col(f_x, f_y, f_z)$	Coriolisova síla [N]
\mathbf{F}	nevazký tok
\mathbf{G}	nevazký tok
\mathcal{G}	funkce modifikující model turbulence v závislosti na stabilitě atmosféry
\mathbf{H}	nevazký tok
$\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$	jednotkové vektory v x, y, z -ovém směru
K	koeficient turbulentní difuze [$m^2 s^{-1}$]
$\mathcal{K}, \mathcal{K}_{xx}, \mathcal{K}_{xy}, \dots$	Reynoldsovův tenzor napětí a jeho složky [Pa]
m	hmotnost [kg]
$\hat{\mathbf{n}}$	jednotkový vektor vnější normály
p	tlak [Pa]
\bar{p}	střední hodnota tlaku [Pa]
p'	fluktuace tlaku [Pa]
R	univerzální plynová konstanta [$Jkg^{-1}K^{-1}$]
\mathbf{R}	vazký tok
Re	Reynoldsovo číslo
Ri	Richardsonovo číslo
\mathbf{S}	vazký tok
S_x, S_y, S_z	průmět plochy stěny buňky primární sítě do jednotlivých směrů
T	absolutní teplota [K]
\mathbf{T}	vazký tok
u, v, w	složky vektoru rychlosti [ms^{-1}]
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	středované složky vektoru rychlosti [ms^{-1}]
u', v', w'	fluktuace složek vektoru rychlosti [ms^{-1}]
v	složka vektoru rychlosti [ms^{-1}]
v'	fluktuační složka rychlosti [ms^{-1}]
\bar{v}	středovaná hodnota rychlosti [ms^{-1}]
$\mathbf{W} = col(p, u, v, w)$	vektor neznámých ³
x, y, z	prostorové souřadnice [m]

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	koeficienty Rungeovy-Kuttovy metody
Δt	časový krok při numerickém řešení
Δx	prostorový krok při numerickém řešení
γ	poměr $\Delta t/\Delta x$
Θ	potenciální teplota [K]
Θ'	fluktuační teploty [K]
$\tilde{\Theta}$	střední hodnota potenciální teploty [K]
λ	Coriolisův parametr
μ	koeficient dynamické viskozity [Nm^{-2}]
ν	koeficient kinematické viskozity [m^2s^{-1}]
ν_T	turbulentní viskozita [m^2s^{-1}]
ρ	hustota [kgm^{-3}]
$\sigma, \sigma_{i,j}$	tenzor napětí a jeho složky
Ω	výpočetní oblast
$\Omega_i, \Omega_{i,j,k}$	výpočetní buňka primární sítě

Úvod

Předložená práce se zabývá modelováním proudění v mezní vrstvě atmosféry (MVA). Jde o model tzv. středních měřítek - to znamená, že se zabývá oblastí velkou řádově kilometry až desítky kilometrů. Tento problém, ve spojení se stále rostoucí industrializací, nabývá v dnešní době stále více na důležitosti. Vždyť znalost parametrů proudění v blízkosti země je nutná v mnoha oblastech lidského podnikání, jako jsou umístění, popř. regulace zdrojů znečištění (elektrárny, kotelny, velké podniky), hodnocení vlivu staveb na životní prostředí, letecká doprava atd., ale i oblast zábavy a sportu (např. závěsné létání).

Jednou z nejdůležitějších aplikací je předpověď chování znečišťujících příměsí v atmosféře. Samozřejmě, že z hlediska lidské populace je třeba toto imisní zatížení co nejvíce minimalizovat. Odhadnout toto chování je velmi obtížné, zvláště v podmínkách odpovídajících naší republice. Kopcovitý, silně členitý terén znemožňuje jednoduché odhady založené zpravidla na velkých zjednodušeních ohledně oblasti řešení.

Předpověď parametrů proudění používá v současné době dvě základní metody. Jsou to fyzikální modelování a matematické modelování. Přímá měření ve volné atmosféře jsou díky velkým měřítkům a většinou obtížně definovatelným parametrům, za kterých probíhá, velmi vzácná, drahá a málo účinná.

Fyzikální modelování používá geometricky podobné modely ve větrných tunelech, vodních kanálech a jiných technických zařízeních, kde je snaha dosáhnout dynamicky similaritní situace jako v reálné atmosféře. To je sice díky velkým měřítkům oblasti, vysokým Reynoldsovým číslům a dalším obtížím problematické a drahé, ale donedávna to byla v podstatě jediná schůdná cesta k modelování MVA.

Matematickým modelováním rozumíme metody založené na řešení základních rovnic popisujících proudění a dispersi příměsí. Ovšem analytické řešení těchto rovnic je na dnešní úrovni znalostí nemožné. Veškerá analytická řešení jsou tedy provedena na základě silně zjednodušujících předpokladů a poskytují tak v reálné situaci pouze velmi hrubý odhad. Naproti tomu numerické řešení, které je závislé na rozvoji výpočetní techniky, prožívá nyní veliký rozvoj a stává se základním prostředkem modelování MVA.

Matematický popis dějů v mezní vrstvě atmosféry je velmi obtížný. Jedná se o turbulentní proudění při velmi vysokých Reynoldsových číslech, řádově $10^7 - 10^8$, ovšem stále ještě s důležitými vazkými efekty. Velký vliv na tyto děje má tvar terénu a s ním spojené efekty, jako odtržení proudu, zpětné proudění atd. i termodynamické parametry, jako je např. stabilita atmosféry.

To jsou důvody, které nás vedly k vytvoření nového modernějšího matematického modelu. Model je založen na řešení tzv. RANS - středovaných Navierových-Stokesových rovnic. Tyto rovnice umožňují řešit parametry proudového pole nad komplexním povrchem při různých parametrech teplotního zvrstvení. Tento systém je doplněn o transportní rovnice popisující šíření pasivních příměsí. Uzávěr tohoto systému rovnic je proveden algebraickým modelem turbulence. Nejsou zde uvažovány chemické reakce. Pro numerické řešení je zvolena metoda konečných objemů, ve spojení s metodou umělé stlačitelnosti a explicitní Rungeovou-Kuttovou metodou.

Práce je rozdělena do několika částí. Po všeobecném úvodu jsou ve druhé kapitole odvozeny základní rovnice popisující proudění v MVA. Je zde také diskutován problém uzávěru a navržen jednoduchý algebraický model turbulence. Následující kapitola je věnována jednoduchým modelovým případům rovnic v jedné prostorové dimenzi. Uvažujeme zde rovnici s konvekcí a rovnici s konvekcí a difuzí. Odvodili jsme modifikované rovnice pro případ časové diskretizace provedené dopřednou diferencí nebo Rungeovou-Kuttovou metodou a v prostoru s diskretizací centrální diferencí. Zároveň je diskutována stabilita těchto metod a stabilita R-K metod pro koercivní operátory. Ve čtvrté kapitole je úvodní část věnována krátkému přehledu o metodě umělé stlačitelnosti a metodě konečných objemů a dále je zde vlastní odvození našeho numerického schématu ve 3D. Pátá kapitola je věnována prezentaci výsledků a získané poznatky jsou diskutovány v kapitole poslední.

1 Matematický model

V úvodu kapitoly jsou rozebrány hlavní obtíže, se kterými se setkáváme při modelování MVA. Dále jsou uvedeny různé metody středování veličin. Složitost turbulentního proudění je tak velká, že popis proudění ve všech bodech prostoru a času není v současné době možný. Skutečné proudění má velmi nepravidelný, náhodný charakter. Proto se používají různé metody, jak jej zjednodušit. My předpokládáme - podle Reynoldse (1885), že každý proces $s(x, t)$ může být rozložen na dvě části. První část - hlavní nebo střední \bar{s} a druhou - rychle se měnící, turbulentní složku neboli fluktuaci s' .

V MVA se používají tři základní souřadné systémy. Jsou to absolutní souřadná soustava, standardní soustava, která je pevně spojená se Zemí a její osy x, y leží v rovině tečné k zemskému povrchu a osa z je kolmá k horizontální rovině, a konečně přirozená. Ta vznikne tak, že kladný směr osy x ztotožníme se směrem rychlosti horizontálního proudění, osu y volíme v horizontální rovině, kolmou k x a vertikální osa je totožná s vertikální osou standardní soustavy.

1.1 Základní rovnice MVA

Dění v atmosféře je popsáno základními zákony mechaniky a termodynamiky. Mezi základní rovnice popisující dění v MVA patří:

- rovnice kontinuity - popisuje zákon zachování hmoty
- Navierovy-Stokesovy rovnice - popisují zákon zachování hybnosti
- stavová rovnice plynu
- rovnice energie nebo enthalpie - popisují zákon zachování energie

Tento základní systém rovnic popisuje časovou a prostorovou závislost neznámých - tlaku, složek rychlosti, energie, teploty - popisujících dění v MVA. V této práci neuvažujeme obsah vodních par v atmosféře ani chemické procesy v ní probíhající.

- Rovnice kontinuity.
Proudění v MVA lze považovat za nestlačitelné, proto se používají buď anelastický tvar

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

nebo tvar rovnice kontinuity pro nestlačitelné proudění

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2)$$

Po rozložení rychlostí na střední a flukтуаční složku dostáváme rovnice

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

- Navierovy-Stokesovy rovnice

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = -g\delta_{i3} - 2\Omega_0\epsilon_{ijk}h_j\bar{u}_k - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (4)$$

Zde ν je koeficient dynamické viskozity a τ je tzv. Reynoldsův tenzor napětí daný vztahem

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -\overline{u'u'} & \tau_{xy} &= -\overline{v'u'} & \tau_{xz} &= -\overline{w'u'} \\ \tau_{yx} &= -\overline{u'v'} & \tau_{yy} &= -\overline{v'v'} & \tau_{yz} &= -\overline{w'v'} \\ \tau_{zx} &= -\overline{u'w'} & \tau_{zy} &= -\overline{v'w'} & \tau_{zz} &= -\overline{w'w'} \end{aligned} \quad (5)$$

- Stavová rovnice ideálního plynu

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T} \quad (6)$$

Většinu dějů v atmosféře lze považovat za adiabatické. Pro tyto děje platí

$$\frac{p^\kappa}{T} = konst$$

Tento výraz nám také umožňuje zavést tzv. potenciální teplotu vztahem

$$\Theta \equiv T \left(\frac{p}{p_r} \right)^{-\frac{R}{c_p}} = T \left(\frac{p_r}{p} \right)^\kappa \quad (7)$$

Je to vlastně teplota, kterou by měl uvažovaný plyn po adiabatické kompresi nebo expanzi na referenční tlak $p_r = 10^5 Pa$.

- Rovnice energie, ve tvaru rovnice pro střední hodnotu potenciální teploty

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} = -\frac{\partial(\overline{u'_j \Theta'})}{\partial x_j} + K_T \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial x_j^2} + \frac{1}{c_p \rho} \frac{\partial \bar{R}_j}{\partial x_j} \quad (8)$$

1.2 Algebraický model turbulence

Systém základních rovnic, popsany v předchozí kapitole, však není uzavřený. Při odvození RANS se v rovnicích objevily druhé momenty rychlostí v Reynoldsově tenzoru. Je tedy třeba aproximovat neznámé momenty pomocí známých veličin. Nejjednodušší z turbulentních modelů jsou tzv. algebraické modely turbulence. Tyto modely jsou obvykle založeny na Boussinesquově - Prandtlově teorii turbulentního přenosu hybnosti. My používáme jednu z variant algebraického modelu, použitou poprvé Blackadarem. V tomto případě, pro Reynoldsův tenzor můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_T \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_T \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) & \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_T \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) & \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_T \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) & \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_T \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) & \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_T \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

kde

$$\nu_T = l^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \mathcal{G}. \quad (10)$$

Zde funkce \mathcal{G} je dána v případě stabilního zvrstvení

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= (1 + \beta Ri)^{-2} & \text{pro } Ri > 0 \\ \mathcal{G} &= (1 - \beta Ri)^2 & \text{pro } Ri \leq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Zde β je konstanta (≈ 3) a Ri je tzv. Richardsonovo číslo

$$Ri \equiv \frac{g}{\bar{\Theta}} \frac{\partial \bar{\Theta} \partial z}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2}. \quad (12)$$

1.3 Transportní rovnice pro pasivní příměsi

Tento základní systém rovnic doplňujeme ještě o transportní rovnici popisující šíření pasivních příměsí

$$\frac{\partial(\rho C)}{\partial t} + \frac{\rho C u_i}{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho D \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) + \rho f \quad (13)$$

2 Numerický model pro 1D rovnice

V této kapitole se zabýváme modelovými případy 1D lineárních rovnic. Byly zde odvozeny modifikované rovnice pro rovnici s konvekcí

$$u_t + a u_x = 0, \quad a \in R - \{0\} \quad (14)$$

a rovnici s konvekcí a difuzí

$$u_t + a u_x = \nu u_{xx}, \quad a \in R, \quad \nu > 0 \quad (15)$$

pro případ různých numerických schémat.

2.1 Rovnice s konvekcí

Diskretizujeme-li rovnici (14) následujícím způsobem

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad (16)$$

dostaneme modifikovanou rovnici s přesností do třetího řádu v následujícím tvaru

$$u_t + a u_x = -a^2 \frac{\Delta t}{2} u_{xx} - \frac{a \Delta x^2}{6} (1 + 2a^2 \gamma^2) u_{xxx}. \quad (17)$$

Zde ještě předpokládáme ekvidistantní dělení a konstantní poměr časového a prostorového kroku $\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Z koeficientů této modifikované rovnice je okamžitě zřejmé, že dané schéma je nestabilní. Stabilní schéma můžeme vytvořit např. použitím zpětné časové difference, nebo přidáním členu umělé disipace.

2.2 Rovnice s konvekcí a difuzí

Rovnici (15) diskretizujeme následujícím způsobem

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (18)$$

Potom modifikovaná rovnice má tvar

$$\begin{aligned} u_t + au_x - \nu u_{xx} &= -a^2\gamma \frac{\Delta x}{2} u_{xx}(x_i, t_i) + a\Delta x \left(\nu\gamma - a\gamma^2 \frac{\Delta x}{3} - \frac{\Delta x}{6} \right) u_{xxx}(x_i, t_i) \\ &- \nu\Delta x \left(-\frac{1}{2}\nu\gamma + a^2\gamma^2\Delta x + \frac{\Delta x}{24} \right) u_{xxxx}(x_i, t_i) - a\nu^2\gamma^2\Delta x^2 u_{xxxxx}(x_i, t_i) \\ &+ \nu^3\gamma^2 \frac{\Delta x^2}{3} u_{xxxxx}(x_i, t_i) \end{aligned} \quad (19)$$

Z koeficientu u druhé derivace dostáváme nutnou podmínku stability

$$\Delta t \leq \frac{2\nu}{a^2} \quad (20)$$

a koeficient u třetí derivace (vypovídající o dispersi schématu) bude kladný pro

$$\left| \Delta t - \frac{3\nu}{2a} \right| < \frac{3}{2a} \sqrt{\nu^2 - \frac{2}{9}a\Delta x^2}$$

Z von Neumanovy analýzy stability tohoto schématu dostáváme podmínky

$$0 \leq \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \Delta t \leq \frac{2\nu}{a^2} \quad (21)$$

2.3 Rungeovy-Kuttovy metody

V předchozím odstavci byla časová derivace nahrazována dopřednou časovou diferencí. V našich výpočtech ovšem užíváme jednu z modifikací Rungeovy-Kuttovy metody. Obecný tvar m-stupňové R-K metody můžeme zapsat ve formě

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n \\ u^{(2)} &= u^n + \Delta t\alpha_2 L(u^{(1)}) \\ u^{(3)} &= u^n + \Delta t\alpha_3 L(u^{(2)}) \\ &\vdots \\ u^{(m)} &= u^n + \Delta t\alpha_r L(u^{(m-1)}) \\ u^{n+1} &= u^n + \Delta t \sum_{k=1}^m \beta_k L(u^{(k)}) \end{aligned} \quad (22)$$

V našich výpočtech používáme modifikaci s koeficienty

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad \beta_3 = 1$$

tedy metodu

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n \\ u^{(2)} &= u^n + \frac{1}{2}\Delta t L(u^{(1)}) \\ u^{(3)} &= u^n + \frac{1}{2}\Delta t L(u^{(2)}) \\ u^{n+1} &= u^n + \Delta t L(u^{(3)}) \end{aligned} \tag{23}$$

která je druhého řádu přesnosti.

2.3.1 Rovnice s konvekcí (RK metody)

Diskretizujeme-li rovnici (14) v prostoru opět pomocí centrální diference a v čase výše popsanou R-K metodou, dostaneme modifikovanou rovnici s přesností do třetího řádu v následujícím tvaru

$$u_t + au_x = -\frac{a\Delta x^2}{12} (a^2\gamma^2 + 2) u_{xxx}. \tag{24}$$

Srovnáme-li tuto rovnici s rov.(17), je na první pohled zřejmý podstatný rozdíl. Při aproximaci časové derivace pomocí R-K3 se v modifikované rovnici nevyskytuje difuzní člen u_{xx} , a tak se ve schématu vyskytuje pouze vazkost vyšších řádů. V rovnici přibyl pouze dispersní člen. Znaménko tohoto členu je vždy opačné, než znaménko a . Z toho lze usoudit, že např. pro $a > 0$ bude numerická rychlost šíření oscilací menší než a , a tedy případné oscilace se projeví před rázem.

2.3.2 Rovnice s konvekcí a difuzí (RK metody)

Rovnici (15) diskretizujeme následujícím způsobem: konvektivní člen pomocí první centrální diference, difuzní člen druhou centrální diferencí a časovou derivaci opět třístupňovou R-K metodou. Potom má modifikovaná rovnice tvar

$$\begin{aligned} u_t + \alpha_3 au_x - \alpha_3 \nu u_{xx} &= \frac{1}{12}\Delta x \nu (\Delta x a^2 \gamma^2 + 4a\gamma - \Delta x) u_{xxx} \\ &+ \frac{1}{12}\Delta x^2 \nu (7a^2 \gamma^2 - \nu) u_{xxxx} - \frac{7}{12}\Delta x^2 a \nu^2 \gamma^2 u_{xxxxx} + \frac{1}{12}\Delta x^2 \nu^3 \gamma^2 u_{xxxxx} \end{aligned} \tag{25}$$

Vidíme nyní, že u členu u_{xx} je pouze fyzikální koeficient $\nu > 0$ a u členu šestého řádu je také kladný koeficient. U členu čtvrtého řádu lze snadno vhodnou volbou Δt dosáhnout záporného koeficientu. Tím jsou splněny postačující podmínky dobré podmíněnosti úlohy pro modifikovanou rovnici a tedy nutné podmínky pro stabilitu schématu.

Lze také snadno ukázat, že pro

$$\gamma < \frac{-2}{\Delta x a} \left(1 - (-1)^{\text{sgn}(a)} \sqrt{1 + \frac{\Delta x^2}{4}} \right)$$

je koeficient u u_{xxx} záporný a numerická rychlost šíření oscilací bude menší než a , a tedy případné oscilace se projeví před rázem.

2.3.3 Stabilita Rungeových-Kuttových metod

V této kapitole se zabýváme hlavně silnou stabilitou pro koercivní operátory. Uvažujme R-K aproximaci negativně-definitivního problému

$$u_t = Lu, \quad \Re(Lx, x) \leq 0 \quad \forall x \in C^N \quad (26)$$

a necht' $\Re(Lx, x)$ splňuje podmínku koercivity s nějakou kladnou konstantou $\eta > 0$, tj

$$\Re(Lx, x) \leq -\eta \|Lu\|^2$$

Za těchto předpokladů je dokázáno následující tvrzení:

Věta: Uvažujme dobře podmíněný problém (26) s koercivním operátorem L . Potom R-K metoda (23) je silně stabilní při CFL podmínce

$$\Delta t \leq \frac{4}{22} \eta$$

Následně je tato věta aplikována na obecnou rovnici s konvekcí a difuzí (v d prostorových dimenzích).

$$u_t = \sum_{i=1}^d A_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(Q_{i,j}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + B(x, t)u$$

kde $A_i \in C^1$ je symetrická konvektivní matice a $Q_{i,j} \in C^1$ je symetrická difuzivní matice

$$(Q\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^d (Q_{i,j} \xi_i, \xi_j) \geq q |\xi|^2$$

Aproximujeme-li nyní tuto soustavu rovnic stejným způsobem jako v předchozích případech, tedy konvektivní členy první a difuzivní druhou centrální diferencí, dostáváme podmínku silné stability ve tvaru

$$\Delta t \leq \frac{4}{22} \frac{q}{\left(A_m + \frac{2Q}{\Delta x}\right)^2}$$

kde $A_m = \max_i |A_i|$ a $Q = \sum_i \max_j |Q_{i,j}|$.

3 Numerický model pro 3D případ

V této kapitole jsou uvedeny metody používané při konstrukci našeho numerického schématu. Jsou to metoda umělé stlačitelnosti a metoda konečných objemů. Dále je popsána vlastní konstrukce schématu.

Východním systémem je systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic pro vazké nestlačitelné stacionární proudění v přirozené souřadné soustavě, popsany v první kapitole. Tento systém řešíme metodou časového ustalování ve spojení s metodou umělé stlačitelnosti. Dostáváme tedy systém

$$\mathbf{P}\mathbf{W}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y + \mathbf{H}_z = [(k\mathbf{R})_x + (k\mathbf{S})_y + (k\mathbf{T})_z] + \mathbf{f} \quad (27)$$

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{vmatrix} 0 \\ -2w\Omega_0 \cos\varphi + 2v\Omega_0 \sin\varphi \\ -2u\Omega_0 \sin\varphi \\ 2u\Omega_0 \cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{vmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{vmatrix} u \\ u^2 + p \\ uv \\ uw \end{vmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{vmatrix} v \\ vu \\ v^2 + p \\ vw \end{vmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{vmatrix} w \\ wv \\ wv \\ w^2 + p \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} 0 \\ u_x \\ v_x \\ w_x \end{vmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{vmatrix} 0 \\ u_y \\ v_y \\ w_y \end{vmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{vmatrix} 0 \\ u_z \\ v_z \\ w_z \end{vmatrix}$$

Po integraci přes kontrolní objem dostáváme soustavu diferenciálních rovnic

$$\frac{dW_i}{dt} = -\mathbf{L}W_i \quad (28)$$

kde

$$\mathbf{L}W_i = \iiint_{\Omega_i} (F_x + G_y + H_z) d\Omega - \iiint_{\Omega_i} ((kR)_x + (kS)_y + (kT)_z + f) d\Omega$$

Na výpočet integrálů vystupujících v $\mathbf{L}W_i$ použijeme Greenovu větu

$$\begin{aligned}
-\mathbf{L}W_i &= - \iint_{\partial\Omega_i} (F - kR)ndydz - \iint_{\partial\Omega_i} (G - kS)ndxdz \\
&\quad - \iint_{\partial\Omega_i} (H - kT)ndxdy + f_i \\
&= - \sum_{l \in K_i} (\tilde{F}_{l,i} - k\tilde{R}_{l,i})Sx_l - \sum_{l \in K_i} (\tilde{G}_{l,i} - k\tilde{S}_{l,i})Sy_l - \sum_{l \in K_i} (\tilde{H}_{l,i} - k\tilde{T}_{l,i})Sz_l
\end{aligned}$$

kde n je vektor vnější normály a veličiny označené vlnovkou jsou aproximace toků na jednotlivých stěnách objemu Ω_i . Sx_l, Sy_l, Sz_l jsou plochy průmětů l -té stěny do rovin kolmých k osám x, y, z a K_i je množina indexů buněk sousedících s buňkou i . V našem případě užíváme strukturovanou síť s buňkami ve tvaru šestistěnů, a pro výpočet derivací na stěnách primární sítě duální síť s buňkami ve tvaru osmistěnů. Vrcholy buněk duální sítě jsou ve vrcholech a středech buněk sítě primární.

Pro řešení soustavy ODR (28) byla zvolena třístupňová R-K metoda ve tvaru

$$\begin{aligned}
W_{i,j,k}^{(0)} &= W_{i,j,k}^n \\
W_{i,j,k}^{(r+1)} &= W_{i,j,k}^{(0)} - \alpha_{(r)} \Delta t \tilde{\mathbf{L}}W_{i,j,k}^{(r)} \\
W_{i,j,k}^{n+1} &= W_{i,j,k}^{(m)} \\
&\quad (r = 0, \dots, m-1)
\end{aligned} \tag{29}$$

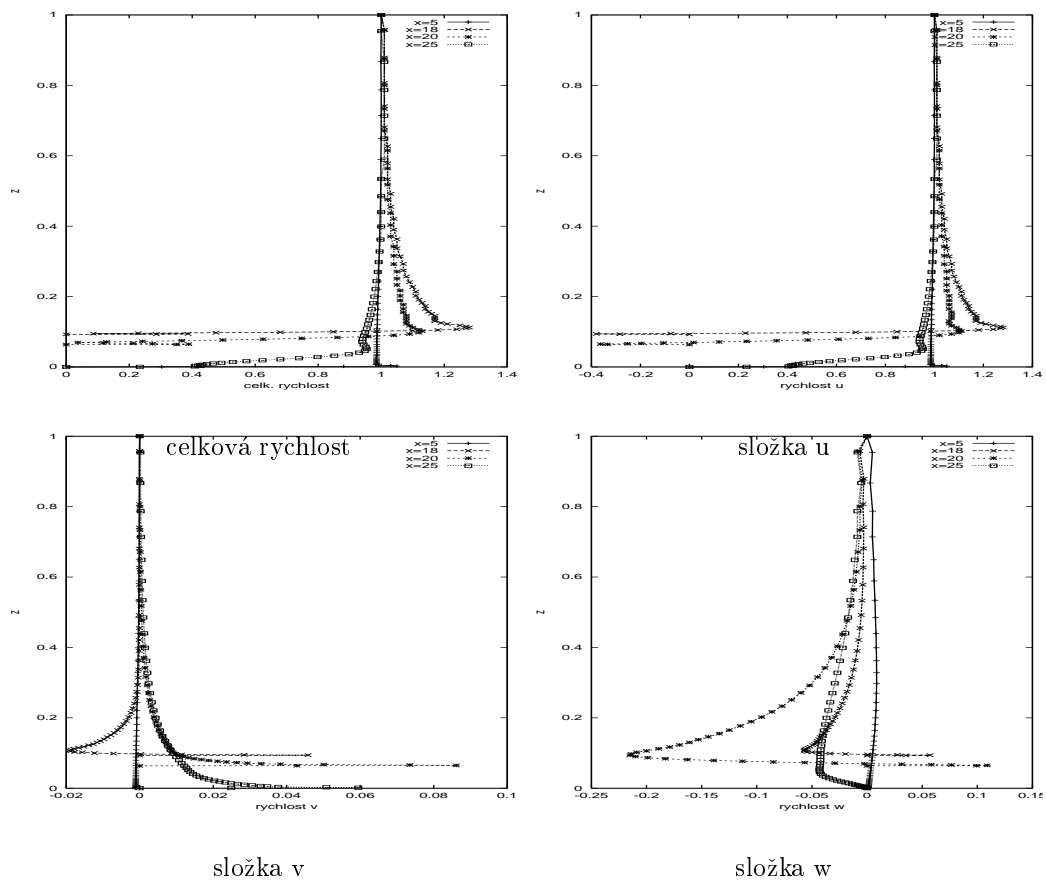
kde $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = 1/2, \alpha_3 = 1$ a

$$\tilde{\mathbf{L}}W_{i,j,k}^r = \mathbf{L}W_{i,j,k}^r + \mathbf{D}W_{i,j,k}^r \tag{30}$$

kde $\mathbf{L}W_{i,j,k}$ je popsáno výše a $\mathbf{D}W_{i,j,k}$ je člen umělé disipace. Člen umělé disipace je Jamesonova typu ve tvaru směsi druhých a čtvrtých derivací s koeficienty závislými na druhé derivaci tlaku.

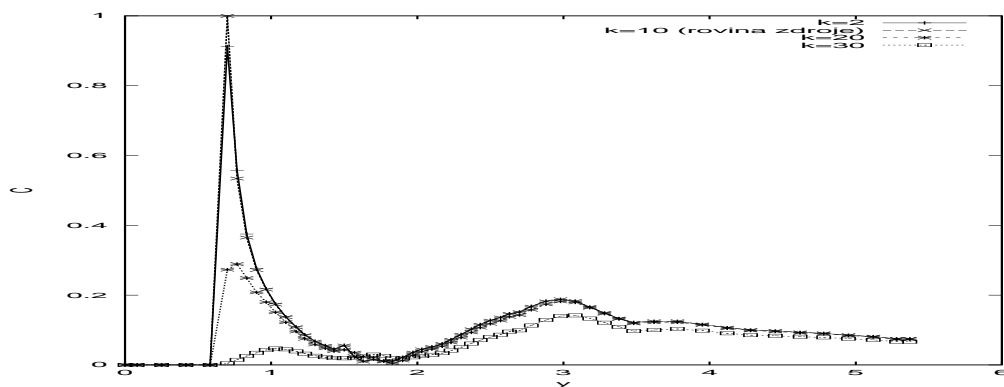
4 Numerické výsledky

V této kapitole jsou prezentovány některé dosažené numerické výsledky. Výpočty byly provedeny pro široký rozsah Reynoldsových čísel $Re \in (10^6, 8.5 \times 10^8)$ a pro různé testovací geometrie. Nejjednodušší byla oblast o rozměrech $5.6 \times 2 \times 1$ km s jedním kopcem o výšce $\frac{1}{10}$ celkové výšky oblasti. Tato geometrie byla počítána jak bez Coriolisovy síly, tak i s ní. V obou případech bylo pozorováno za kopcem odtržení, které pak hrálo důležitou roli při výpočtu rozložení znečišťující příměsi.



Obrázek 1: Rozložení rychlostí v závislosti na výšce v různé vzdálenosti od vstupu pro $j=15$. Bez Coriolisovy síly.

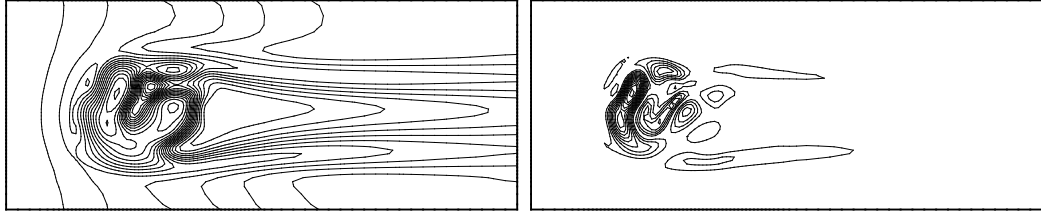
Pro toto proudové pole bylo spočítáno rozložení pasivní příměsi. Byl testován také vliv výšky zdroje.



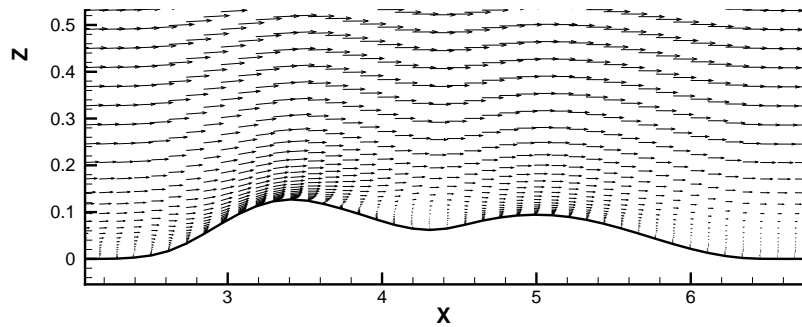
Obrázek 2: Koncentrace v závislosti na vzdálenosti od zdroje v různých výškách pro zdroj ve výšce $k=10$.

Jedním z důležitých poznatků, které z těchto simulací vyplynuly je, že hodnota koncentrace za překážkou nezávisí zdaleka tolik na výšce zdroje, jako na charakteru proudění za překážkou.

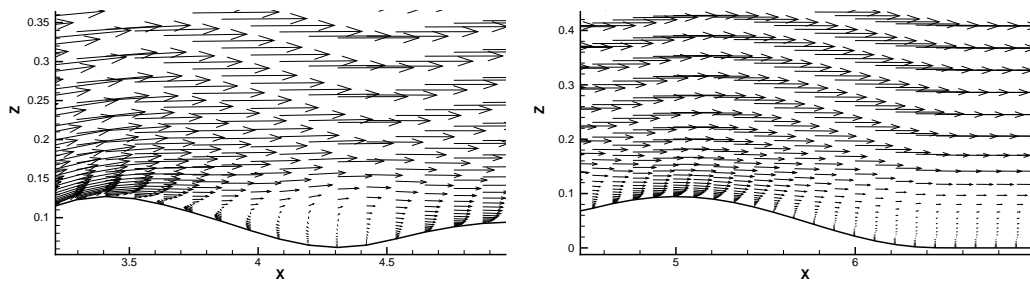
Dalším testovacím případem byla komplexní geometrie se skupinou kopců, která se svým charakterem blíží reálné situaci. Z výpočtu je vidět, že charakter proudění je již natolik komplikovaný, že jeho odhad na základě zjednodušujících předpokladů by byl velmi nepřesný. Výpočet pro $Re=6.67 \times 10^7$.



Obrázek 3: Rozložení celkové rychlosti (vlevo) a složky w (vpravo) ve výšce $k=15$.



Obrázek 4: Řez xz , $j=24$. Místo se dvěma rozdílnými kopcí, celkový pohled.



za 1. kopcem

za 2. kopcem

Obrázek 5: Detail odtržení za dvěma po sobě následujícími překážkami.

5 Závěr

Prezentované výsledky ukazují použitelnost našeho modelu pro predikci proudových polí a disperse znečišťujících příměsí nad širokým spektrem povrchů. Tyto výsledky zároveň ukazují mnoho charakteristických vlastností modelu.

- Ukazuje se nutnost použití velmi hustých sítí u zemského povrchu. Díky velmi vysokým Reynoldsovým číslům se většina důležitých věcí odehrává v těsné blízkosti zemského povrchu.
- Z hlediska kvantitativního je velmi důležité přesné rozřešení situace zvláště za terénními překážkami. To vede k potřebě zhuštění sítí v těchto místech. Dalším důležitým krokem pro správné vyřešení této situace by mělo být použití různých modelů turbulence.
- Předpoklad Gaussovského rozptylu, který uspokojivě funguje nad hladkým terénem se ukazuje jako zcela zavádějící již v případě jednoho kopce. Výsledky získané takovýmto jednoduchým modelem mohou být značně podhodnocené a mohou vést k nesprávným závěrům.
- Ukázalo se, že koncentrace příměsí v oblasti za překážkou více závisí na charakteru proudění, než na poloze zdroje.
- Navržené numerické schéma se ukázalo jako dostatečně robustní. Velkým omezením se ovšem ukázala volba explicitního schématu. Díky potřebě velmi hustých sítí je časový krok velmi malý a jeví se jako výhodnější použít schématu semiimplicitního nebo implicitního.
- Numerické experimenty potvrdily nutnost použití přídavného tlumícího členu a vhodnost jeho volby ve tvaru navrženém Jamessonem.
- Ukazuje se, že pro model středních měřítek nelze zanedbat efekty způsobené Coriolisovou silou.
- Velkou pozornost bude ještě třeba věnovat volbě okrajových podmínek. Zvláště vhodné by asi bylo propojení tohoto modelu s modelem velkých měřítek.

Všechny výše uvedené postřehy ukazují vhodnost tohoto modelu k predikci proudových polí a rozptylových podmínek nad realistickým terénem. Použité numerické schéma se ukazuje jako dostatečně robustní pro praktické aplikace.

Reference

- [1] J. Bednář and O. Zikmunda. *Fyzika mezní vrstvy atmosféry*. Academia, Praha, 1985.
- [2] L. Beneš, T. Bodnár, Ph. Fraunie, K. Kozel, Z. Jaňour, and I. Sládek. Solution of atmospheric boundary layer flows with transport of polutions. In *TRANSFER*, Brno, 1999. VUT Brno.
- [3] L. Beneš, Ph. Fraunie, K. Kozel, Z. Jaňour, and I. Sládek. Mathematical modelling and numerical solution of 3d atmospheric boundary layer. In *Topical Problems of Fluid Mechanics*, Praha, 1999. ÚT ČSAV.
- [4] L. Beneš, M. Hrušová, and K. Kozel. Computation of 3d incompressible steady laminar viscous flows. *Inženýrská mechanika*, 5(4):283–290, 1998.
- [5] L. Beneš, Z. Jaňour, K. Kozel, and I. Sládek. Mathematical modelling and numerical solution of atmospheric boundary layer. In *Euler and Navier-Stokes Equations '98*, Prague, 1998.
- [6] L. Beneš, K. Kozel, and I. Sládek. Numerické řešení proudění v mezní vrstvě atmosféry. In *Aktuální problémy mechaniky tekutin '98*, Praha, 1998. UTČSAV.
- [7] L. Beneš, K. Kozel, and I. Sládek. Numerical solution of atmospheric boundary layer flows. In *GAMM 99*, Metz, 1999.
- [8] Miloslav Feistauer. *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*. Longmann Scientific & Technical, 1993.
- [9] G. P. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*, volume I,II. Springer Verlag, 1992.
- [10] J. R. Garratt. *The Atmospheric Boundary Layer*. Cambridge University Press, 1992.
- [11] Ch. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*, volume 1,2. John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [12] T. Hůlek, M. Huněk, and K. Kozel. Numerical solution of euler and navier-stokes equations for 2d transonic problems. In W. Kordulla Ch. Hirsch, J. Périanx, editor, *First European Computational Fluid Dynamics Conference*, volume 1, pages 61–68, Brusel Belgie, 1992. Elsevier Science Publisher D.V., Amsterodam.

- [13] Z. Jaňour. Matematické modelování šíření exhalací v atmosféře. Výzkumná zpráva ÚT AVČR, Praha, 1995.
- [14] Z. Jaňour. Matematické modelování komplikovaného proudění. Výzkumná zpráva ÚT AVČR, Praha, 1996.
- [15] R. J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.
- [16] D. Levy and E. Tadmor. From semi-discrete to fully-discrete: Stability of runge-kutta schemes by the energy method. *SIAM Revue*, 40(1), 1998.