



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

**Fakulta strojní
Ústav technické matematiky**

**Numerické řešení dvourozměrného transsonického
turbulentního proudění**

**Numerical solution of two dimensional transonic
turbulent flow**

Disertační práce

Doktorský studijní program: kombinovaná forma
Studijní obor: Matematické a fyzikální inženýrství

Školitel: *prof. RNDr. Karel Kozel, DrSc.*

Ing. Martin Slouka

Praha 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou disertační práci vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pod odborným vedením mého školitele prof. RNDr. Karla Kozla, DrSc.

V Praze, dne 22. 9. 2016

Ing. Martin Slouka

Copyright©2016, Martin Slouka

All Rights Reserved

Abstract

Title: Numerical solution of two dimensional transonic turbulent flow

Key words: CFD, inviscid and viscous compressible flow, transonic flow, turbulent flow, Euler equations, averaged Navier-Stokes equations, RANS, finite volume method, MacCormack numerical scheme, artificial dissipation, Jameson model, algebraic Baldwin-Lomax model, extended Wilcox k-omega model, SST k-omega model.

The work deals with the numerical simulations of the two dimensional inviscid and viscous compressible flow in the internal aerodynamics. The high Reynolds numbers are considered and the model of turbulence is used in a case of viscous flow. The turbulent flow is modeled by the system of the averaged Navier-Stokes equations completed by the proper model of the turbulence, the algebraic Baldwin-Lomax model, or the two equations k-omega model according to Wilcox 2006 and in the SST modification. The aim is to develop the own numerical solver that will be enable to solve the mentioned simulations with the sufficient precision and that could be used for the analogical solutions of the complex problems. A numerical solution is based on the finite volume method and a discretization is done by the explicit scheme according to MacCormack which is completed by Jameson model of the artificial dissipation. The developing software is tested on the geometry of the GAMM channel and for the selected cases of the flow through the DCA blade cascade. The results are discussed and compared with the other authors and in a case of the DCA blade cascade also with the experimental data.

Anotace

Název: Numerické řešení dvourozměrného transsonického turbulentního proudění

Klíčová slova: CFD, proudění nevazké a vazké stlačitelné tekutiny, transsonické proudění, turbulentní proudění, Eulerovy rovnice, středované Navier-Stokesovy rovnice, RANS, metoda konečných objemů, MacCormackovo numerické schéma, umělá vazkost, Jamesonovo tlumení, algebraický Baldwin-Lomaxův model, rozšířený Wilcoxův k-omega model, SST k-omega model.

Práce se zabývá numerickými simulacemi dvourozměrného stlačitelného proudění nevazké a vazké tekutiny ve vnitřní aerodynamice. V případě vazké tekutiny se jedná o vysoká Reynoldsova čísla a modelování turbulence. Turbulentní proudění je modelováno pomocí systému středovaných Navier-Stokesových rovnic doplněných o příslušný model turbulence, algebraický Baldwin-Lomaxův model, nebo dvourovnicový k-omega model turbulence ve variantě podle Wilcoxe 2006 a SST variantě. Cílem je vyvinout vlastní numerický řešič, který bude moci být použit k řešení těchto simulací s dostatečnou přesností a zároveň bude v budoucnu moci být použit pro řešení analogických úloh složitějšího charakteru. Numerické řešení je založeno na metodě konečných objemů a diskretizaci pomocí explicitního schéma v MacCormackově variantě, které je doplněno o umělou vazkost Jamesonova typu. Vyvíjený software je testován na geometrii GAMM kanálu a pro vybrané případy proudění v DCA mříži. Výsledky jsou diskutovány a srovnávány s jinými autory a v případě DCA mříže s experimentálními daty.

Obsah

<i>Prohlášení</i>	2
<i>Abstract</i>	3
<i>Anotace</i>	4
<i>Obsah</i>	5
<i>Seznam vyobrazení</i>	7
<i>Seznam nejdůležitějšího značení</i>	9
1 Úvod	13
1.1 Současný stav problematiky	14
1.2 Cíle práce.....	16
2 Matematické modely	17
2.1 Model nevazkého proudění.....	17
2.2 Model vazkého laminárního proudění.....	18
2.3 Bezrozměrový tvar Navier-Stokesových rovnic.....	20
2.4 Pojem slabého řešení	21
2.5 Okrajové podmínky	23
2.5.1 Systém Eulerových rovnic	23
2.5.2 Systém Navier-Stokesových rovnic	24
3 Turbulentní proudění	26
3.1 Modelování turbulentního proudění.....	27
3.2 Středování veličin proudového pole.....	28
3.3 Rovnice zákona zachování hmotnosti.....	29
3.4 Rovnice zákona zachování hybnosti	30
3.5 Rovnice zákona zachování energie	30
3.6 Uzavření systému středovaných Navier-Stokesových rovnic.....	31

3.7	Modely turbulence.....	32
3.7.1	Algebraický model turbulence podle Baldwina-Lomaxe.....	33
3.7.2	Základní k- ω model	34
3.7.3	Rozšířený k- ω model	36
3.7.4	SST model	37
3.8	Okrajové podmínky pro model k-ω.....	39
4	Numerické řešení.....	41
4.1	Metoda konečných objemů.....	41
4.1.1	Systém Eulerových rovnic	41
4.1.2	Systém Navier-Stokesových rovnic	43
4.2	MacCormackovo numerické schéma.....	43
4.2.1	Systém Eulerových rovnic	43
4.2.2	Systém Navier-Stokesových rovnic	44
4.3	Umělá vazkost.....	46
4.4	Volba časového kroku a stabilita	47
4.5	Konvergence výpočtu.....	47
4.6	Volba sítě	48
4.7	Realizace okrajových podmínek.....	48
5	Výpočet proudění	50
5.1	Proudění v GAMM kanálu	50
5.2	Proudění v DCA mříži	58
5.2.1	Testovací případ A.....	59
5.2.2	Testovací případ B.....	61
5.2.3	Testovací případ C.....	63
5.2.4	Testovací případ D.....	65
6	Závěr	68
7	Poděkování	70
8	Seznam literatury.....	71

Seznam vyobrazení

Obr. 4.1: Konstrukce duální sítě pro buňku D_{ij}	45
Obr. 4.2: Okrajová podmínka pro rychlost na pevné stěně - nevazké proudění.....	48
Obr. 4.3: Okrajová podmínka pro rychlost na pevné stěně - vazké proudění.....	49
Obr. 5.1: Geometrie výpočtové oblasti GAMM kanálu	51
Obr. 5.2: Nevazké proudění v GAMM kanálu, izočáry Machova čísla, $Ma_\infty = 0,675$, sít' 300x120	52
Obr. 5.3: Nevazké proudění v GAMM kanálu, izočáry Machova čísla, $Ma_\infty = 0,675$, sít' 150x50, úplná potenciální rovnice, Slouka [2].....	52
Obr. 5.4: Nevazké proudění v GAMM kanálu, izočáry Machova čísla, $Ma_\infty = 0,675$, sít' 90x30, TVD MacCormackovo schéma Fürst [11]	53
Obr. 5.5: Nevazké proudění v GAMM kanálu, izočáry Machova čísla, $Ma_\infty = 0,675$, sít' 90x30, TVD MacCormackovo schéma v Causonově úpravě Fürst [11].....	53
Obr. 5.6: Nevazké proudění v GAMM kanálu, $Ma_\infty = 0,675$, průběh Machova čísla podél stěn k výpočtu z obr. 5.2	54
Obr. 5.7: Nevazké proudění v GAMM kanálu, $Ma_\infty = 0,675$, průběh Machova čísla podél stěn, úplná potenciální rovnice, Slouka [2].....	54
Obr. 5.8: Nevazké proudění v GAMM kanálu, $Ma_\infty = 0,675$, průběh Machova čísla podél profilu, Fürst [12].....	55
Obr. 5.9: Nevazké proudění v GAMM kanálu, $Ma_\infty = 0,675$, průběh rezidua odpovídající výpočtu z obr. 5.2	55
Obr. 5.10: Vazké proudění v GAMM kanálu, izočáry Machova čísla, $Ma_\infty = 0,675$, $Re = 10^6$, Baldwin-Lomaxův model turbulence	56
Obr. 5.11: Vazké proudění v GAMM kanálu, izočáry Machova čísla, $Ma_\infty = 0,675$, $Re = 10^6$, Wilcoxův $k-\omega$ model turbulence.....	56
Obr. 5.12: Vazké proudění v GAMM kanálu, izočáry Machova čísla, $Ma_\infty = 0,675$, $Re = 10^6$, SST $k-\omega$ model turbulence.....	57
Obr. 5.13: Vazké proudění v GAMM kanálu, $Ma_\infty = 0,675$, průběh rezidua odpovídající výpočtu z obr. 5.12	57
Obr. 5.14: Geometrie výpočtové oblasti DCA mříže	58
Obr. 5.15: Nevazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,850$, $\alpha = 0,5^\circ$	60

Obr. 5.16: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,860$, $\alpha = -0,5^\circ$, $Re = 10^6$, Baldwin-Lomaxův model turbulence	60
Obr. 5.17: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,860$, $\alpha = -0,5^\circ$, $Re = 10^6$, Wilcoxův $k-\omega$ model turbulence	60
Obr. 5.18: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,860$, $\alpha = -0,5^\circ$, $Re = 10^6$, SST $k-\omega$ model turbulence	61
Obr. 5.19: Proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,813$, $\alpha = 0^\circ$, experimentální data	61
Obr. 5.20: Nevazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,920$, $\alpha = -2,0^\circ$	62
Obr. 5.21: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,930$, $\alpha = -2,0^\circ$, $Re = 10^6$, Baldwin-Lomaxův model turbulence	62
Obr. 5.22: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,930$, $\alpha = -2,0^\circ$, $Re = 10^6$, Wilcoxův $k-\omega$ model turbulence	62
Obr. 5.23: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,930$, $\alpha = -2,0^\circ$, $Re = 10^6$, SST $k-\omega$ model turbulence	63
Obr. 5.24: Proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,849$, $\alpha = 0^\circ$, experimentální data	63
Obr. 5.25: Nevazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,010$, $\alpha = 0^\circ$	64
Obr. 5.26: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,020$, $\alpha = 0^\circ$, $Re = 10^6$, Baldwin-Lomaxův model turbulence	64
Obr. 5.27: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,020$, $\alpha = 0^\circ$, $Re = 10^6$, Wilcoxův $k-\omega$ model turbulence	64
Obr. 5.28: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,020$, $\alpha = 0^\circ$, $Re = 10^6$, SST $k-\omega$ model turbulence	65
Obr. 5.29: Proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,946$, $\alpha = 0^\circ$, experimentální data	65
Obr. 5.30: Nevazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,130$, $\alpha = 0^\circ$	66
Obr. 5.31: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,135$, $\alpha = 0^\circ$, $Re = 10^6$, Baldwin-Lomaxův model turbulence	66
Obr. 5.32: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,135$, $\alpha = 0^\circ$, $Re = 10^6$, Wilcoxův $k-\omega$ model turbulence	66
Obr. 5.33: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,135$, $\alpha = 0^\circ$, $Re = 10^6$, SST $k-\omega$ model turbulence	67
Obr. 5.34: Proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,073$, $\alpha = 0^\circ$, experimentální data	67

Seznam nejdůležitějšího značení

Symboly

c	rychlost zvuku	$[\text{ms}^{-1}]$
c_p	měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku	$[\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}]$
c_v	měrná tepelná kapacita při konstantním objemu	$[\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}]$
C	konstanta	[1]
C_0^1	prostor diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem	[1]
CFL	Courant-Friedrichs-Lewyho číslo	[1]
$D_{i,j}$	výpočetní buňka	[1]
e	vnitřní energie	$[\text{Jkg}^{-1}]$
F	spojovací funkce	[1]
\mathbf{F}	vektor nevazkého toku ve směru x	[1]
\mathbf{G}	vektor nevazkého toku ve směru y	[1]
h	měrná entalpie	$[\text{Jkg}^{-1}]$
k	turbulentní energie	$[\text{m}^2\text{s}^{-2}]$
L	délkové měřítko	[m]
L^∞	prostor lebesgueovsky integrovatelných funkcí	[1]
\mathbf{n}	jednotkový vektor vnější normály	[1]
p	statický tlak	$[\text{Nm}^{-2}]$
q	tepelný tok	$[\text{Wm}^{-2}]$
\mathbf{R}	vektor vazkého toku ve směru x	[1]
\mathbf{S}	vektor vazkého toku ve směru y	[1]

S_{ij}	tenzor rychlosti deformace	$[s^{-1}]$
u, v	složky vektoru rychlosti	$[ms^{-1}]$
u_τ	třecí rychlost	$[ms^{-1}]$
U_i	vektor rychlosti	$[ms^{-1}]$
w	referenční rychlost	$[ms^{-1}]$
\mathbf{W}	vektor konzervativních proměnných	[1]
t	čas	[s]
T	časový interval, termodynamická teplota	[s], [K]
x, y	kartézské souřadnice	[m]
\mathbf{X}	vektor souřadnic	[m]
Ma	Machovo číslo	[1]
Pr	Prandtlovo číslo	[1]
Pr_t	turbulentní Prandtlovo číslo	[1]
Re	Reynoldsovo číslo	[1]
Re_t	turbulentní Reynoldsovo číslo	[1]
α, β, γ	konstanty	[1]
δ_{ij}	Kroneckerovo delta	[1]
ε	rychlost disipace	$[m^2s^{-3}]$
Φ	obecná veličina	[1]
κ	adiabatický exponent, Kármánova konstanta	[1]
λ	součinitel tepelné vodivosti	$[Wm^{-1}K^{-1}]$
λ_t	turbulentní tepelná vodivost	$[Wm^{-1}K^{-1}]$
μ	dynamická vazkost	$[Nm^{-2}s]$
μ_t	turbulentní dynamická vazkost	$[Nm^{-2}s]$

ν	kinematická vazkost	$[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$
ν_t	turbulentní kinematická vazkost	$[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$
ρ	hustota	$[\text{kgm}^{-3}]$
σ	konstanta	[1]
τ_{ij}	tenzor vazkých napětí	$[\text{Nm}^{-2}]$
ω	specifická rychlost disipace	$[\text{s}^{-1}]$
Π	obecná konstanta	[1]
Ω	výpočtová oblast	[1]
Ω_{ij}	tenzor rychlosti rotace	$[\text{s}^{-1}]$
ψ	funkce tlakové korekce	[1]

Indexy

0	počáteční
loc	lokální
in	vstupní
n	časová vrstva
out	výstupní
t	turbulentní
T	transpozice vektoru
w	na stěně
∞	ve vnějším proudu
$*$	bezrozměrný tvar

1 Úvod

V dnešní době je počítačová simulace proudění tekutin, známá pod zkratkou CFD (Computational Fluid Dynamics), stále více jako nástroj virtuálního světa počítačů užívaná k výpočtům a simulacím problémů proudění v reálném světě lidí. Simulace jako taková přináší s rozvojem počítačů schopnost modelovat stavy a procesy blízké těm reálným, umožňuje při zkoumání povahy a charakteru proudění obtékaných těles vytvářet vizualizace, které by bylo možné v reálném světě získat jen náročnými experimenty, nebo se jednoduše využívá v aplikacích při konstrukci strojů, vozidel, letadel a zařízení užívaných v běžném životě. S pomocí simulací a vizualizací prováděných na virtuálním modelu můžeme získat představu o reálných stavech a procesech reálného systému. Aby bylo možné takové simulace a vizualizace provádět, musíme si být jisti, že modelují reálné stavy a procesy, to znamená, že musíme vytvářet takové virtuální modely, které budou totožné s těmi skutečnými, nebo které je budou vhodně aproximovat.

Definování správného fyzikálního modelu je tedy základním předpokladem úspěšného procesu simulace. Dalším předpokladem je volba vhodného matematického modelu a jeho vyřešení, zde je třeba uvážit možnosti numerického řešení takového modelu a optimalizovat jej s ohledem na náročnost řešení při dosažení požadované přesnosti výsledků. Získané výsledky numerické simulace by pak měly být ve shodě s experimentem. Simulaci, která splní výše uvedené základní předpoklady, lze pak použít pro řešení typově shodných úloh.

Současné komerční programy umožňují řešit komplexní úlohy s odzkoušenými fyzikálními i numerickými modely. Mají propracované uživatelské rozhraní a jednotlivá řešení lze získat bez hlubších znalostí problematiky proudění. Jsou v široké míře využívány v technické praxi. Problém může nastat u řešení specifických úloh, jakými jsou například úlohy s transsonickým prouděním stlačitelné tekutiny ve vnitřní aerodynamice s modelováním turbulentního proudění. Tato práce se právě takovými úlohami zabývá a ukazuje jejich řešení na srovnávacím případě proudění GAMM kanálem a vybranými případy proudění DCA mříží.

Transsonické proudění je charakteristické vysokými rychlostmi blízkými rychlosti zvuku. V proudovém poli se při něm nachází jak podzvukové oblasti, tak nadzvukové oblasti, které jsou navzájem odděleny zvukovou čarou neboli rázovou vlnou. Při proudění

ve vnitřní aerodynamice k takovým stavům může docházet už při podzvukových rychlostech nabíhajícího proudu, jak uvádí Dvořák [1], nebo jak ukazují numerické výpočty uvedené v diplomové práci autora [2]. Takové proudění označujeme za transsonické, zhoršují se aerodynamické vlastnosti, dochází k nespojitostem v proudění a mohou nastat nestabilní režimy. Vždy ovšem záleží na geometrii obtékaného tělesa, při které k takovým stavům dochází. Z technického hlediska si lze představit např. návrh lopatky parní turbíny, obtékání při provozních režimech, a s tím spojené dynamické namáhání vlivem nespojitostí. Je tedy nutné, abychom byli schopni tyto specifické úlohy úspěšně řešit.

1.1 Současný stav problematiky

Numerických simulací proudění tekutin začalo být využíváno k řešení problémů aerodynamiky teprve s rozvojem výpočetní techniky. Zpočátku se jednalo o simulace založené na řešení úplné potenciální rovnice a metodou malých poruch pomocí Laplaceovy rovnice. V nich je třeba přijmout implicitně předpoklady zanedbání disipativních procesů, které jsou způsobeny vazkostí, případně tepelnou vodivostí. Dalším předpokladem je model nevířivého proudění, na jehož základě vektor rychlosti lze vyjádřit jako spojitou skalární funkci polohy, tj. potenciál rychlosti. Zůstává však otevřenou otázkou, jakým způsobem modelovat turbulentní proudění, které je téměř vždy přítomno při obtékání složitějších geometrií vysokými rychlostmi.

Řešením transsonického proudění potenciálními modely se zabývali např. Magnus a Yoshihara [3] nebo Murman a Cole [4]. V průběhu 70. let stále více autorů navazovalo na jejich práce. Jednalo se především o řešení obtékání leteckých profilů, které bylo spojeno s prudkým rozvojem moderních proudových dopravních letadel a nutností řešit rychle komplexní úlohy obtékání spojené s režimy letu a chováním letadel při provezech blízkých rychlostí zvuku a návrhem optimálních podmínek provozu. Nejznámější z nich je práce Jamesona [5] zabývající se trojrozměrným obtékáním šípového křídla nebo zpráva Langleye [6] zabývající se dvourozměrným řešením transsonického obtékání leteckého profilu. Všechny výše uvedené přístupy byly využívány i pro řešení vnitřní aerodynamiky plynů při návrzích energetických strojů. Zmíňme disertační práci Kozla [7], která se zabývá řešením obtékání profilové mříže metodou poruchového potenciálu, a další navazující práce s Poláškem a Vavřincovou [8] a s Rozsypalem [9] rozšířené o úlohy obtékání mříže v kanálu a trojrozměrné modelování obtékání mříže.

Jedna z prvních prací, která se zabývala numerickým řešením transsonického proudění vazké tekutiny, byla práce Deiwerta [10]. Autor v ní představil řešení numerické simulace pro 2D transsonické obtékání vazké stlačitelné tekutiny kolem 18% kruhového profilu pro různé hodnoty Reynoldsových čísel nabíhajícího proudu. Pro numerické řešení bylo použito metody konečných diferencí a neortogonální sítě. Práce jako taková byla po spoustu let brána jako referenční při validaci numerických simulací. Se stále se rozšiřujícími možnostmi výpočetní techniky bylo možné řešit komplexnější typy úloh.

Z množství prací, které během posledních let vznikly, jmenujme práce Fürsta, ve kterých se zabýval řešením vnitřních a vnějších úloh aerodynamiky [11], [12]. V nich byla ukázána použitelnost moderních TVD schémat a jejich modifikací, jejichž vlastnosti byly porovnávány na případu transsonického proudění dvourozměrným kanálem a případy vazkého proudění DCA mříží, avšak pouze pro případ proudění s Reynoldsovým číslem $Re = 6400$. Pro numerickou simulaci v turbínové mříži SE1050 bylo opět ověřeno použití výše uvedených schémat pro případy proudění nevazké a vazké tekutiny. V případě vazkého proudění práce neřešila modelování turbulence, jednalo se pouze o laminární proudění. Práce, jenž se zabývala trojrozměrným prouděním v turbínové mříži, byla práce Dobeše, Fürsta, Fořta, Halamy a Kozla [13]. Turbulentním prouděním nestlačitelné tekutiny se ve své práci zabýval Louda [14]. Řešil v ní dvourozměrné a třírozměrné turbulentní impaktní proudění. Svým pojetím se jedná o práci významného charakteru, protože jsou v ní srovnávány dvouroznicové modely turbulence dnes tolik používané v technické praxi.

V polovině 80. let se na ÚT AVČR zabýval experimentálním měřením transsonického proudění při vysokých rychlostech Dvořák. Jeho publikované výsledky jsou poměrně významné [1]. Jedná se o interferometrická měření rychlostního pole při obtékání 8% DCA mříže pro různé konfigurace vstupních rychlostí a úhlů náběhu. Z dalších jmenujme Šafaříka a kolektiv navazující výzkumem a celou řadou prací na Dvořáka a řešící problematiku transsonického proudění v lopatkových mřížích. Výsledky výpočtů, které jsou uvedené v této práci, jsou srovnávány s výše zmíněnými experimenty provedenými ÚT AVČR.

1.2 Cíle práce

Cílem této práce je vyvinout vlastní numerický řešič pro dvoudimenzionální simulace obtékání profilu pro transsonické proudění nevazké a vazké stlačitelné tekutiny ve vnitřní aerodynamice. V případě nevazkého modelu stlačitelné tekutiny je předmětem řešení systém Eulerových rovnic. V případě modelu vazké stlačitelné tekutiny se řeší systém středovaných Navier-Stokesových rovnic doplněný o model turbulence. Charakter proudění je zúžen pro velmi vysoká Reynoldsova čísla ($\sim 10^6$). Jednotlivé cíle práce lze rozdělit do následujících skupin:

- *Výběr matematického modelu* volbou fyzikálního modelu. S tím souvisí popis modelu pomocí systému parciálních diferenciálních rovnic a příslušných okrajových podmínek úlohy, v případě vazkého proudění včetně způsobu modelování turbulentního proudění.
- *Realizace numerické metody* řešení včetně stanovení vhodných okrajových podmínek. Vývoj vlastního numerického řešiče.
- *Výsledky numerických realizací* proudění pro referenční úlohu proudění GAMM kanálem a numerických realizací proudění skrz DCA mříž, jenž se srovnávají s experimentálními daty. Zde by měla být prokázána dobrá vzájemná korelace, tím validován vyvíjený numerický řešič a prokázána využitelnost této disertační práce pro řešení podobných typů úloh vnitřního proudění.

2 Matematické modely

Proudění tekutin lze popsat třemi základními fyzikálními zákony, zákonem zachování hmoty, hybnosti a energie. Pro případy numerických simulací se uvažují bilanční rovnice pro neměnný kontrolní objem. Zákon zachování hmoty je vyjádřen jako bilance hmoty, kde uvažujeme pouze konvektivní tok hmoty přes kontrolní objem. Zákon zachování hybnosti, tedy druhý Newtonův pohybový zákon, je vyjádřen bilancí hybnosti. Zdrojem složky hybnosti v daném směru je objemová a povrchová síla. Bilance energie je pak vyjádřením prvního zákona termodynamiky, zákona zachování energie. Přírůstek energie materiálového objemu tekutiny se děje vlivem práce vnějších sil a dodávky tepla. Rovnice, které popisují vazké proudění, se nazývají Navier-Stokesovy rovnice. Nevazké proudění lze popsat Eulerovými rovnicemi zanedbáním vlivu vazkosti.

2.1 Model nevazkého proudění

Nevazké dvourozměrné proudění je popsáno systémem Eulerových rovnic v následujícím tvaru

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = 0, \quad (2.1)$$

kde

$$\mathbf{W} = (\rho, \rho u, \rho v, e)^T,$$

$$\mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (e + p)u)^T, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{G} = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (e + p)v)^T,$$

přičemž \mathbf{W} je vektor konzervativních proměnných a \mathbf{F} , \mathbf{G} jsou vektory nevazkých toků. Jednotlivé členy vektorů představují hustotu ρ , složky rychlosti (u, v) v osách x a y , statický tlak p a vnitřní energii e . Systém rovnic (2.1), aby byl úplný, je třeba dále doplnit o stavovou rovnici

$$p = (\kappa - 1) \left[e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right], \quad (2.3)$$

kde κ reprezentuje adiabatický exponent, pro který platí

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}. \quad (2.4)$$

V ideálním plynu jsou měrné tepelné kapacity c_p a c_v konstantní, adiabatický exponent je tedy také konstanta, která pro vzduch nabývá hodnoty $\kappa = 1,4$. Tento model byl autorem použit v pracích [15], [16], [17], [18], [19], [20] a [21].

2.2 Model vazkého laminárního proudění

Vazké dvourozměrné proudění stlačitelné tekutiny je popsáno systémem Navier-Stokesových rovnic v následujícím tvaru

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = \mathbf{R}_x + \mathbf{S}_y, \quad (2.5)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= (\rho, \rho u, \rho v, e)^T, \\ \mathbf{F} &= (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (e + p)u)^T, \\ \mathbf{G} &= (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (e + p)v)^T, \\ \mathbf{R} &= (0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x)^T, \\ \mathbf{S} &= (0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} - q_y)^T. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Porovnáme-li systém Eulerových rovnic (2.1) s výše uvedeným systémem rovnic (2.5), přibýly na pravé straně v případě systému Navier-Stokesových rovnic (2.5) vektory vazkých toků \mathbf{R} a \mathbf{S} . Pro jejich jednotlivé členy pak platí následující rovnice.

Složky tenzoru vazkových napětí τ_{ij} jsou vyjádřeny jako

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \mu \left(\frac{4}{3}u_x - \frac{2}{3}v_y \right), \\ \tau_{xy} &= \mu (u_y + v_x), \\ \tau_{yy} &= \mu \left(\frac{4}{3}v_y - \frac{2}{3}u_x \right).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Tepelný tok \mathbf{q} je charakterizován podle Fourierova zákona rovnicemi

$$\begin{aligned}q_x &= -\lambda T_x, \\ q_y &= -\lambda T_y,\end{aligned}\tag{2.8}$$

kde λ je součinitel tepelné vodivosti a T je termodynamická teplota. Rovnice lze dále za předpokladu výpočtu v ideální plynu, psát ve formě

$$\begin{aligned}\lambda T_x &= \frac{\mu}{Pr} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{p}{\rho} \right)_x, \\ \lambda T_y &= \frac{\mu}{Pr} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{p}{\rho} \right)_y,\end{aligned}\tag{2.9}$$

kde μ je dynamická vazkost, κ reprezentuje adiabatický exponent ze vztahu (2.4) a Pr je Prandtlovo číslo, pro výpočty zpravidla jako konstanta, jejíž hodnota je pro vzduch brána $Pr = 0,7$. Závislost dynamické vazkosti na teplotě lze stanovit pomocí Sutherlandovy rovnice

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S},\tag{2.10}$$

nebo ve zjednodušené formě pomocí Rayleighova vztahu

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/4}.\tag{2.11}$$

Dále v práci bude použito už jen vztahu (2.11). Systém Navier-Stokesových rovnic (2.5) je opět uzavřen stavovou rovnicí (2.3).

2.3 Bezrozměrový tvar Navier-Stokesových rovnic

Účelem této transformace je převést systém Navier-Stokesových rovnic ze vztahu (2.5) do bezrozměrového tvaru vztahením rozměrových veličin na vhodně zvolenou veličinu referenční stejného rozměru, např.

$$\begin{aligned} \rho^* &\rightarrow \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad (u^*, v^*) \rightarrow \frac{(u, v)}{w_\infty}, \quad p^* \rightarrow \frac{p}{\rho_\infty w_\infty^2}, \quad e^* \rightarrow \frac{e}{\rho_\infty w_\infty^2}, \\ (x^*, y^*) &\rightarrow \frac{(x, y)}{L_{ref}}, \quad t^* \rightarrow \frac{t w_\infty}{L_{ref}}, \quad T^* \rightarrow \frac{T}{T_\infty}, \quad \mu^* \rightarrow \frac{\mu}{\mu_\infty}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

To je výhodné pro lepší manipulaci s konstantami v numerických výpočtech a zejména pro srovnání numerického řešení s experimentálními daty. Jednotlivé veličiny jsou tedy vztaheny k veličinám referenčním, tj. referenční hustotě ρ_∞ , referenční rychlosti w_∞ homogenního nabíhajícího proudu, referenční délce L_{ref} , což v případě vnitřní aerodynamiky může být šířka kanálu v místě vstupu, referenční termodynamické teplotě T_∞ a referenční dynamické vazkosti μ_∞ . Bezrozměrový tvar je pak po transformaci dán takto

$$\mathbf{W}_t^* + \mathbf{F}_x^* + \mathbf{G}_y^* = \frac{1}{Re} (\mathbf{R}_x^* + \mathbf{S}_y^*), \quad (2.13)$$

kde Re je Reynoldsovo číslo vyjadřující charakter nabíhajícího proudu. Pro Reynoldsovo číslo pak platí následující tvar daný výše uvedenými vztahy při normování

$$Re = \frac{\rho_\infty w_\infty L_{ref}}{\mu_\infty}. \quad (2.14)$$

Ostatní členy v systému (2.13) jsou dány vztahy (2.6) - (2.11), kam se dosadí bezrozměrné veličiny z vyjádření (2.12). Od tohoto místa dále v textu bude vždy míněn bezrozměrový tvar, který nebude zdůrazňován indexem hvězdičky. Model v tomto tvaru byl autorem použit v pracích [16], [17] a [20].

2.4 Pojem slabého řešení

Eulerovy rovnice ze vztahu (2.1) jsou hyperbolický systém zákonů zachování, který lze přepsat do následujícího obecného konzervativního tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{h}_j(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathfrak{R}^d, \quad t > 0, \quad (2.15)$$

kde

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \dots \\ \rho v_d \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_j = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + \delta_{1j} p \\ \dots \\ \rho v_d v_j + \delta_{dj} p \\ (e + p) v_j \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

a kde index $j = 1, 2, \dots, d$.

Vektor $\mathbf{h}_j = (h_{1j}, \dots, h_{pj})$ pro $p = d + 2$ je vektor nevazkých toků z množiny hladkých funkcí z $C^1(\mathfrak{R}^d \times \mathfrak{R}^+)$ uvnitř otevřené množiny $\Omega \subset \mathfrak{R}^p$ z prostoru \mathfrak{R}^p a $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)$ je hledaný vektor funkcí, které jsou z množiny $C^1(\mathfrak{R}^d \times \mathfrak{R}^+)$ rovněž z podprostoru Ω . Klasické řešení Cauchyovy úloha pro systém (2.15) je definováno jako úloha nalézt řešení systému

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{h}_j(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

pro všechny $\mathbf{u} = (\mathbf{x}, t) \in C^1(\mathfrak{R}^d \times \mathfrak{R}^+)$ s počáteční podmínkou

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^d. \quad (2.18)$$

Klasické řešení takového nelineárního systému i při dostatečně hladké počáteční podmínce činí problémy. Zobrazení $\mathfrak{R}^d \rightarrow \mathfrak{R}^d$ je prosté pouze pro $t \in (0, T)$ z \mathfrak{R}^+ . Pro hodnoty $t > T$ z \mathfrak{R}^+ mohou vznikat nespojitosti v řešení způsobené nejednoznačností zobrazení $\mathfrak{R}^d \rightarrow \mathfrak{R}^d$. Zavádí se proto pojem tzv. slabého řešení, které umožňuje vznik a

šíření nespojitosti. Počáteční úlohu lze potom řešit v libovolném čase na celém intervalu \mathfrak{R}^+ . Uvažujme Cauchyovu úlohu definovanou pomocí vztahů (2.17) a (2.18). Zvolme $\mathbf{u}_0 \in L_{loc}^\infty(\mathfrak{R}^d)^p$. Potom $\mathbf{u} = (\mathbf{x}, t)$ je slabým řešením (2.17) a (2.18), pokud $\mathbf{u} \in L_{loc}^\infty(\mathfrak{R}^d \times \mathfrak{R}^+)$ splňuje

$$\int_{\mathfrak{R}^+} \int_{\mathfrak{R}^d} \left\{ \mathbf{u} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \mathbf{h}_j(\mathbf{u}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\} d\mathbf{x} dt = - \int_{\mathfrak{R}^d} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \quad (2.19)$$

pro libovolnou testovací funkci $\varphi \in C_0^1(\mathfrak{R}^d \times \mathfrak{R}^+)$ pro všechna $1 \leq j \leq d$. Existuje vztah mezi klasickým a slabým řešením. Platí, že klasické řešení je zároveň slabé řešení. Slabé řešení splňující podmínku $C^1(\mathfrak{R}^d \times \mathfrak{R}^+)$ je řešením Cauchyovy úlohy definované vztahy (2.17) a (2.18) v klasickém smyslu. Lokální integrovatelnost funkcí danou L_{loc}^∞ lze zeslabit na měřitelnost.

V matematice se často užívá zápisu v integrální formě, pro 2D systém ze vztahu (2.1) bude ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{W} dS + \int_{\partial S} (\mathbf{F}, \mathbf{G}) \mathbf{n} dS = 0, \quad (2.20)$$

kde pro funkce \mathbf{W} , \mathbf{F} a \mathbf{G} není nutné, aby platilo, že $\mathbf{W}, \mathbf{F}, \mathbf{G} \in C^1(\Omega)$, tudíž se připouští i slabé řešení, které umožňují zahrnout do řešení i nespojitosti, např. rázové vlny, jenž se hojně vyskytují při transsonickém proudění. Podrobný rozbor teorie a analýzy řešení lze nalézt v publikaci od Temama [22].

2.5 Okrajové podmínky

Následující odstavec pojednává o okrajových podmínkách pro systémy rovnic (2.1) a (2.5). Jejich formulace musí být v souladu s charakterem uvedených systémů rovnic. Pro numerickou simulaci je vždy důležitá formulace okrajové podmínky na vstupu a výstupu proudící tekutiny z výpočetní oblasti a okrajová podmínka na pevné stěně. Dále existuje celá řada okrajových podmínek, které jsou užívány pro specifické případy proudění tekutin ve vztahu ke geometrii výpočetové oblasti, např. periodická okrajová podmínka užitá v případě proudění DCA mříží.

2.5.1 Systém Eulerových rovnic

Pro systém Eulerových rovnic, jenž je hyperbolický, je důležité rozlišovat, jaký je podíl mezi velikostí rychlosti proudící tekutiny a lokální rychlosti zvuku. Ten je vyjádřen prostřednictvím Machova čísla, jenž je dáno vztahem

$$Ma = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{c_{loc}}, \quad (2.21)$$

přičemž lokální rychlost zvuku je definována jako

$$c_{loc} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}. \quad (2.22)$$

Je-li na vstupu tekutiny do oblasti pro velikost Machova čísla ve směru kolmém na vstupní hranici splněna podmínka $Ma < 1$, potom se předepisuje hodnota pro hustotu ρ_∞ a pro rychlost $(u, v)_\infty$. Pro tlak p se předepisuje Neumannova okrajová podmínka ve tvaru

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (2.23)$$

přičemž \mathbf{n} je vektor vnější normály. Energie se dopočítává ze stavové rovnice (2.3). Je-li na vstupu tekutiny do oblasti pro velikost Machova čísla ve směru kolmém na vstupní hranici splněna podmínka $Ma \geq 1$, potom se předepisuje hodnota pro hustotu ρ_∞ , pro rychlost $(u, v)_\infty$ a pro tlak p_∞ . Energie se opět dopočítává ze stavové rovnice (2.3).

Pro výstup tekutiny z oblasti a pro velikost Machova čísla ve směru kolmém na výstupní hranici splňující podmínku $Ma < 1$ se předepisuje hodnota tlaku. Podmínka pro hustotu a pro rychlost je vyjádřena Neumannovou podmínkou

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial (u, v)}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (2.25)$$

Energie se dopočítává ze stavové rovnice (2.3).

Je-li na výstupu tekutiny z oblasti velikost Machova čísla $Ma \geq 1$, potom se předepisují okrajové podmínky pro jednotlivé veličiny pomocí Neumannovy podmínky podle vztahů (2.24) a (2.25) pro hustotu a rychlost, pro tlak potom analogicky jako

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (2.26)$$

Energie se opět dopočítává ze stavové rovnice (2.3). Pro případ pevné stěny se předepisuje podmínka vyjadřující neprostupnou hladkou stěnu ve tvaru

$$(u, v)_w \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.27)$$

Periodická podmínka se předepisuje tak, že hodnoty konzervativních proměnných si podél periodických hranic oblasti vzájemně, v příslušných bodech, odpovídají. Podrobnou analýzu rovnic ve vztahu k uvedeným okrajovým podmínkám lze nalézt např. v knize Kozla a Dvořáka [23].

2.5.2 Systém Navier-Stokesových rovnic

Okrajové podmínky pro systém Navier-Stokesových rovnic vychází z teorie zadání okrajových podmínek pro nevazké proudění, tj. pro systém Eulerových rovnic. Pro vstup tekutiny do oblasti se předepisuje hodnota pro hustotu ρ_∞ , rychlost $(u, v)_\infty$ a teplotu T_∞ . Pro tlak p se předepisuje Neumannova okrajová podmínka podle (2.23). Energie se dopočítává ze stavové rovnice (2.3). Pro výstup tekutiny z oblasti se předepisuje hodnota pro tlak. Podmínka pro hustotu a pro rychlost je vyjádřena Neumannovou podmínkou stejně jako podmínky, které jsou dány vztahy (2.24) a (2.25) v případě Eulerových rovnic, a analogicky i Neumannovou okrajovou podmínkou pro teplotu. Energie se dopočítává

ze stavové rovnice (2.3). Pro případ pevné stěny se předepisuje podmínka vyjadřující nulovou rychlost na stěně ve tvaru

$$(u, v)_w = \mathbf{0}. \quad (2.28)$$

Podmínka neprostupnosti teploty na stěně je vyjádřena Neumannovou podmínkou

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (2.29)$$

Periodická podmínka se realizuje stejně jako v případě Eulerových rovnic, je navíc doplněna o podmínku pro teplotu.

3 Turbulentní proudění

V přírodě i v technice je převážná část proudění turbulentní, od nízkých rychlostí až po nadzvukové. Turbulentní proudění se objevuje všude tam, kde setrvačné nebo objemové síly, jenž působí na tekutinu, jsou dostatečně velké oproti vazkým silám, které tlumí poruchy a nestability v proudění. Určujícím parametrem je tzv. kritická hodnota Reynoldsova čísla

$$Re = \frac{\rho wL}{\mu}, \quad (3.1)$$

kteřé vyjadřuje poměr setrvačných a třecích sil. Při jejím překročení směrem nahoru přechází laminární proudění do turbulentního a naopak.

Turbulence je natolik složitá vlastnost tekutiny, že neexistuje její jasná a jednoznačná definice. Například podle Bradshawa [24] se jedná o nestacionární trojrozměrný pohyb vírů, ve kterém následkem jejich protahování vznikají fluktuace rychlostí, jenž tvoří spojité spektrum vlnových délek od nejmenších, daných vazkými silami, až po největší, určené okrajovými podmínkami, tj. geometrickými rozměry. Turbulence je brána jako vlastnost proudění vazké tekutiny a je daná těmito základními atributy:

- nedeterministickými změnami proudění v čase a prostoru,
- turbulentním přenosem hmotnosti, hybnosti a tepla,
- vířivostí a prostorovostí turbulentního pohybu,
- disipací turbulentní kinetické energie.

Turbulence tedy, dle výše zmíněné Bradshawovy hypotézy, je složena ze spektra turbulentních vírů, od největších, daných geometrií proudu, až po nejmenší, v nichž dochází k přeměně turbulentní kinetické energie v teplo. U struktur turbulentního proudění i přes jejich nahodilost dochází za stejných okrajových podmínek ke vzniku stejných univerzálních vlastností. Turbulence je výsledkem kvazi deterministických procesů, ke kterým dochází v proudící tekutině a které lze popsat pomocí statistických zákonů.

3.1 Modelování turbulentního proudění

Modelování turbulentního proudění lze popsat třemi základními metodami, které byly v průběhu let vyvinuty. Všechny metody jsou založeny na numerickém řešení pohybových rovnic, které jsou tvořeny zákonem zachování hmotnosti, hybnosti a energie. Pro popis turbulentního proudění jsou důležité střední hodnoty proudění.

- *DNS (Direct Numerical Simulation)*

Přímý přístup k modelování turbulentního proudění neboli přímá numerická simulace spočívá v řešení pohybových rovnic pro dané okrajové a počáteční podmínky a určení středních hodnot proudící tekutiny za daný časový interval. Jedná se o numericky nejnáročnější přístup, který vyžaduje velmi hustou výpočetní síť, aby bylo zaručeno, že budou popsány i ty nejmenší vírové struktury, které se nacházejí v řešené oblasti. Počet uzlů sítě je úměrný $Re^{9/4}$, metoda je tedy velmi náročná na paměť a rychlost výpočetní techniky. V současné době se používá k výpočtům a rozborům turbulentního proudění tam, kde nelze parametry proudění získat z experimentu.

- *RANS (Reynolds Average Navier-Stokes equations)*

Tento přístup je podle Reynoldse [25] založen na rozdělení okamžitých hodnot nestacionárních veličin na střední hodnotu a flukтуаční složku a následné řešení středovaných pohybových rovnic pro střední hodnoty závisle proměnných. Soustava musí být doplněna o model turbulence, jenž vhodným způsobem aproximuje tenzor Reynoldsových napětí. V současné době bývá metoda hojně využívána zejména v technických aplikacích a je použita i v autorových pracích [17], [18], [19], [20] a [21].

- *LES (Large Eddy Simulation)*

Metoda je založena na kombinaci obou předchozích. Velké vírové struktury, jejichž velikost je srovnatelná s rozměry oblasti a které zajišťují turbulentní přenos hmoty, hybnosti a energie, se modelují DNS přístupem. Naopak malé víry, ve kterých dochází k disipaci energie, se modelují statistickým přístupem pomocí tzv. subgrid modelu. Výchozí rovnice pro LES se získávají filtrováním Navier-Stokesových rovnic, které oddělí víry, jejichž velikost je menší než šířka filtru. Výsledné rovnice popisují

nestacionární pohyb velkých vírů, na který se superponuje pohyb malých vírů. Metoda byla navržena Deardorffem [26], jenž použil subgrid model podle Smagorinského [27].

3.2 Středování veličin proudového pole

V tomto odstavci je ukázán přístup k odvození středovaných Navier-Stokesových rovnic. Podle Reynoldse [25] lze okamžitou hodnotu veličiny proudového pole $\Phi(x_i, t)$ rozdělit na součet střední hodnoty $\overline{\Phi}(x_i)$ a její fluktuace $\Phi''(x_i, t)$ podle vztahu

$$\Phi(x_i, t) = \overline{\Phi}(x_i, t) + \Phi''(x_i, t). \quad (3.2)$$

Pro střední hodnotu veličiny na časovém intervalu Δt pak platí vztah

$$\overline{\Phi}(x_i, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \Phi(x_i, t) dt, \quad (3.3)$$

pro střední hodnotu fluktuace platí

$$\overline{\Phi''}(x_i, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \Phi''(x_i, t) dt = 0. \quad (3.4)$$

Středováním veličin pomocí uvedených vztahů v rovnicích zachování hmotnosti, zachování hybnosti a rovnici zachování celkové energie daných systémem (2.5) vznikne konvenčně středovaný systém. V něm jsou kromě výrazů se středními hodnotami odpovídajícími výrazům v původních rovnicích systému (2.5) i výrazy vyjadřující vliv turbulence na proudění s fluktuacemi hustoty, které komplikují řešení. Proto Favre [28] zavedl hmotnostně podmíněné středování, kde střední hodnota veličiny je dána jako

$$\tilde{\Phi}(x_i, t) = \frac{\rho \Phi(x_i, t)}{\bar{\rho}} \quad (3.5)$$

a okamžitá hodnota veličiny je vyjádřena opět jako součet její hmotnostně podmíněné střední hodnoty $\tilde{\Phi}(x_i, t)$ a fluktuace $\Phi'(x_i, t)$

$$\Phi(x_i, t) = \tilde{\Phi}(x_i, t) + \Phi'(x_i, t). \quad (3.6)$$

Vztah (3.6) se vynásobí výrazem $\rho = \bar{\rho} + \rho''$ a po konvenčním způsobu středování se dostane rovnice

$$\overline{\rho\Phi(x_i, t)} = \bar{\rho}\tilde{\Phi}(x_i, t) + \overline{\rho\Phi'(x_i, t)}. \quad (3.7)$$

Z definice střední hodnoty veličiny (3.5) musí platit

$$\overline{\rho\Phi'(x_i, t)} = 0. \quad (3.8)$$

Rozdíl mezi konvenčním způsobem středování a hmotnostně podmíněným způsobem lze vyjádřit následujícími vztahy:

- konvenční středování podle Reynoldse

$$\overline{\Phi''(x_i, t)} = 0, \quad \overline{\rho\Phi''(x_i, t)} \neq 0, \quad (3.9)$$

- hmotnostně podmíněné středování podle Favra

$$\overline{\Phi'(x_i, t)} \neq 0, \quad \overline{\rho\Phi'(x_i, t)} = 0. \quad (3.10)$$

3.3 Rovnice zákona zachování hmotnosti

K odvození středované rovnice zákona zachování hmotnosti využijeme první rovnici systému (2.5)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i) = 0, \quad (3.11)$$

do které dosadíme

$$\rho = \bar{\rho} + \rho'', \quad (3.12)$$

$$U_i = \tilde{U}_i + U_i'. \quad (3.13)$$

Úpravami pomocí vztahů (3.9) a (3.10) získáme středovanou rovnici

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\tilde{U}_i) = 0, \quad (3.14)$$

která má formálně stejný tvar jako rovnice (3.11).

3.4 Rovnice zákona zachování hybnosti

K odvození středované rovnice zákona zachování hybnosti využijeme druhou a třetí rovnici systému (2.5) vyjádřené v nekonzervativním tvaru jako

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_i U_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (3.15)$$

Středovaná rovnice zákona zachování hybnosti má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{U}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \tilde{U}_i \tilde{U}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho U_i' U_j'}). \quad (3.16)$$

Zde je patrný rozdíl mezi původní rovnicí (3.15) a novou středovanou rovnicí (3.16) ve členu na pravé straně $-\overline{\rho U_i' U_j'}$, který vyjadřuje vliv turbulentních fluktuací v tekutině na přenos hybnosti a je označován jako Reynoldsovo turbulentní napětí.

3.5 Rovnice zákona zachování energie

Rovnici zákona zachování energie přepíšeme ze systému (2.5) do nekonzervativního tvaru v podobě entalpie jako

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho h U_j) = \frac{\partial p}{\partial t} + U_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \quad (3.17)$$

Středovaná rovnice má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{h}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \tilde{h} \tilde{U}_j) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \overline{U_j' \frac{\partial p}{\partial x_j}} + \overline{\tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} - \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho h' U_j'}). \quad (3.18)$$

V rovnici lze pro větší rychlosti zanedbat práci tlakových sil a disipaci. Poslední člen v rovnici (3.18) vyjadřuje turbulentní transport tepla.

3.6 Uzavření systému středovaných Navier-Stokesových rovnic

Středováním Navier-Stokesových rovnic vznikly v případě rovnic zákona zachování hybnosti a energie dva nové členy, turbulentní přenos hybnosti a turbulentní přenos tepla. Soustava tedy vyžaduje doplnění o model turbulence, který bude tyto dva nové členy vhodně aproximovat, a tím soustavu uzavře. V této práci je použito hypotézy, kterou navrhnul Boussinesq [29]. Je založena na analogii k Newtonovu třecímu zákonu a vyjadřuje turbulentní napětí podobně jako vazké napětí pomocí přídavné turbulentní vazkosti. Ta je pro dvourozměrnou nestlačitelnou mezní vrstvu vyjádřena rovnicí

$$-\overline{\rho u''v''} = \mu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}. \quad (3.19)$$

Pro obecný případ turbulence byla Boussinesqova definice rozšířena Harlowem a Nakayamou [30] do dnes často užívaného tvaru

$$-\overline{\rho U'_i U'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_k} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{\rho U'_k U'_k}. \quad (3.20)$$

Středované Navier-Stokesovy rovnice mají formálně stejný tvar jako rovnice dané vztahem (2.5) s tím, že v tomto případě se jedná o střední hodnoty veličin. Zavedením turbulentní vazkosti μ_t přejdou rovnice (2.7) do tvaru

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= (\mu + \mu_t) \left(\frac{4}{3} u_x - \frac{2}{3} v_y \right), \\ \tau_{xy} &= (\mu + \mu_t) (u_y + v_x), \\ \tau_{yy} &= (\mu + \mu_t) \left(\frac{4}{3} v_y - \frac{2}{3} u_x \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

a rovnice (2.9) do tvaru

$$\begin{aligned} \lambda T_x &= \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{p}{\rho} \right)_x, \\ \lambda T_y &= \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{p}{\rho} \right)_y. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Člen Pr_t v předchozích rovnicích (3.22) je turbulentní Prandtlovo číslo, které se pro výpočty zpravidla předpokládá konstantní, pro vzduch se uvažuje hodnota $Pr_t = 0,9$.

Obecně je dáno vztahem

$$Pr_t = \frac{\mu_t c_p}{\lambda_t}, \quad (3.23)$$

kde λ_t je turbulentní tepelná vodivost sloužící k vyjádření turbulentního přenosu hybnosti zavedená podobně jako turbulentní vazkost μ_t . Dále se v turbulentním proudění lze setkat i se vztahem definujícím turbulentní Reynoldsovo číslo jako poměr turbulentní a dynamické vazkosti ve tvaru

$$Re_t = \frac{\mu_t}{\mu}. \quad (3.24)$$

Bezrozměrný tvar středovaných Navier-Stokesových rovnic je rovněž formálně stejný jako bezrozměrný tvar Navier-Stokesových rovnic ze vztahu (2.13). Veličiny turbulentní energie k a specifické rychlosti disipace ω , které budou užity v dalším textu, jsou transformovány do bezrozměrného tvaru následovně

$$k^* \rightarrow \frac{k}{w_\infty^2}, \quad \omega^* \rightarrow \frac{\omega L_{ref}}{w_\infty}. \quad (3.25)$$

3.7 Modely turbulence

Model turbulence, jak již bylo zmíněno, představuje nástroj k uzavření středovaných Navier-Stokesových rovnic. Pomocí nich se vypočítá neznámá hodnota turbulentní vazkosti vyskytující se v rovnicích (3.21) a (3.22). Podle počtu rovnic, které se musí při výpočtu turbulentní vazkosti řešit, existují modely s turbulentní vazkostí:

- *Algebraické modely*

Nejjednodušší modely jsou algebraické modely, které neobsahují žádnou transportní rovnici. Turbulentní vazkost je vyjádřena pomocí středních hodnot veličin proudění. Modely jsou založeny na Prandtlově představě o směšovací délce [31], která vyjadřuje vzdálenost, jenž urazí turbulentní vír napříč mezní vrstvou, než mísením zanikne. Jsou navrženy pro dvourozměrnou nestlačitelnou mezní vrstvu a použitelné pro jednoduchou geometrii. Detailnější popis algebraických modelů turbulence a jejich použití je uveden ve zprávě Příhody [32].

- *Jednorovnicové modely*

Modely řeší pouze jednu transportní rovnici, která je vyjádřením transportu turbulentní energie. Jsou vhodné pro řešení tenkých smykových vrstev. Představitelem je poměrně často používaný model Spalarta a Allmarase. Nevýhodou je algebraický vztah pro délkové měřítko, který komplikuje použitelnost pro složitější 2D případy a 3D případy proudění.

- *Dvourovnicové modely*

Modely jsou založeny na řešení dvou transportních rovnic pro turbulentní energii k a rychlost disipace ε , resp. specifickou rychlost disipace ω . Označují se $k - \varepsilon$, resp. $k - \omega$. Používají se často v různých modifikacích.

3.7.1 Algebraický model turbulence podle Baldwina-Lomaxe

Baldwin-Lomaxův model [33] je modifikací základního algebraického modelu turbulence Cebeci a Smithe [34] s cílem odstranit z modelu parametry mezní vrstvy. Ta je v něm proto rozdělena na dvě oblasti, vnitřní (blíže stěny) a vnější oblast. Turbulentní vazkost ve vnitřní oblasti je dána vztahem

$$\mu_{ii} = \rho F_d^2 \kappa^2 y^2 |\Omega|, \quad (3.26)$$

kde y je vzdálenost od stěny, Ω je vířivost, pro dvoudimenzionální případ daná rovnicí

$$\Omega = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \quad (3.27)$$

F_d je van Driestova funkce, jenž je definovaná

$$F_d = 1 - \exp\left(-\frac{1}{A} \frac{u_\tau y}{v_w}\right), \quad (3.28)$$

u_τ je tzv. třecí rychlost a τ_w smykové napětí, mezi nimiž je závislost

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \left(v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_w^{1/2}. \quad (3.29)$$

Nutno poznamenat, že v případě členu κ v rovnici (3.26) se jedná o Kármánovu konstantu, jenž nabývá hodnoty $\kappa = 0,4$. Empirická konstanta A byla určena $A = 26$.

Pro úplnost je třeba dodat i vztah mezi kinematickou a dynamickou vazkostí

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (3.30)$$

Turbulentní vazkost ve vnější oblasti je dána rovnicí

$$\mu_{to} = \alpha C_{cp} F_w F_k, \quad (3.31)$$

kde α a C_{cp} jsou konstanty nabývající hodnotu $\alpha = 0,0168$ a $C_{cp} = 1,6$.

Funkce F_w je pro případ obtékání stěny dána vztahem

$$F_w = y_{max} F_{max}, \quad (3.32)$$

kde F_{max} je maximum funkce, pro kterou platí následující vztah

$$F = y|\Omega|F_d \quad (3.33)$$

a y_{max} je vzdálenost od stěny, ve které funkce F nabývá svého maxima. V případě úplavu je pak funkce F_w definována jako

$$F_w = C_{wk} y_{max} \frac{\Delta U^2}{F_{max}}, \quad (3.34)$$

kde ΔU je rozdíl mezi maximální a minimální rychlostí v příslušném řezu $x = konst.$ a C_{wk} je konstanta s hodnotou $C_{wk} = 0,25$. Pro funkci F_k ze vztahu (3.31) pak platí vztah

$$F_k = \left[1 + 5,5 \left(C_{KL} \frac{y}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1}, \quad (3.35)$$

přičemž konstanta C_{KL} nabývá hodnoty $C_{KL} = 0,3$. Model v tomto tvaru byl autorem použit v pracích [17], [18], [19], [20] a [21].

3.7.2 Základní k- ω model

Jedná se o dvourovnicový model $k - \omega$ s transportními rovnicemi, kde první rovnice je transportní rovnice pro turbulentní energii k a druhá rovnice je transportní rovnice pro specifickou rychlost disipace ω . Ta je použita namísto rychlosti disipace ε , jejíž výpočet v blízkosti stěny přináší obecně v modelu $k - \varepsilon$ komplikace.

Transformace mezi oběma je vyjádřena následovně

$$\omega = \frac{\varepsilon}{k}. \quad (3.36)$$

Základní model $k - \omega$ tak, jak jej popsal Wilcox [35], je určen pro vysoká turbulentní Reynoldsova čísla. Turbulentní vazkost je v něm definována podle vztahu

$$\mu_t = \gamma^* \bar{\rho} \frac{k}{\omega}, \quad (3.37)$$

kde transportní rovnice pro k a ω jsou ve tvaru

$$\frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{U}_j k)}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \beta^* \bar{\rho} k \omega, \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{U}_j \omega)}{\partial x_j} = \gamma \frac{\omega}{k} P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] - \beta \bar{\rho} \omega^2,$$

kde

$$P_k = \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j}. \quad (3.39)$$

Člen v předchozí rovnici (3.39) reprezentuje produkci turbulentní energie a je označen P_k , kde index k je označení. Turbulentní napětí je dáno rovnicí

$$\tau_{ij} = 2\mu_t \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\rho} k. \quad (3.40)$$

Pro tenzor rychlosti deformace S_{ij} platí vztah

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.41)$$

Modelové konstanty jsou:

$$\gamma^* = 1, \gamma = 5/9, \beta^* = 9/100, \beta = 3/40, \sigma^* = 1/2 \text{ a } \sigma = 1/2. \quad (3.42)$$

Tento model autor použil v práci [19].

3.7.3 Rozšířený k- ω model

Model navrhnul Wilcox [36], [37] jako modifikací základního modelu $k - \omega$ ze vztahu (3.38), do jehož druhé transportní rovnice pro specifickou rychlost disipace je přidán člen C_D vyjadřující příčnou difuzi. Ta má potom tvar

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{U}_j\omega)}{\partial x_j} = \gamma \frac{\omega}{k} P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma\mu_t) \frac{\partial\omega}{\partial x_j} \right] - \beta\bar{\rho}\omega^2 + C_D, \quad (3.43)$$

kde C_D je dáno rovnicí

$$C_D = \sigma_d \frac{\bar{\rho}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \quad (3.44)$$

Modelové konstanty jsou

$$\gamma = 13/25, \quad \beta^* = 9/100, \quad \sigma^* = 3/5, \quad \sigma = 1/2 \quad \text{a} \quad Pr_t = 8/9. \quad (3.45)$$

Pro koeficient σ_d z rovnice (3.44) pak platí

$$\sigma_d = \begin{cases} 0, & \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \leq 0, \\ \sigma_{d_0}, & \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} > 0, \end{cases} \quad (3.46)$$

kde
$$\sigma_{d_0} = \frac{1}{8}. \quad (3.47)$$

Pro turbulentní vazkost pak platí modifikovaný vztah

$$\mu_t = \bar{\rho} \frac{k}{\hat{\omega}}, \quad (3.48)$$

kde specifická rychlost disipace $\hat{\omega}$ se spočítá pomocí

$$\hat{\omega} = \max \left(\omega; C_{lim} \sqrt{\frac{2\hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij}}{\beta^*}} \right), \quad (3.49)$$

kde konstanta C_{lim} nabývá hodnoty

$$C_{lim} = \frac{7}{8}. \quad (3.50)$$

Člen \hat{S}_{ij} je modifikovaný tenzor rychlosti deformace, pro který platí s pomocí vztahů (3.40) a (3.41) následující rovnice

$$\hat{S}_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_k}. \quad (3.51)$$

Parametr β upravující rychlost rozšiřování paprsku pro rovinný i kruhový volný proud je dán rovnicí

$$\beta = \beta_0 f_\beta, \quad (3.52)$$

kde

$$\beta_0 = 0,0708 \quad (3.53)$$

a kde

$$f_\beta = \frac{1 + 85 \chi_\omega}{1 + 100 \chi_\omega}. \quad (3.54)$$

Člen χ_ω v předchozím vztahu se vyjádří pomocí rovnice

$$\chi_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij} \Omega_{jk} \hat{S}_{ki}}{(\beta^* \omega)^3} \right|, \quad (3.55)$$

kde

$$\hat{S}_{ki} = S_{ki} - \frac{1}{2} \delta_{ki} \frac{\partial \tilde{U}_m}{\partial x_m} \quad (3.56)$$

a

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.57)$$

Pro velké hodnoty χ_ω platí, že $f_\beta \rightarrow 0,85$ pro $\beta = 0,85$. Pro malé hodnoty χ_ω platí, že $f_\beta \rightarrow 1,0$ pro $\beta = 0,0708$. Model v tomto tvaru byl autorem použit v pracích [20] a [21].

3.7.4 SST model

SST model je modifikací tzv. BSL (baseline) modelu, oba podle Mentera [38]. Jedná se o dvouvrstvé modely, což znamená, že ve vnitřní části smykové oblasti a v logaritmické oblasti se uplatní model $k - \omega$, naproti tomu ve vnější části smykové vrstvy se uplatní standardní model $k - \varepsilon$, viz např. Příhoda a Louda [39]. Standardní $k - \varepsilon$ model je kvůli přehlednosti převeden do formy $k - \omega$ ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{U}_j k)}{\partial x_j} &= P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \beta^* \bar{\rho} k \omega, \\
 \frac{\partial(\bar{\rho}\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{U}_j \omega)}{\partial x_j} &= \gamma \frac{\omega}{k} P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] - \beta \bar{\rho} \omega^2 + \\
 &+ 2\bar{\rho}(1 - F_1) \sigma_2 \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}.
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Formálně se zápis liší od rovnic (3.38), stejně jako v případě Wilcoxova rozšířeného modelu $k - \omega$, posledním členem ve druhé transportní rovnici, vyjádřením pro příčnou difuzi. Pro turbulentní vazkost pak platí modifikovaný vztah

$$\mu_t = \min \left(\bar{\rho} \frac{k}{\omega}, \bar{\rho} \frac{a_1 k}{F_2 \Omega_{ij}} \right), \tag{3.59}$$

kde pro tenzor rychlosti rotace Ω_{ij} platí vztah (3.57).

Funkce F_1 a F_2 z předešlých vztahů jsou spojovací funkce, které jsou konstruovány tak, aby splňovaly podmínku hladkého přechodu od modelu $k - \omega$ k modelu $k - \varepsilon$. Jsou dány následujícími vztahy pro funkci F_1

$$F_1 = \tanh(\Gamma_1^4), \tag{3.60}$$

kde pro Γ_1 platí rovnice

$$\Gamma_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{\omega y^2} \right); \frac{4\bar{\rho}\sigma_2 k}{D_\omega y^2} \right] \tag{3.61}$$

a pro D_ω platí

$$D_\omega = \max \left(2\bar{\rho}\sigma_2 \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}; 10^{-20} \right), \tag{3.62}$$

pro funkci F_2 platí vztah

$$F_2 = \tanh(\Gamma_2^2), \tag{3.63}$$

kde argument Γ_2 je dán jako

$$\Gamma_2 = \max\left(2 \frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}; \frac{500\nu}{\omega y^2}\right), \quad (3.64)$$

kde y ve vztazích (3.61) a (3.64) značí vzdálenost od stěny. Pro vazbu mezi modelovými konstantami je pak použit vztah

$$\Pi = F_1 \Pi_1 + (1 - F_1) \Pi_2, \quad (3.65)$$

kde Π představuje libovolnou konstantu v SST modelu jako lineární kombinaci příslušné konstanty Π_1 původního $k - \omega$ modelu a příslušné konstanty Π_2 transformovaného modelu $k - \varepsilon$. Společné konstanty v modelu jsou

$$\beta^* = 0,09, \quad \sigma^* = 0,85, \quad \kappa = 0,41 \quad \text{a} \quad a_1 = 0,31, \quad (3.66)$$

přičemž konstanta κ je Kármánova konstanta.

Modelové konstanty použité ze základního $k - \omega$ modelu jsou

$$\beta_1 = 0,075, \quad \sigma_1 = 0,5 \quad \text{a} \quad \gamma_1 = \beta_1 / \beta^* - \sigma_1 \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}. \quad (3.67)$$

Modelové konstanty použité z transformovaného $k - \varepsilon$ modelu jsou

$$\beta_2 = 0,0828, \quad \sigma_2 = 0,85 \quad \text{a} \quad \gamma_2 = \beta_2 / \beta^* - \sigma_2 \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}. \quad (3.68)$$

Tento turbulentní model byl autorem použit v práci [21].

3.8 Okrajové podmínky pro model $k - \omega$

Z asymptotického chování specifické rychlosti disipace ω u stěny vyplývá následující volená podmínka

$$k_w = 0, \quad (3.69)$$

$$\omega_w = \frac{10}{Re} \frac{6\mu}{\bar{\rho}\beta y^2}, \quad (3.70)$$

kde y je vzdálenost pevné stěny od místa výpočtu.

Vstupní hodnoty byly předepsány následovně

$$k_{\infty} = \frac{3}{2} (Int_T \bar{U}_{\infty})^2, \quad (3.71)$$

$$\omega_{\infty} = C_{\mu}^{-1/4} \frac{\sqrt{k}}{L}, \quad (3.72)$$

přičemž Int_T je intenzita turbulence v místě proudového pole dostatečně vzdáleného od stěn, v případě výpočtů byla zvolena hodnota $Int_T = 0,05$, konstanta C_{μ} nabývá hodnoty $C_{\mu} = 0,09$ a charakteristickým rozměrem L byla zvolena šířka vstupu $L = 1$ v případě GAMM kanálu i DCA mříže. Hodnoty na výstupu byly extrapolovány z proudového pole.

4 Numerické řešení

V této kapitole je uveden způsob numerického řešení matematických modelů proudění popsaných v kap. 2 metodou konečných objemů a popsáno užití numerické schéma spolu s přídatnou vazností. Dále je zmíněna podmínka stability volbou vhodného časového kroku, konvergence a podmínka pro volbu sítě. V posledním odstavci je popsána realizace okrajových podmínek. Všechny níže uvedené poznatky byly autorem užity v jeho pracích [15], [16], [17], [18], [19], [20] a [21].

4.1 Metoda konečných objemů

Pro numerické řešení byla zvolena metoda konečných objemů (FVM - Finite Volume Method), která se často používá pro výpočty proudění tekutin. Princip spočívá v rozdělení výpočetní oblasti na konečný počet navzájem disjunktních objemů, v případě 2D ploch trojúhelníků, čtyřúhelníků a šestiúhelníků, z nichž každý z nich reprezentuje jednu výpočetní buňku, či kontrolní objem, na kterém se numericky integruje. V případě této práce je použito tzv. cell-centered uspořádání, kde všechny hodnoty jsou umístěny do těžiště kontrolního objemu a jsou brány v dané buňce jako hlavní hodnota. Implementace FVM je tedy poměrně jednoduchá a je použitelná pro široké spektrum úloh, zejména pokud se jedná o nestruturované neortogonální sítě užívané pro složité geometrie výpočtové oblasti nebo nespojitosti při řešení úloh transsonického proudění, jako jsou rázové vlny. Na základě této metody je odvozeno numerické schéma a popsána realizace okrajových podmínek. Popis metody konečných objemů lze nalézt např. v publikaci Kozla a Dvořáka [23].

4.1.1 Systém Eulerových rovnic

Metoda konečných objemů je nejdříve odvozena pro jednodušší systém Eulerových rovnic ze vztahu (2.1), který lze psát v následujícím integrálním tvaru

$$\iint_{D_{i,j}} \mathbf{W}_t \, dx dy + \iint_{D_{i,j}} (\mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y) \, dx dy = 0, \quad (4.1)$$

kde označení $D_{i,j}$ představuje výpočetní buňky, jejichž sítí je pokryta celá výpočtová oblast.

Aplikací Greenovy věty upravíme druhý integrál ve vztahu (4.1) do tvaru

$$\iint_{D_{i,j}} (\mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y) dx dy = \oint_{\partial D_{i,j}} \mathbf{F} dy - \mathbf{G} dx \quad (4.2)$$

a pomocí věty o střední hodnotě aproximujeme jednotlivé členy druhého integrálu ze vztahu (4.2). Vzniknou následující vyjádření

$$\mathbf{F}_x \Big|_{i,j} = \frac{1}{\mu(D_{i,j})} \oint_{\partial D_{i,j}} \mathbf{F} dy, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{G}_y \Big|_{i,j} = -\frac{1}{\mu(D_{i,j})} \oint_{\partial D_{i,j}} \mathbf{G} dx. \quad (4.4)$$

S pomocí vztahu pro kontrolní objem

$$\mu(D_{i,j}) = \iint_{D_{i,j}} dx dy \quad (4.5)$$

dále upravíme

$$\iint_{D_{i,j}} \mathbf{W}_t dx dy = \frac{d}{dt} \iint_{D_{i,j}} \mathbf{W} dx dy = \frac{d\mathbf{W}}{dt} \Big|_{i,j} \mu(D_{i,j}). \quad (4.6)$$

Dosazením předchozích vztahů (4.3), (4.4), (4.5) a (4.6) do rovnice (4.1) vznikne

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} \Big|_{i,j} = -\frac{1}{\mu(D_{ij})} \left[\oint_{\partial D_{i,j}} (\mathbf{F} dy - \mathbf{G} dx) \right], \quad (4.7)$$

kde se aproximace fyzikálních toků v integrálu na pravé straně vyjádří pomocí numerických toků (dále v textu označeny vlnkou) následovně jako

$$\oint_{\partial D_{i,j}} (\mathbf{F} dy - \mathbf{G} dx) = \sum_{k=1}^N (\tilde{\mathbf{F}}_k^n \Delta y_k - \tilde{\mathbf{G}}_k^n \Delta x_k). \quad (4.8)$$

Dosazením vztahu (4.8) do rovnice (4.7) získáme semidiskrétní tvar

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} \Big|_{i,j} = -\frac{1}{\mu(D_{i,j})} \sum_{k=1}^N (\tilde{\mathbf{F}}_k^n \Delta y_k - \tilde{\mathbf{G}}_k^n \Delta x_k). \quad (4.9)$$

4.1.2 Systém Navier-Stokesových rovnic

Při odvozování schématu pro metodu konečných objemů u Navier-Stokesových rovnic vyjdeme ze vztahu (2.13), který přepíšeme do integrálního tvaru

$$\iint_{D_{i,j}} \mathbf{W}_t dx dy + \iint_{D_{i,j}} \left[\left(\mathbf{F}_x - \frac{1}{Re} \mathbf{R}_x \right) + \left(\mathbf{G}_y - \frac{1}{Re} \mathbf{S}_y \right) \right] dx dy = 0. \quad (4.10)$$

Pomocí stejných úprav jako v předchozím případě Eulerových rovnic získáme následující semidiskrétní tvar

$$\left. \frac{d\mathbf{W}}{dt} \right|_{i,j} = - \frac{1}{\mu(D_{i,j})} \sum_{k=1}^N \left[\left(\tilde{\mathbf{F}}_k^n - \frac{1}{Re} \tilde{\mathbf{R}}_k^n \right) \Delta y_k - \left(\tilde{\mathbf{G}}_k^n - \frac{1}{Re} \tilde{\mathbf{S}}_k^n \right) \Delta x_k \right]. \quad (4.11)$$

4.2 MacCormackovo numerické schéma

MacCormackovo schéma, užitě k výpočtům v této práci, vychází z Lax-Wendrofova schématu. Jedná se o explicitní numerické schéma ve tvaru prediktor-korektor s řádem aproximace $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$.

4.2.1 Systém Eulerových rovnic

MacCormackovo numerické schéma ve formě prediktor-korektor aproximuje rovnici (4.9) následujícím způsobem:

a. prediktor

$$\mathbf{W}_{i,j}^{n+1/2} = \mathbf{W}_{i,j}^n - \Delta t \mathbf{Rez}_{i,j}^n, \quad (4.12)$$

kde

$$\mathbf{Rez}_{i,j}^n = \frac{1}{\mu(D_{i,j})} \sum_{k=1}^4 \left(\tilde{\mathbf{F}}_k^n \Delta y_k - \tilde{\mathbf{G}}_k^n \Delta x_k \right), \quad (4.13)$$

b. korektor

$$\mathbf{W}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{W}_{i,j}^{n+1/2} + \mathbf{W}_{i,j}^n - \Delta t \mathbf{Rez}_{i,j}^{n+1/2} \right), \quad (4.14)$$

kde

$$\mathbf{Rez}_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{\mu(D_{i,j})} \sum_{k=1}^4 \left(\tilde{\mathbf{F}}_k^{n+1/2} \Delta y_k - \tilde{\mathbf{G}}_k^{n+1/2} \Delta x_k \right). \quad (4.15)$$

Nevazké toky v prediktorovém kroku se vypočítají jako

$$\tilde{\mathbf{F}}_1^n = \mathbf{F}_{i,j-1}^n, \tilde{\mathbf{F}}_2^n = \mathbf{F}_{i,j}^n, \tilde{\mathbf{F}}_3^n = \mathbf{F}_{i,j}^n, \tilde{\mathbf{F}}_4^n = \mathbf{F}_{i-1,j}^n \quad (4.16)$$

a v korektorovém kroku jako

$$\tilde{\mathbf{F}}_1^{n+1/2} = \mathbf{F}_{i,j}^{n+1/2}, \tilde{\mathbf{F}}_2^{n+1/2} = \mathbf{F}_{i+1,j}^{n+1/2}, \tilde{\mathbf{F}}_3^{n+1/2} = \mathbf{F}_{i,j+1}^{n+1/2}, \tilde{\mathbf{F}}_4^{n+1/2} = \mathbf{F}_{i,j}^{n+1/2}. \quad (4.17)$$

Analogicky lze odvodit vztahy i pro nevazké toky $\tilde{\mathbf{G}}_k^n$ a $\tilde{\mathbf{G}}_k^{n+1/2}$ ve středech hran $k = 1, 2, 3, 4$ kontrolního objemu $D_{i,j}$ podle obr. 4.1.

4.2.2 Systém Navier-Stokesových rovnic

MacCormackovo schéma pro systém Navier-Stokesových rovnic ze vztahu (4.11) má formálně stejný tvar odpovídající rovnicím prediktorového a korektorového kroku (4.12) a (4.14). Pro výpočet rezidua v jednotlivých krocích platí následující rovnice:

$$\mathbf{Rez}_{i,j}^n = \frac{1}{\mu(D_{i,j})} \sum_{k=1}^4 \left[\left(\tilde{\mathbf{F}}_k^n - \frac{1}{Re} \tilde{\mathbf{R}}_k^n \right) \Delta y_k - \left(\tilde{\mathbf{G}}_k^n - \frac{1}{Re} \tilde{\mathbf{S}}_k^n \right) \Delta x_k \right], \quad (4.18)$$

$$\mathbf{Rez}_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{\mu(D_{i,j})} \sum_{k=1}^4 \left[\left(\tilde{\mathbf{F}}_k^{n+1/2} - \frac{1}{Re} \tilde{\mathbf{R}}_k^{n+1/2} \right) \Delta y_k - \left(\tilde{\mathbf{G}}_k^{n+1/2} - \frac{1}{Re} \tilde{\mathbf{S}}_k^{n+1/2} \right) \Delta x_k \right]. \quad (4.19)$$

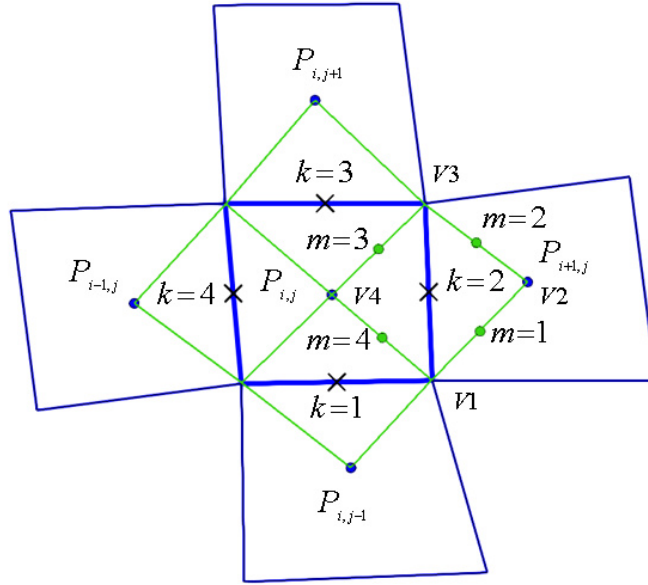
Nevazké toky se vypočítají pomocí vztahů (4.16) a (4.17), vazké toky se aproximují v obou krocích centrálně

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{R}_{i,j} + \mathbf{R}_{i,j-1}), \quad \tilde{\mathbf{R}}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{R}_{i,j} + \mathbf{R}_{i+1,j}), \\ \tilde{\mathbf{R}}_3 &= \frac{1}{2}(\mathbf{R}_{i,j} + \mathbf{R}_{i,j+1}), \quad \tilde{\mathbf{R}}_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{R}_{i,j} + \mathbf{R}_{i-1,j}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{S}_{i,j} + \mathbf{S}_{i,j-1}), \quad \tilde{\mathbf{S}}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_{i,j} + \mathbf{S}_{i+1,j}), \\ \tilde{\mathbf{S}}_3 &= \frac{1}{2}(\mathbf{S}_{i,j} + \mathbf{S}_{i,j+1}), \quad \tilde{\mathbf{S}}_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_{i,j} + \mathbf{S}_{i-1,j}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Výpočet gradientů rychlostí ve vektorech vazkých toků se realizuje za pomoci konstrukce duální sítě podle obr. 4.1, přičemž střed příslušné duální buňky je totožný se středem k -té strany buňky $D_{i,j}$.


 Obr. 4.1: Konstrukce duální sítě pro buňku $D_{i,j}$

Pro hodnoty směrových derivací libovolné proměnné P ve středu k -té duální buňky lze odvodit vztahy

$$(P_x)_{i,j}^k = \frac{1}{\mu(D_{dual\ i,j}^k)} \sum_{m=1}^4 \tilde{P}_m^k \Delta y_m, \quad (4.22)$$

$$(P_y)_{i,j}^k = \frac{1}{\mu(D_{dual\ i,j}^k)} \sum_{m=1}^4 \tilde{P}_m^k \Delta x_m. \quad (4.23)$$

Pro výpočet hodnot \tilde{P}_m^k ve středech stran k -té duální buňky použijeme průměrované hodnoty z vrcholů P_V^k příslušné m -té strany duální buňky. Např. pro duální buňku $k = 2$ na obr. 4.1 jsou hodnoty ve vrcholech P_{V2} a P_{V4} získány přímo z hodnot uzlů sítě metody konečných objemů

$$P_{V2} = P_{i+1,j}, \quad (4.24)$$

$$P_{V4} = P_{i,j}, \quad (4.25)$$

hodnoty P_{V1} a P_{V3} jsou vypočítány z hodnot uzlů sítě průměrováním

$$P_{V1} = \frac{1}{4} (P_{i,j-1} + P_{i+1,j-1} + P_{i+1,j} + P_{i,j}), \quad (4.26)$$

$$P_{V3} = \frac{1}{4} (P_{i+1,j} + P_{i+1,j+1} + P_{i,j+1} + P_{i,j}). \quad (4.27)$$

4.3 Umělá vazkost

Umělá vazkost je v případě MacCormackova schématu nutnou podmínkou k zajištění hladkosti řešení. Oscilace řešení je nutné utlumit přidáním numerické vazkosti. Byla zvolena numerická vazkost $AD(\mathbf{W})$ Jamesonova typu využívaná zejména pro stabilizace řešení v blízkosti stacionárního stavu, která spočívá v přidání druhých diferencí vektoru \mathbf{W} k řešení v $n+1$ časové vrstvě. MacCormackovo schéma se upraví do tvaru

$$\mathbf{W}_{i,j}^{n+1/2} = \mathbf{W}_{i,j}^n - \Delta t \mathbf{Re}z_{i,j}^n, \quad (4.28)$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{W}_{i,j}^{n+1/2} + \mathbf{W}_{i,j}^n - \Delta t \mathbf{Re}z_{i,j}^{n+1/2}), \quad (4.29)$$

$$\mathbf{W}_{i,j}^{n+1} = \tilde{\mathbf{W}}_{i,j}^{n+1} + AD(\mathbf{W}_{i,j}^n), \quad (4.30)$$

kde

$$AD(\mathbf{W}_{ij}^n) = C_1 \psi_1 (\mathbf{W}_{i+1,j}^n - 2\mathbf{W}_{ij}^n + \mathbf{W}_{i-1,j}^n) + C_2 \psi_2 (\mathbf{W}_{ij+1}^n - 2\mathbf{W}_{ij}^n + \mathbf{W}_{ij-1}^n) \quad (4.31)$$

a pro funkce ψ_1 a ψ_2 platí

$$\psi_1 = \frac{|p_{i+1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i-1,j}^n|}{|p_{i+1,j}^n| + 2|p_{i,j}^n| + |p_{i-1,j}^n|}, \quad (4.32)$$

$$\psi_2 = \frac{|p_{i,j+1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j-1}^n|}{|p_{i,j+1}^n| + 2|p_{i,j}^n| + |p_{i,j-1}^n|}. \quad (4.33)$$

Ze vztahů (4.32) a (4.33) vyplývá charakter použité numerické vazkosti založené na korekci tlaku. Volba koeficientů C_1 a C_2 musí být pečlivě provedena s ohledem na výsledné řešení, přídavná umělá vazkost nesmí narušovat nebo měnit fyzikální charakter řešení. Rozbor implementace numerické vazkosti pro řešení Eulerových a Navier-Stokesových rovnic lze nalézt v literatuře [40], [41] a [42].

4.4 Volba časového kroku a stabilita

Vhodná volba časového kroku je předpokladem stability. Pro výpočet časového kroku v případě řešení Eulerových rovnic byla použita následující podmínka časového kroku

$$\Delta t \leq \frac{CFL}{\frac{|u_{max}| + c}{\Delta x_{min}} + \frac{|v_{max}| + c}{\Delta y_{min}}} \quad (4.34)$$

a v případě řešení Navier-Stokesových rovnic ve tvaru

$$\Delta t \leq \frac{CFL}{\frac{|u_{max}| + c}{\Delta x_{min}} + \frac{|v_{max}| + c}{\Delta y_{min}} + \frac{2}{Re} \left(\frac{1}{\Delta x_{min}^2} + \frac{1}{\Delta y_{min}^2} \right)}, \quad (4.35)$$

kde c je lokální rychlost zvuku, u_{max} a v_{max} jsou maximální hodnoty složek rychlosti u a v proudového pole ve výpočtové oblasti, Δx_{min} , Δy_{min} jsou minimální velikosti oka sítě ve výpočtové oblasti a Re je Reynoldsovo číslo ze vztahu (2.14). Courant-Friedrichs-Lewyho číslo, neboli CFL podmínka, je volena v obou případech $CFL = 0,7$. Odvození lze nalézt v publikaci Kozla a Dvořáka [23].

4.5 Konvergence výpočtu

Konvergence výpočtu je sledována pomocí L_2 normy stacionárních reziduí, jenž je určena vztahem

$$\| \text{Rezidum } \mathbf{W} \|_{L_2} = \sum_{i,j} \sqrt{\frac{1}{N} \left(\frac{\mathbf{W}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{W}_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2}, \quad (4.36)$$

kde

$$N = \sum_{i,j} 1. \quad (4.37)$$

Výpočet musí s každou další iterací konvergovat k ustálenému řešení. V ideálním případě, pokud má úloha stacionární řešení, hodnota rezidua dosáhne hodnoty strojové nuly. V praxi však považujeme za ustálené řešení i takové řešení, které se s dalšími iteracemi už dále nemění.

4.6 Volba sítě

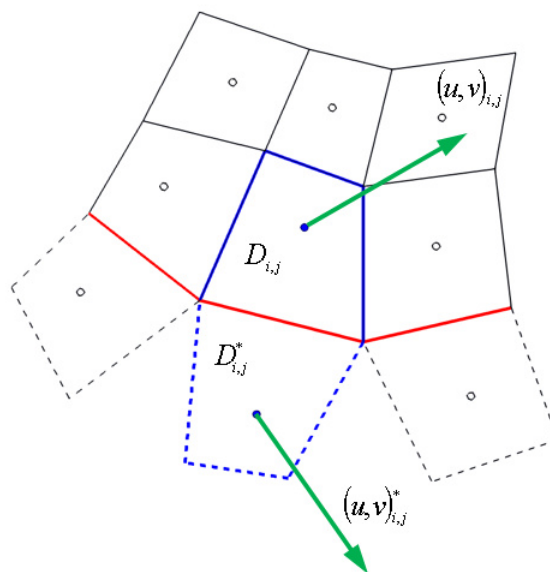
Pro řešení nevazkého proudění byla zvolena strukturovaná čtyřúhelníková rovnoměrná síť. Pro případ vazkého proudění byla zvolena nerovnoměrná strukturovaná čtyřúhelníková síť, dostatečně hustá pro zachycení velkého gradientu ω ve vazké podvrstvě u $k - \omega$ modelu. Minimální krok sítě napříč mezní vrstvou je přibližně volen podle

$$\Delta y_{min} \approx \frac{1}{\sqrt{Re}}. \quad (4.38)$$

4.7 Realizace okrajových podmínek

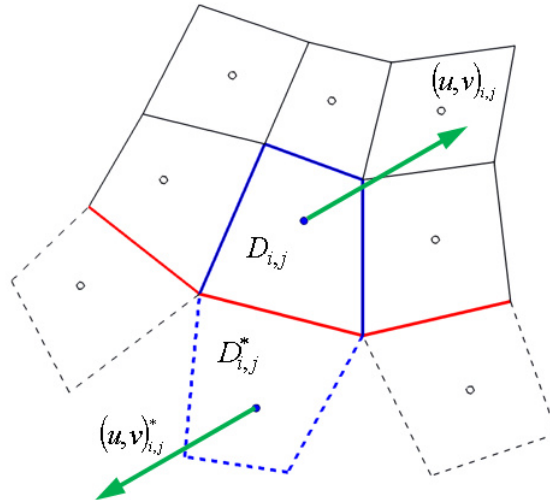
Pro zaručení správné implementace okrajových podmínek popsaných v odstavci 2.5 jsou k diskreditované výpočtové oblasti přidány myšlené buňky (na následujících obr. znázorněny čárkovaně), které přiléhají k vnější straně hranice oblasti. Realizace okrajových podmínek je až na pevnou stěnu u obou případů nevazkého a vazkého proudění shodná. Příklad pevné stěny tak vyžaduje správnou implementaci okrajové podmínky.

V případě nevazkého proudění je stěna dokonale hladká a podmínku předepíšeme podle obr. 4.2 jako zrcadlení vektoru rychlosti.



Obr. 4.2: Okrajová podmínka pro rychlost na pevné stěně - nevazké proudění

Okrajovou podmínku pro rychlost na pevné stěně u vazkého proudění předepíšeme podle obr. 4.3, protože vazká tekutina ulpívá na pevné stěně a rychlost proudění se s klesající vzdáleností od stěny snižuje, až je na stěně nulová.



Obr. 4.3: Okrajová podmínka pro rychlost na pevné stěně - vazké proudění

Okrajovou podmínku na vstupu předepíšeme s ohledem na rychlost nabíhajícího proudu. Pokud je rychlost nabíhajícího proudu nižší než lokální rychlost zvuku, předepisujeme hustotu, vektor rychlosti a tlak extrapolujeme z proudového pole. V případě, že rychlost nabíhajícího proudu je vyšší nebo rovna lokální rychlosti zvuku, předepisujeme hustotu, vektor rychlosti a tlak. Energie se dopočítává ze stavové rovnice.

Okrajovou podmínku na výstupu realizujeme v případě subsonického výstupu tak, že volíme tlak a ostatní hodnoty extrapolujeme z vnitřku výpočtové oblasti, v případě supersonického výstupu všechny hodnoty na výstupu extrapolujeme. Energie se opět dopočítává ze stavové rovnice.

Periodická podmínka se předepisuje tak, že se do myšlených buněk vně výpočtové oblasti vkládají hodnoty z hraničních buněk příslušné periodické hranice.

5 Výpočet proudění

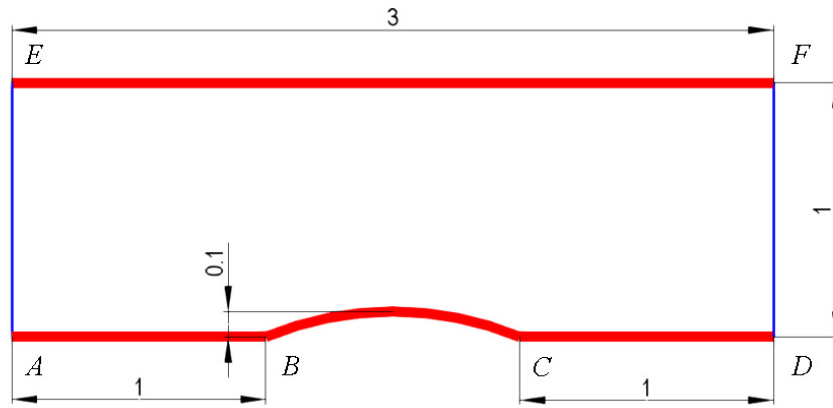
V této kapitole jsou uvedeny výsledky numerických řešení proudění tekutiny, které byly spočítány vlastním řešičem naprogramovaným v jazyku C v průběhu doktorského studia. Pomocí vlastního generátoru sítě je nejdříve vytvořena vhodná výpočtová síť strukturovaných čtyřúhelníků s rovnoměrným dělením pro výpočty systému Eulerových rovnic a s nerovnoměrným dělením splňujícím podmínku (4.38) pro případ řešení Navier-Stokesových rovnic. Před výpočtem samotným se do programu načte příslušný soubor sítě spolu s typem okrajové podmínky na hranicích sítě. Ze souboru definujícího proudění se načtou parametry proudění na vstupní a výstupní hranici a určí se typ proudění, který je požadován, v případě Eulerových rovnic nevazký typ, v případě Navier-Stokesových rovnic vazké proudění a spolu s tím i typ modelu turbulence. Načítané parametry jsou Machovo číslo a úhel náběhu, hustota, teplota a tlak nabíhajícího nerozrušeného proudu, v případě vazkého proudění Reynoldsovo číslo. Hodnoty veličin nerozrušeného proudu v bezrozměrném tvaru byly zvoleny jako: $\rho_\infty = 1$, $T_\infty = 1$ a $p_\infty = 1/\kappa$. Výpočet je řízen kontrolou konvergence řešení podle vztahu (4.36). Kontrolované veličiny jsou hustota a velikosti složek rychlosti. Výsledky jsou zobrazeny v programu Tecplot 360.

5.1 Proudění v GAMM kanálu

Proudění v GAMM kanálu slouží jako testovací případ k validaci numerických metod a ke kalibraci konstant. Geometrie výpočtové oblasti GAMM kanálu je zobrazena na obr. 5.1. Vstup do oblasti je dán úsečkou AE , výstup z oblasti úsečkou DF , obě zobrazeny modře. Červenými úsečkami AB , CD , EF a profilem BC je dána pevná hranice oblasti. Profil BC je kruhový s poloměrem $R = 1,3$ zasahující do 10% průřezu GAMM kanálu.

Souřadnice bodů dle obr. 5.1 jsou:

$$A = [0;0], B = [1;0], C = [2;0], D = [3;0], E = [0;1], F = [3;1].$$

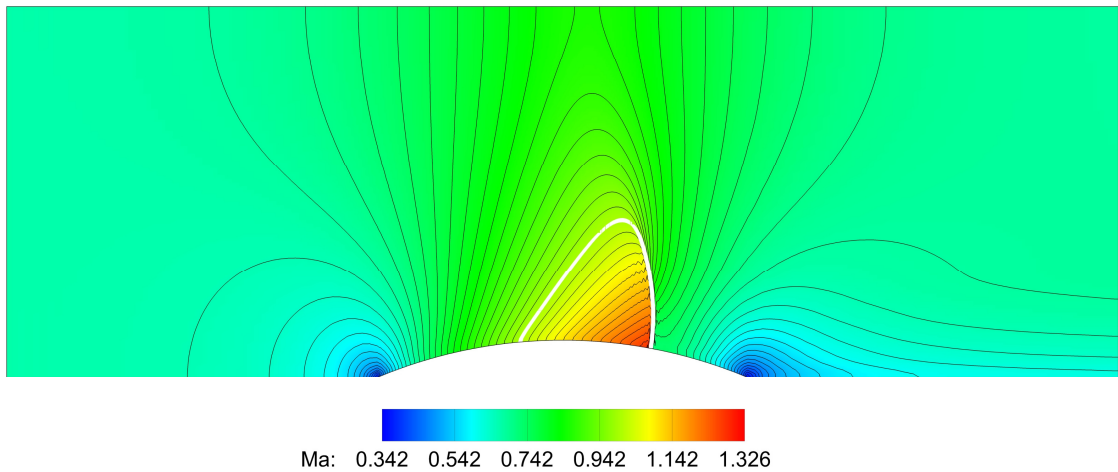


Obr. 5.1: Geometrie výpočtové oblasti GAMM kanálu

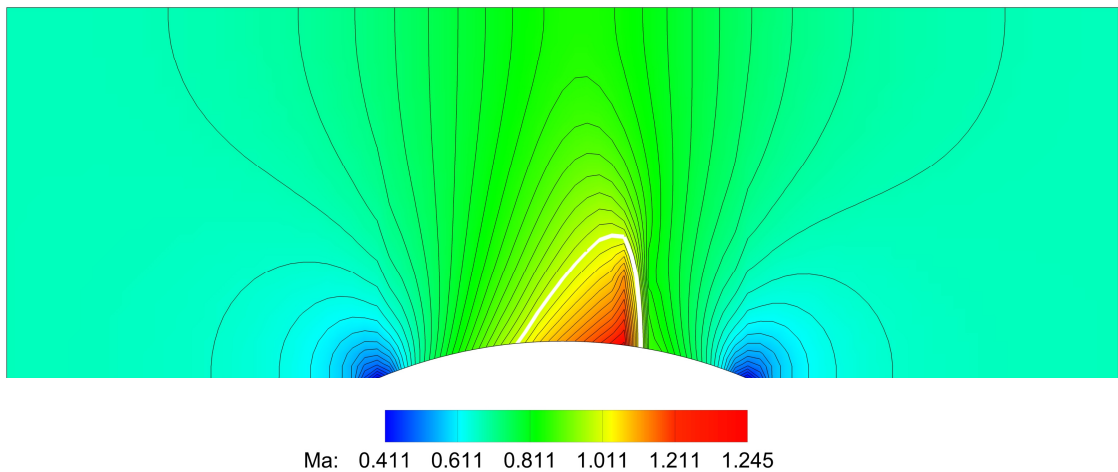
V případě GAMM kanálu byla řešena testovací úloha pro nabíhající rychlost vstupního proudu $Ma_\infty = 0,675$ s nulovým úhlem náběhu. Úloha byla postupně řešena pro čtyři případy, nevazké proudění a vazké proudění s algebraickým Baldwin-Lomaxovým modelem turbulence, modelem k-omega podle Wilcoxe s příčnou difuzí a STT k-omega modelem turbulence. U nevazkého proudění byla použita strukturovaná rovnoměrná čtyřúhelníková síť s dělením 300×120 buněk, v případě vazkého proudění potom strukturovaná čtyřúhelníková síť s nerovnoměrným dělením 160×120 buněk, přičemž byla dodržena podmínka dělení daná vztahem (4.38).

Na vstupu oblasti bylo předepsáno Machovo číslo a úhel náběhu, na výstupu z oblasti byl předepsán tlak $p_{out} = p_\infty$. U vazkého proudění bylo navíc předem určeno Reynoldsovo číslo. Okrajové podmínky byly předepsány způsobem uvedeným v odstavci 4.7.

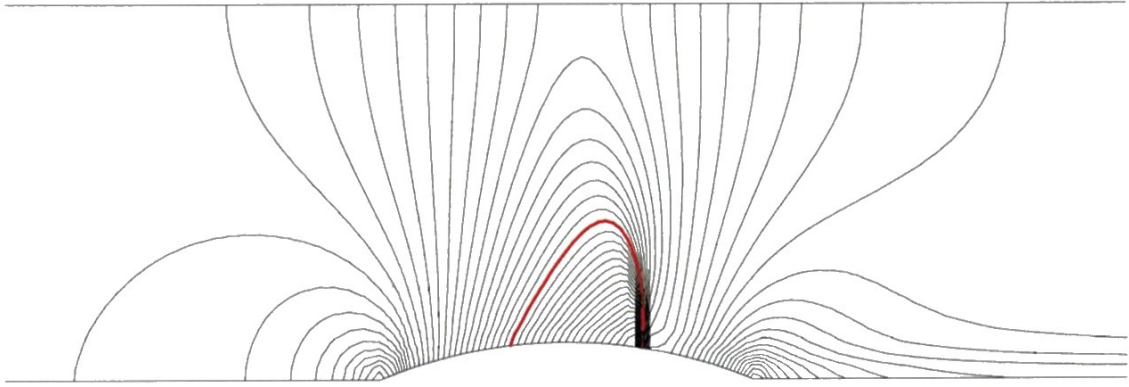
Řešení nevazkého proudění pro model systému Eulerových rovnic pomocí základního MacCormackova schématu je zobrazeno na obr. 5.2. Pro srovnání je na obr. 5.3 uvedeno řešení úplné potenciální rovnice na síti 150×50 publikované autorem v diplomové práci [2]. Na obr. 5.4 a obr. 5.5 je uvedeno řešení systému Eulerových rovnic pomocí TVD MacCormackova schématu a modifikovaného TVD MacCormackova schématu podle Causona na síti 90×30 buněk publikované Fürstem [11]. Z výsledků je patrné, že základní MacCormackovo schéma méně vyhlazuje řešení v oblasti nespojitosti. Ke srovnatelně dobrým výsledkům jako v případě výsledků Fürsta na obr. 5.4 a obr. 5.5 je zapotřebí jemnější síť. Výsledky nevazkého proudění byly autorem publikovány v pracích [15], [16], [17], [19] a [21].



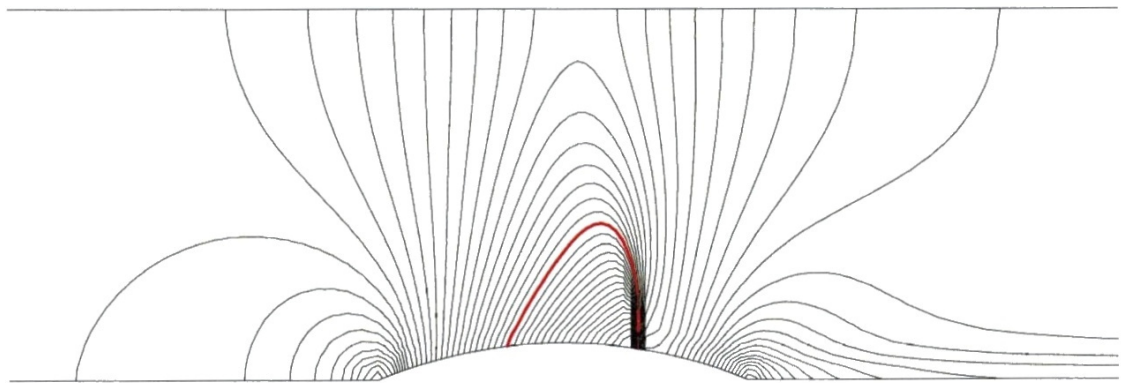
Obr. 5.2: Nevazké proudění v GAMM kanálu, izočáry Machova čísla, $Ma_\infty = 0,675$, síť 300×120



Obr. 5.3: Nevazké proudění v GAMM kanálu, izočáry Machova čísla, $Ma_\infty = 0,675$, síť 150×50 , úplná potenciální rovnice, Slouka [2]

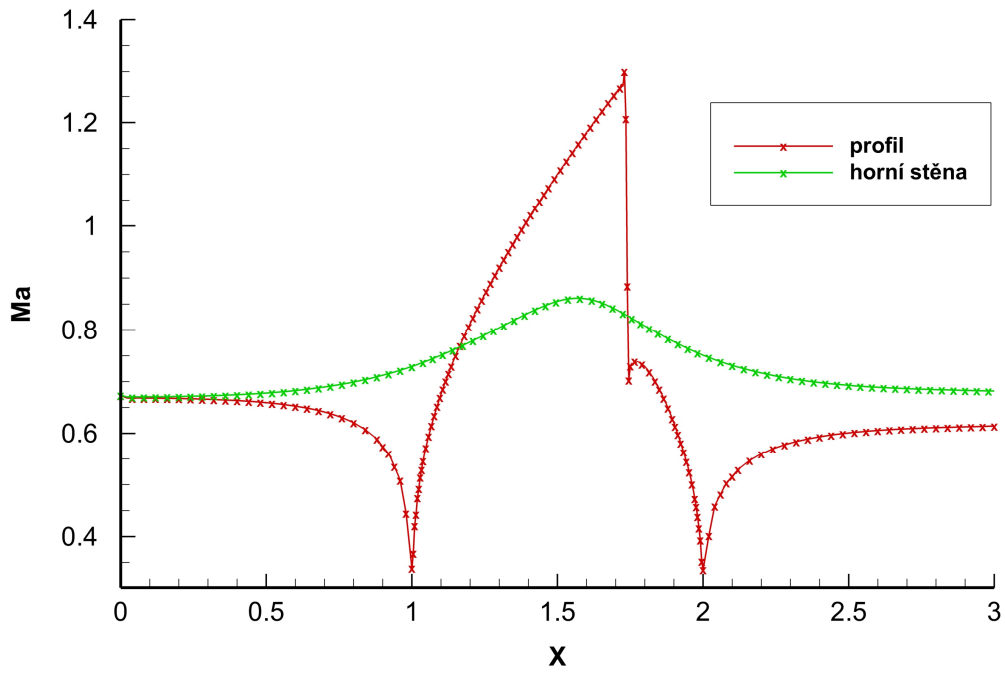


Obr. 5.4: Nevazké proudění v GAMM kanálu, izočáry Machova čísla, $Ma_\infty = 0,675$, síť 90×30 , TVD MacCormackovo schéma Fürst [11]

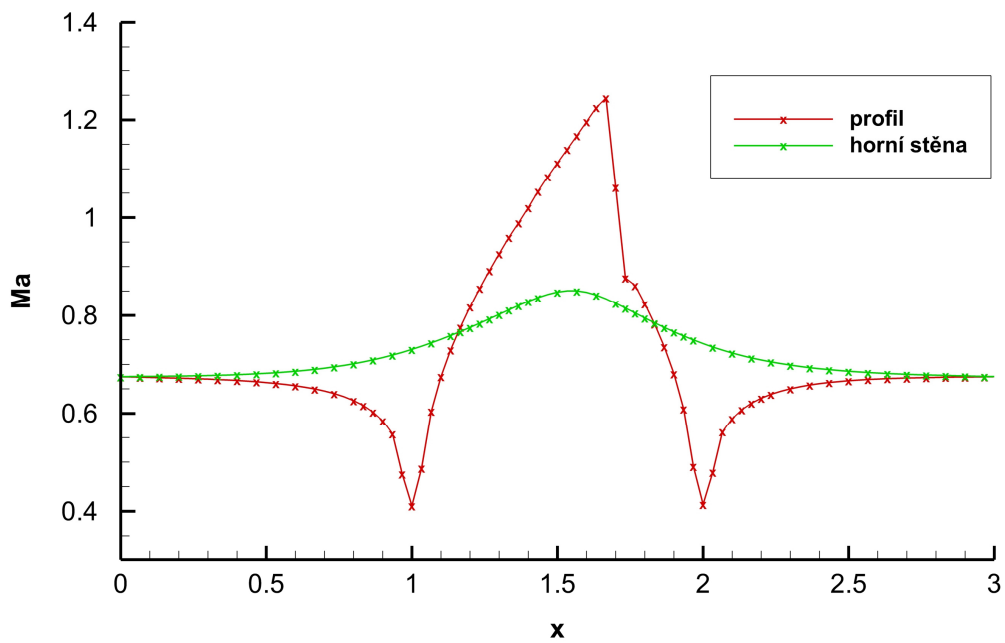


Obr. 5.5: Nevazké proudění v GAMM kanálu, izočáry Machova čísla, $Ma_\infty = 0,675$, síť 90×30 , TVD MacCormackovo schéma v Causonově úpravě Fürst [11]

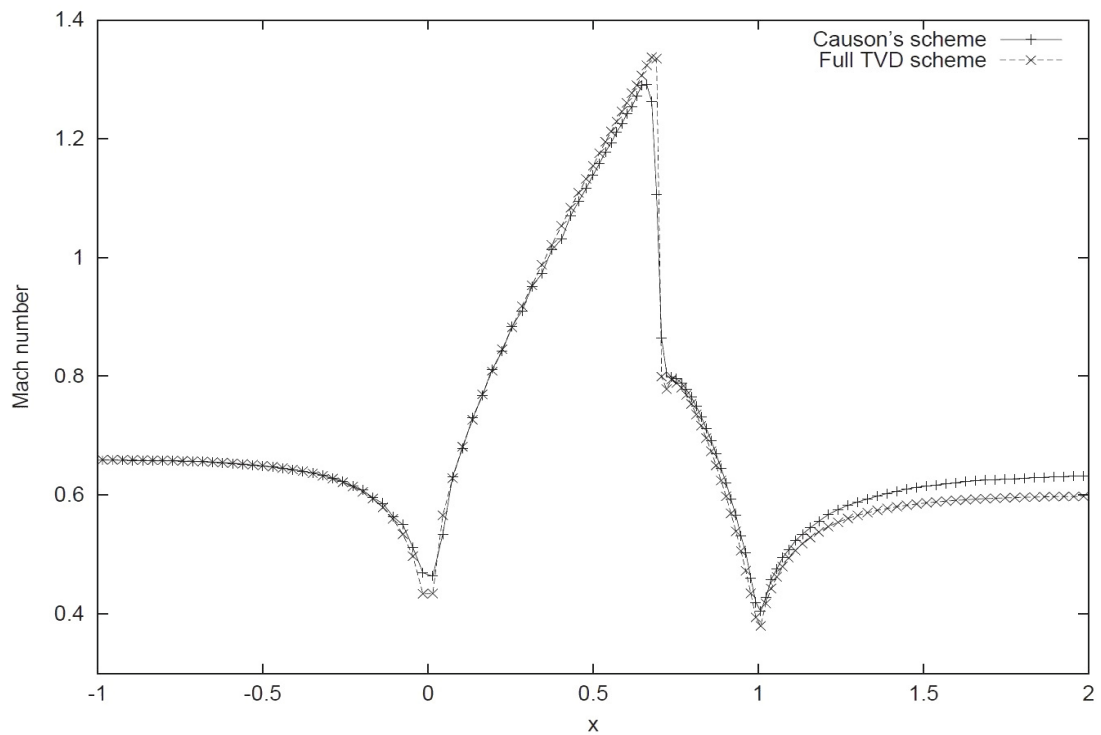
Průběh Machova čísla na stěnách GAMM kanálu je znázorněn na obr. 5.6 a srovnání s výsledkem Fürsta na obr. 5.8. Zde je vidět poměrně dobrá shoda. Průběh Machova čísla řešením úplné potenciální rovnice je uveden na obr. 5.7, výsledek je už méně kvalitní, což vyplývá z charakteru zvoleného matematického modelu a z poměrně hrubé sítě. Hodnota maximálního Machova čísla je srovnatelná ve všech případech řešení systému Eulerových rovnic. Jeho hodnota je $Ma_{max} = 1,326$ pro výsledek řešení z obr. 5.6. Poloha rázové vlny a charakteristická nespojitost v těsné oblasti za rázovou vlnou je rovněž srovnatelná. V případě úplné potenciální rovnice je hodnota maximálního Machova čísla nižší, $Ma_{max} = 1,240$, charakteristická nespojitost v oblasti těsně za rázovou vlnou není dobře zachycena. Na obr. 5.9 je pro doplnění znázorněn průběh konvergence.



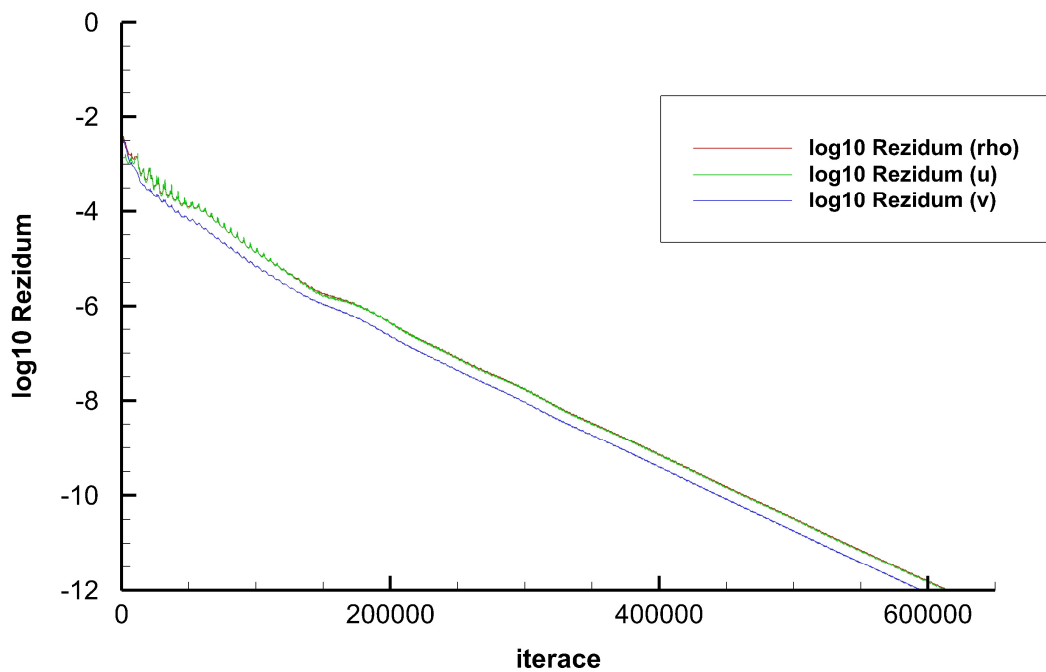
Obr. 5.6: Nevazké proudění v GAMM kanálu, $Ma_\infty = 0,675$,
průběh Machova čísla podél stěn k výpočtu z obr. 5.2



Obr. 5.7: Nevazké proudění v GAMM kanálu, $Ma_\infty = 0,675$,
průběh Machova čísla podél stěn, úplná potenciální rovnice, Slouka [2]

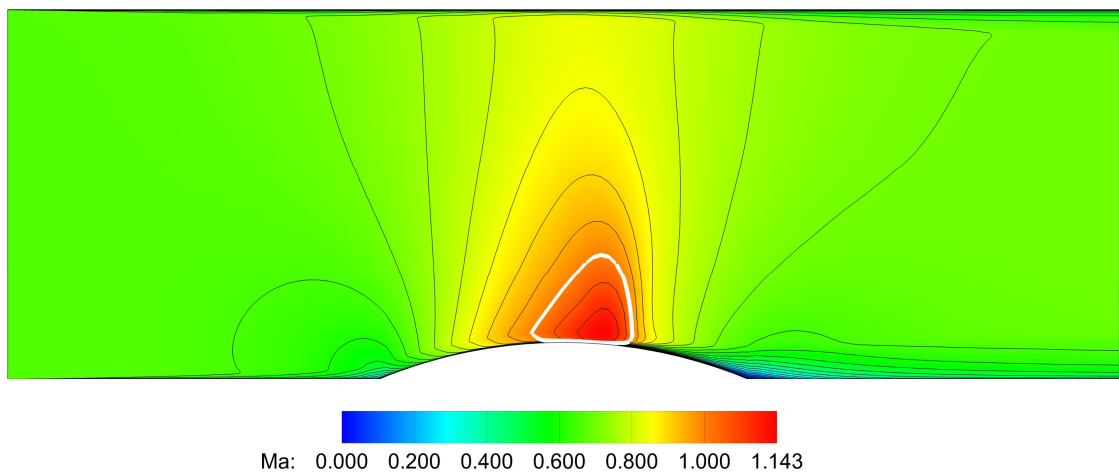


Obr. 5.8: Nevazké proudění v GAMM kanálu, $Ma_\infty = 0,675$,
průběh Machova čísla podél profilu, Fürst [12]

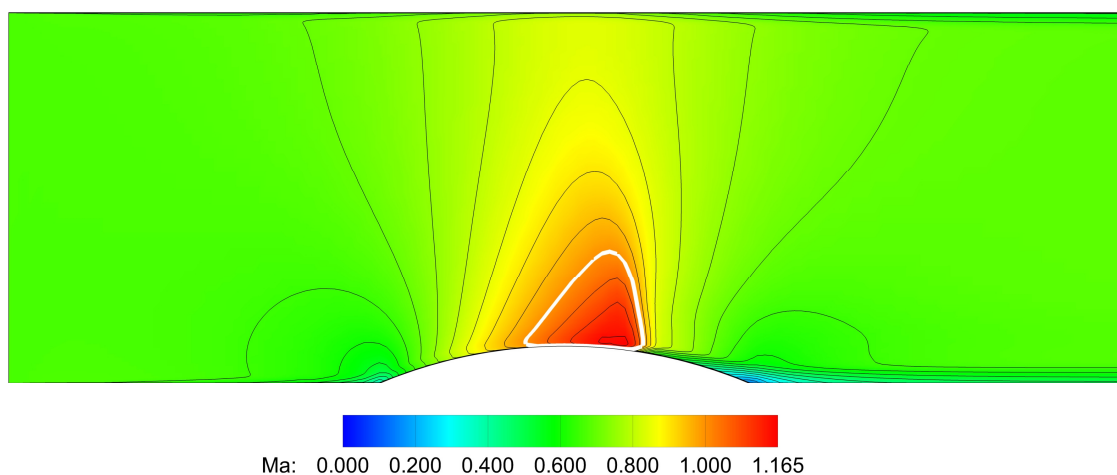


Obr. 5.9: Nevazké proudění v GAMM kanálu, $Ma_\infty = 0,675$,
průběh rezidua odpovídající výpočtu z obr. 5.2

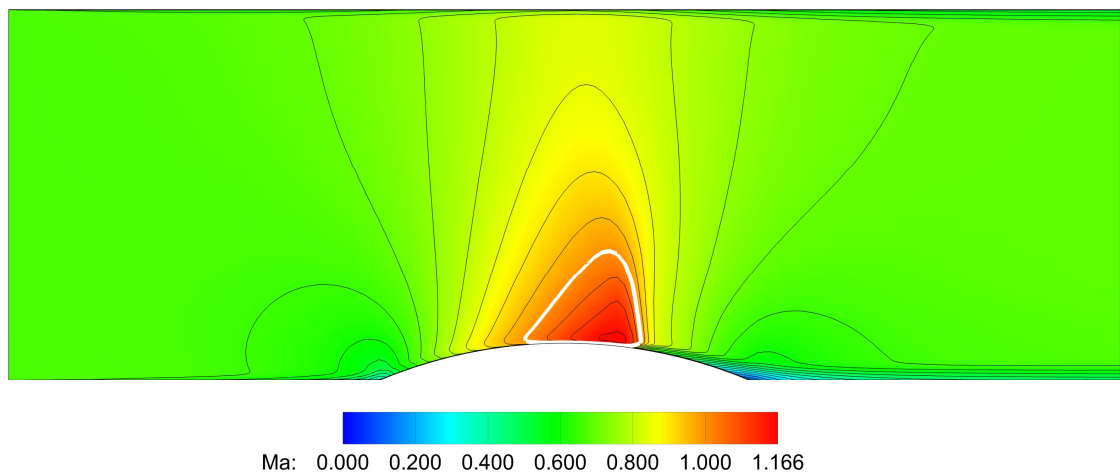
Výsledek řešení vazkého proudění s algebraickým modelem turbulence Baldwin a Lomaxe je zachycen na obr. 5.10, v případě Wilcoxova k-omega modelu na obr. 5.11 a pro STT k-omega model turbulence na obr. 5.12. U všech tří výsledků je patrná poměrně dobrá vzájemná shoda, za profilem je přítomen úplav, maximální hodnota Machova čísla je nižší než v případě výsledku nevazkého proudění, tvar a poloha zvukové čáry je srovnatelná. Pro doplnění je na obr. 5.13 znázorněn průběh konvergence. Výsledky vazkého turbulentního proudění byly autorem publikovány v pracích [17], [19] a [21].



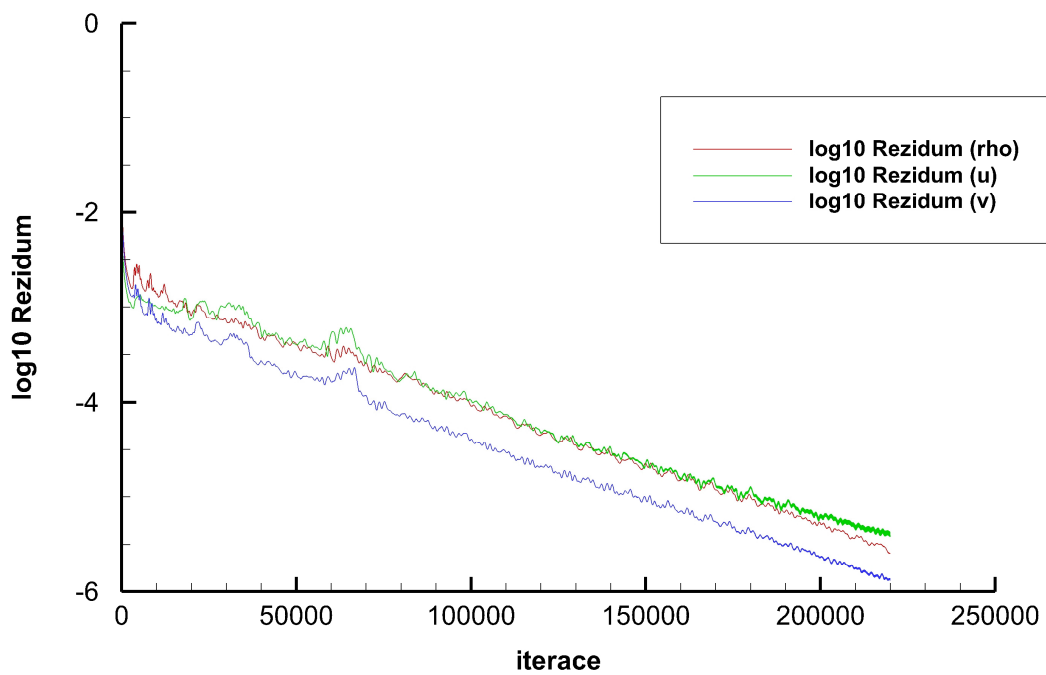
Obr. 5.10: Vazké proudění v GAMM kanálu, izočáry Machova čísla, $Ma_\infty = 0,675$, $Re = 10^6$,
Baldwin-Lomaxův model turbulence



Obr. 5.11: Vazké proudění v GAMM kanálu, izočáry Machova čísla, $Ma_\infty = 0,675$, $Re = 10^6$,
Wilcoxův k- ω model turbulence



Obr. 5.12: Vazké proudění v GAMM kanálu, izočáry Machova čísla, $Ma_\infty = 0,675$, $Re = 10^6$,
SST $k-\omega$ model turbulence



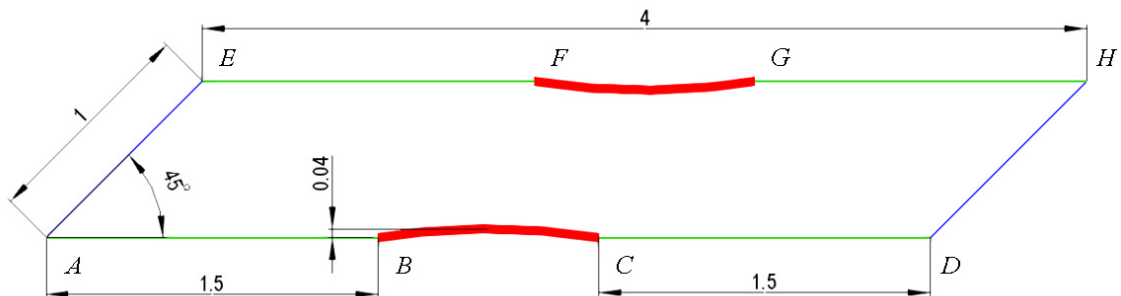
Obr. 5.13: Vazké proudění v GAMM kanálu, $Ma_\infty = 0,675$,
průběh rezidua odpovídající výpočtu z obr. 5.12

5.2 Proudění v DCA mříži

Proudění v DCA (Double Circular Arc) mříži simuluje proudění mezi dvěma lopatkami turbínové mříže. Geometrie výpočtové oblasti DCA mříže je zobrazena na obrázku 5.14. Vstup do oblasti je dán úsečkou AE , výstup z oblasti úsečkou DH , obě zobrazeny modře. Červeně je dána pevná hranice oblasti profily BC a FG . Ty jsou kruhové, s poloměrem $R = 3,125$, zasahující celkem do 8% průřezu DCA mříže z obou stran s poměrnou roztečí 1 a úhlem nastavení 45° . Zelenými úsečkami AB , CD , EF a GH jsou dány periodické hranice oblasti. Body A a E resp. D a H byly zvoleny jako navzájem posunuty stejně jako profily z důvodu snadné realizace periodické okrajové podmínky.

Souřadnice bodů dle obr. 5.14 jsou: $A = [0;0]$, $B = [1,5;0]$, $C = [2,5;0]$, $D = [4;0]$,

$$E = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right], F = \left[1,5 + \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right], G = \left[2,5 + \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right], H = \left[4 + \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right].$$



Obr. 5.14: Geometrie výpočtové oblasti DCA mříže

Numerickými výpočty proudění v DCA mříži bylo řešeno proudění vzduchu mezi dvěma profily simulujícími lopatky turbínové mříže. Byly zvoleny celkem čtyři různé konfigurace, které vychází z výsledků experimentů provedených Dvořákem [1] zobrazujících izočáry Machova čísla. Pro každou konfiguraci byly řešeny čtyři úlohy založené na nevazkém a vazkém modelu. Vazký model byl pak postupně řešený s doplněným algebraickým modelem turbulence Baldwina a Lomaxe a oběma modifikacemi k-omega modelů podle Wilcoxe s příčnou difuzí a SST modelem. U nevazkého proudění byla použita strukturovaná rovnoměrná čtyřúhelníková síť s dělením 160x80 buněk, pro vazké proudění potom strukturovaná čtyřúhelníková síť

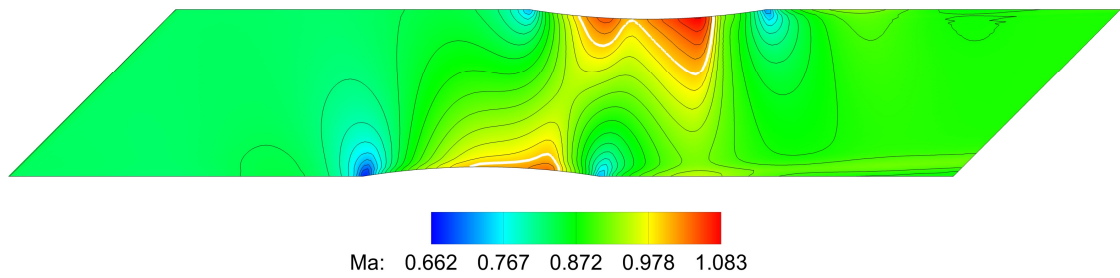
s nerovnoměrným dělením 200x160 buněk, přičemž byla dodržena podmínka dělení daná vztahem (4.38).

Na vstupu oblasti byla předepisována hodnota Machova čísla a úhel náběhu proudu a v případě vazkého proudění hodnota Reynoldsova čísla. Pro případ subsonického vstupu byl tlak extrapolován z proudového pole, u supersonického vstupu byl tlak zadán $p_{in} = p_{\infty}$. Na výstupu byl předepsán tlak pro subsonický režim $p_{out} = p_{\infty}$, pro případ supersonického výstupu byl tlak extrapolován z proudového pole, jak je popsáno v odstavci 4.7. Rovněž okrajové podmínky byly předepsány způsobem uvedeným v tomtéž odstavci.

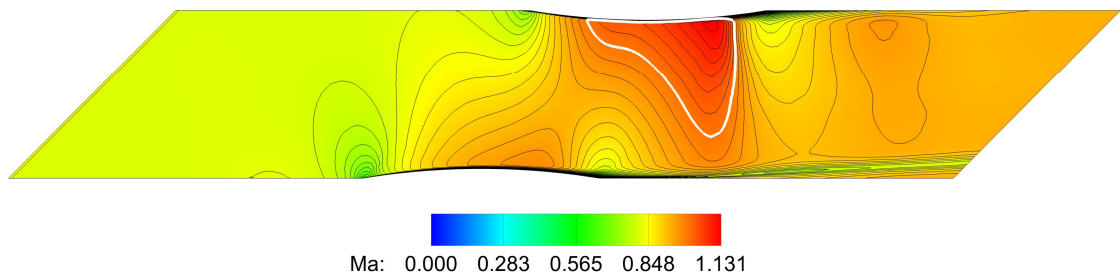
Z experimentálních dat dle obr. 5.19, 5.24, 5.29 a 5.34, které odpovídají testovacím případům A-D, je patrné, že první tři mají podzvukový vstup a poslední má vstup nadzvukový. Pro všechny řešené případy bylo nutné zvolit hodnotu vstupního Machova čísla vyšší, než je uváděna v experimentu. Ve výpočtech byl proto podzvukový vstup zvolen jen pro případ A a B, nadzvukový vstup pak pro případ C a D. Byl rovněž aplikován poznatek publikovaný Kozlem, Poláškem a Vavřincovou [8], že změnou úhlu náběhu vstupního proudu v rozmezí intervalu $(-3^{\circ}; 3^{\circ})$ lze docílit změnu tvaru zvukové čáry na profilu. Všechny následující obrázky zobrazují izočáry Machova čísla, zvuková čára v experimentu je zobrazena červeně, bíle potom pro případy numerických simulací. Proudění je ve směru zleva doprava. Výsledky nevazkého proudění byly autorem publikovány v pracích [16], [17], [18], [19] a [21]. Výsledky vazkého turbulentního proudění byly autorem publikovány v pracích [17], [18], [19] a [21], přičemž ve všech pracích byly řešeny i další návrhové režimy.

5.2.1 Testovací případ A

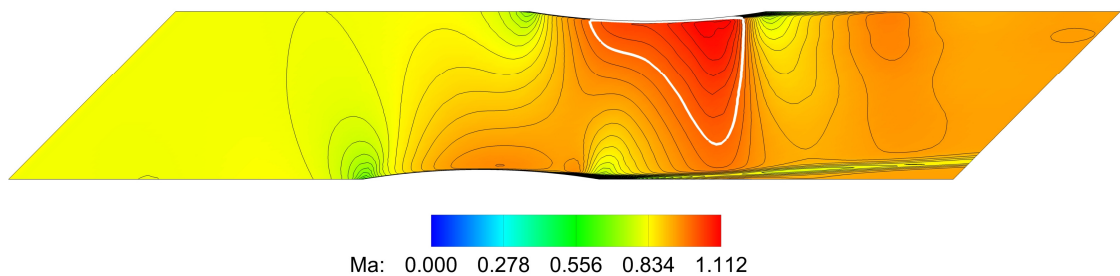
Testovací případ A je uveden pro interferometrické měření na obr. 5.19 se vstupní hodnotou Machova čísla $Ma_{\infty} = 0,813$. Nevazký model na obr. 5.15 zobrazuje zvukovou čáru na horním profilu, na spodním profilu je rovněž zachycena zvuková čára, která ale v experimentu patrna není. Pro případy simulací vazkého proudění na obr. 5.16, 5.17 a 5.18, které odpovídají příslušným modelům turbulence, je zvuková čára zachycena pouze na horní lopatce, přičemž poloha a tvar jsou u všech tří výsledků navzájem si odpovídající, blíží se experimentu.



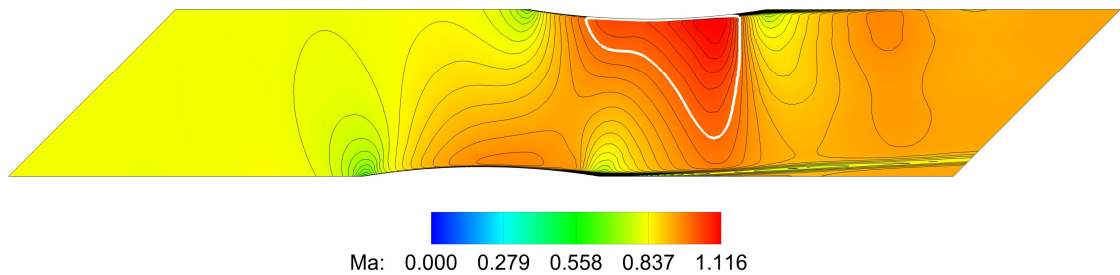
Obr. 5.15: Nevazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,850$, $\alpha = 0,5^\circ$



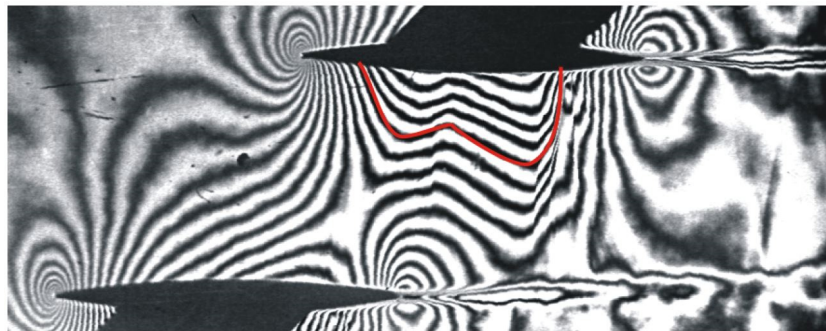
Obr. 5.16: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,860$, $\alpha = -0,5^\circ$, $Re = 10^6$,
Baldwin-Lomaxův model turbulence



Obr. 5.17: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,860$, $\alpha = -0,5^\circ$, $Re = 10^6$,
Wilcoxův $k-\omega$ model turbulence



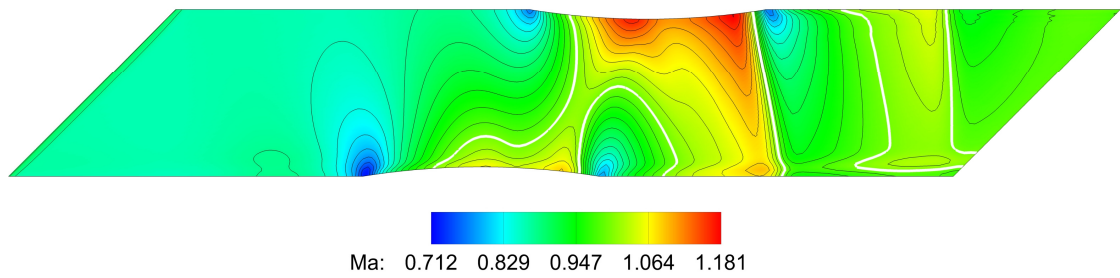
Obr. 5.18: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,860$, $\alpha = -0,5^\circ$, $Re = 10^6$,
SST $k-\omega$ model turbulence



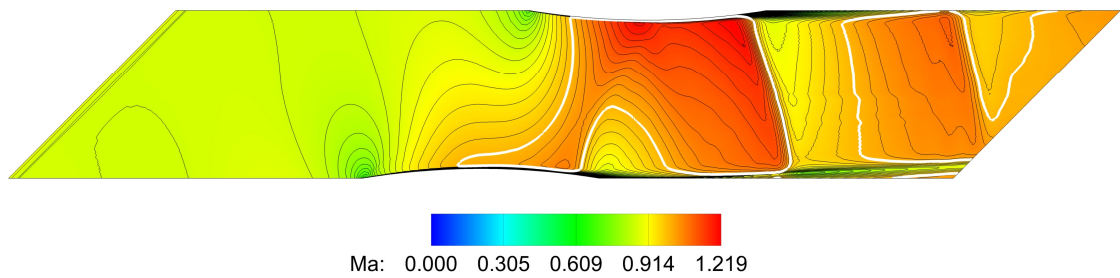
Obr. 5.19: Proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,813$, $\alpha = 0^\circ$,
experimentální data

5.2.2 Testovací případ B

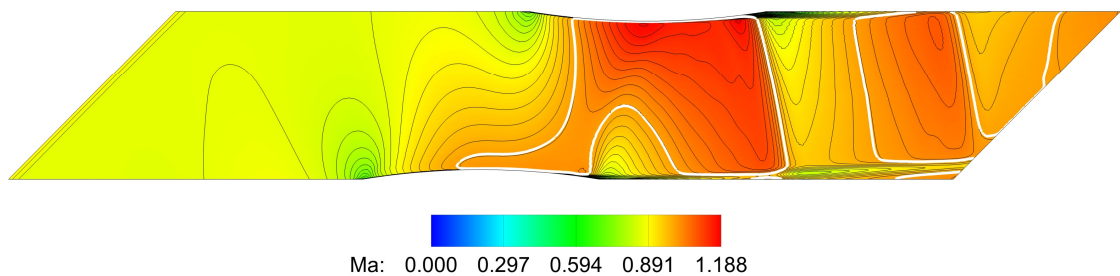
Testovací případ B je uveden pro interferometrické měření z obr. 5.24 se vstupní hodnotou Machova čísla $Ma_\infty = 0,849$. Nevazký model na obr. 5.20 poměrně dobře zachycuje polohu a tvar zvukové čáry, jenž je propojena na náběžné hraně s oběma profily. Případy simulací vazkého proudění na obr. 5.21, 5.22 a 5.23 jsou v poměrně dobré vzájemné shodě, přičemž lepších výsledků je dosaženo modely $k-\omega$. Poloha zvukové čáry na náběžné hraně je lehce posunuta směrem doprava vzhledem k experimentu. Tvar a poloha zvukové čáry na odtokové hraně jsou také v dobré shodě.



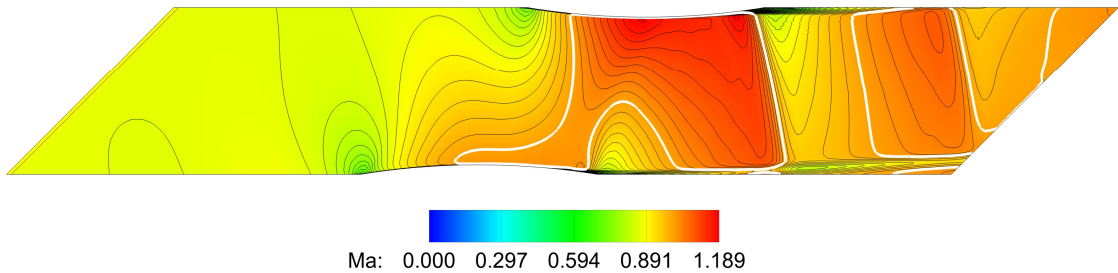
Obr. 5.20: Nevazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,920$, $\alpha = -2,0^\circ$



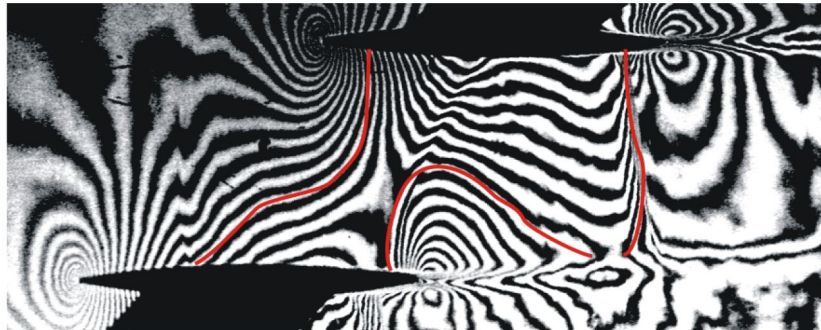
Obr. 5.21: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,930$, $\alpha = -2,0^\circ$, $Re = 10^6$,
Baldwin-Lomaxův model turbulence



Obr. 5.22: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,930$, $\alpha = -2,0^\circ$, $Re = 10^6$,
Wilcoxův $k-\omega$ model turbulence



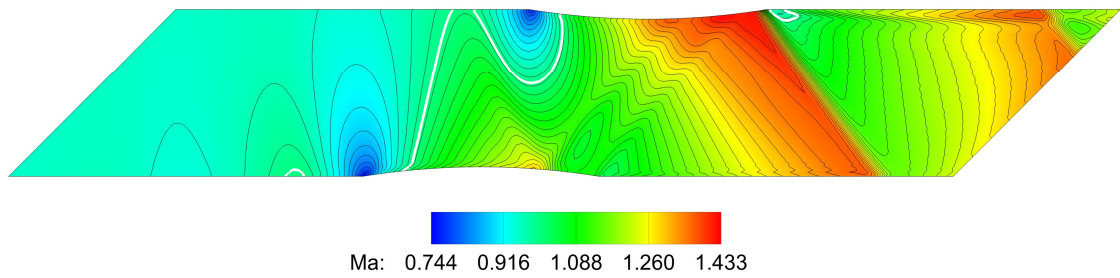
Obr. 5.23: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,930$, $\alpha = -2,0^\circ$, $Re = 10^6$,
SST $k-\omega$ model turbulence



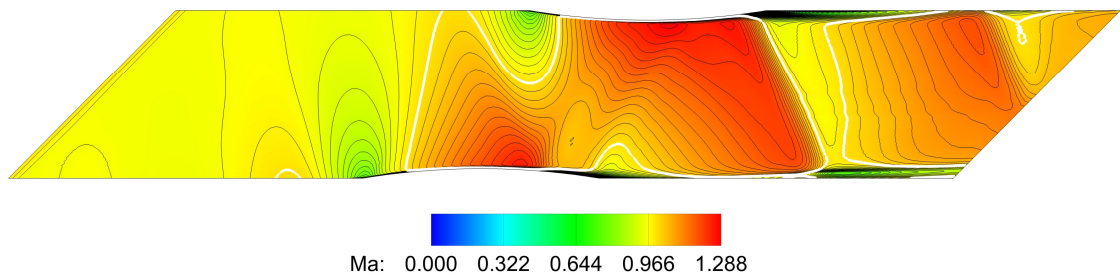
Obr. 5.24: Proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,849$, $\alpha = 0^\circ$,
experimentální data

5.2.3 Testovací případ C

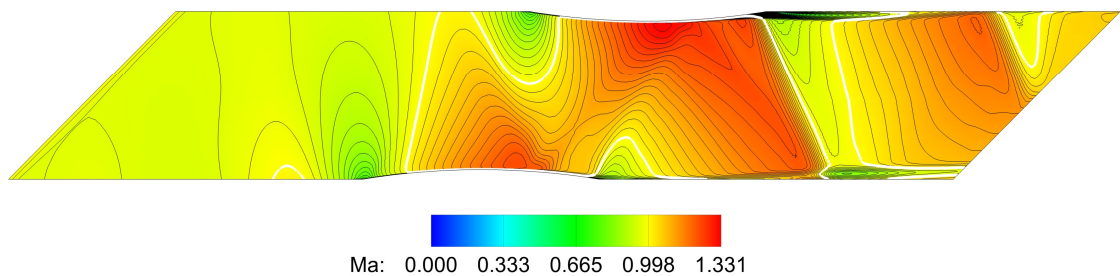
Výsledky numerických simulací pro testovací případ C jsou uvedeny pro konfiguraci interferometrického měření na obr. 5.29, jenž odpovídá vstupní hodnotě Machova čísla $Ma_\infty = 0,946$. Jak již bylo zmíněno, přestože se v případě experimentálních dat jedná o podzvukový vstup, pro uvedené výsledky simulací byl zvolen vstup mírně nadzvukový bez modifikace úhlu náběhu. Nevazký model na obr. 5.25 a všechny vazké modely z obr. 5.26, 5.27 a 5.28 spojuje poměrně výrazná zvuková čára vytvářející se na náběžné hraně spodního profilu. Za ní je téměř celá oblast v případě nevazkého modelu nadzvuková s výraznými nespojitostmi, v případě vazkého modelu rovněž nadzvuková s nespojitostmi a zvukovými čarami za oběma profily v oblasti úplavu. Modely k - ω vykazují vyšší hodnoty maximálního Machova čísla ve srovnání s modelem Baldwina a Lomaxe. Srovnáme-li všechny výsledky s experimentálními daty, jsou v poměrně dobré shodě jak polohou, tak tvarem zvukové čáry v oblasti náběžných hran a profilů samotných, oblast za profily nelze kvůli chybějícím datům experimentu srovnat.



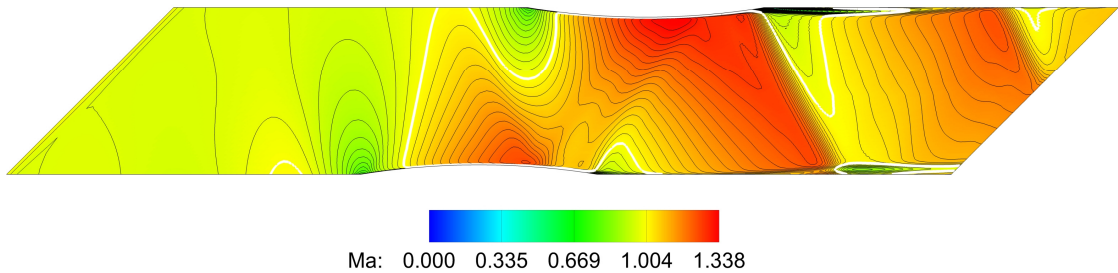
Obr. 5.25: Nevazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,010$, $\alpha = 0^\circ$



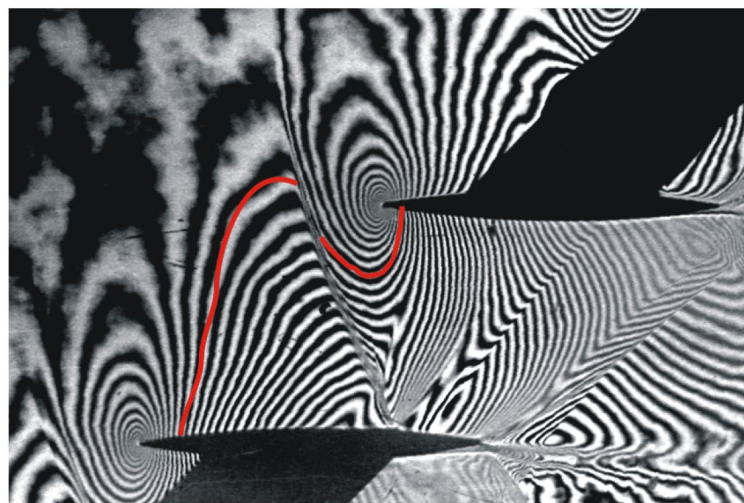
Obr. 5.26: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,020$, $\alpha = 0^\circ$, $Re = 10^6$,
Baldwin-Lomaxův model turbulence



Obr. 5.27: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,020$, $\alpha = 0^\circ$, $Re = 10^6$,
Wilcoxův $k-\omega$ model turbulence



Obr. 5.28: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,020$, $\alpha = 0^\circ$, $Re = 10^6$,
SST $k-\omega$ model turbulence

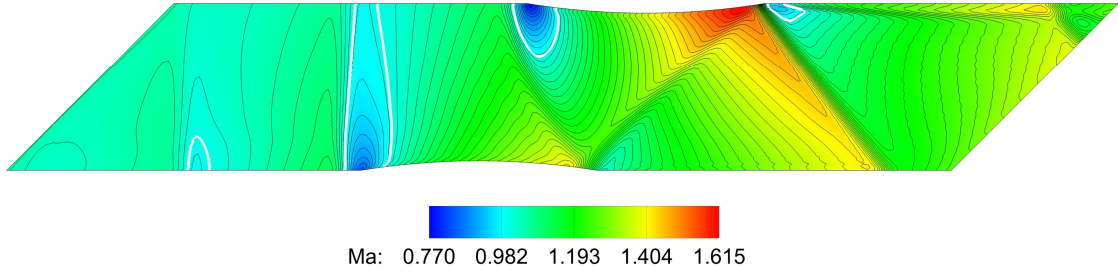


Obr. 5.29: Proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 0,946$, $\alpha = 0^\circ$,
experimentální data

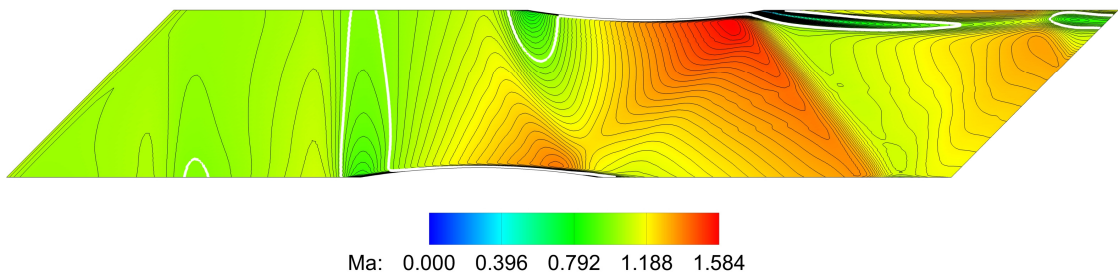
5.2.4 Testovací případ D

Poslední testovací případ D zobrazuje výsledky numerických simulací pro konfiguraci interferometrického měření uvedenou na obr. 5.34, jenž odpovídá vstupní hodnotě Machova čísla $Ma_\infty = 1,073$. Zde se jedná o ryze nadzvukový vstup. Pro numerické simulace byla zvolena hodnota Machova čísla mírně vyšší, než je daná experimentem, úhel náběhu nebyl modifikován. Rovněž i zde, stejně jako v předchozím testovacím případě C, všechna řešení z obr. 5.30, 5.31, 5.32 a 5.33 spojuje velmi výrazná zvuková čára vytvářející se na náběžné hraně spodního profilu, jenž se díky periodické okrajové podmínce zobrazuje podle očekávání částečně i u horního profilu. Za ní je téměř celá oblast v případě nevazkého modelu silně nadzvuková s výraznými nespojitostmi, v případě vazkého modelu rovněž silně nadzvuková s nespojitostmi a zvukovými čarami za profily v oblasti úplavu. Simulace vazkého proudění jsou ve velmi dobré vzájemné

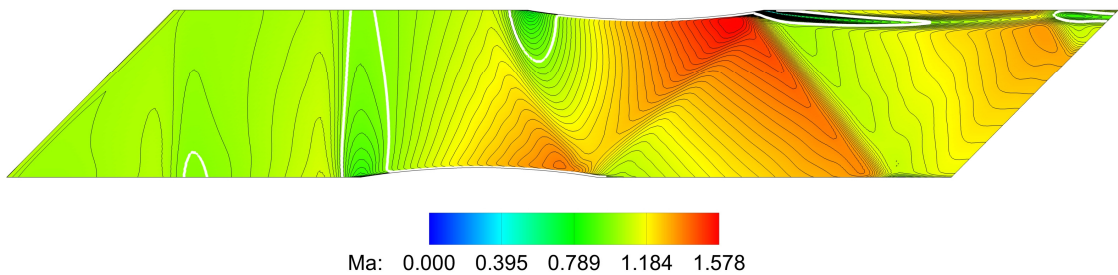
shodě. Srovnáme-li všechny výsledky s interferogramem, jak polohou, tak tvarem si zvukové čáry v oblasti náběžných hran profilů odpovídají. Rovněž nespojitosti v oblasti profilů jsou dobře zachyceny. Oblast za profily nelze s experimentem srovnat, lze předpokládat obdobný průběh, jaký je dán simulacemi.



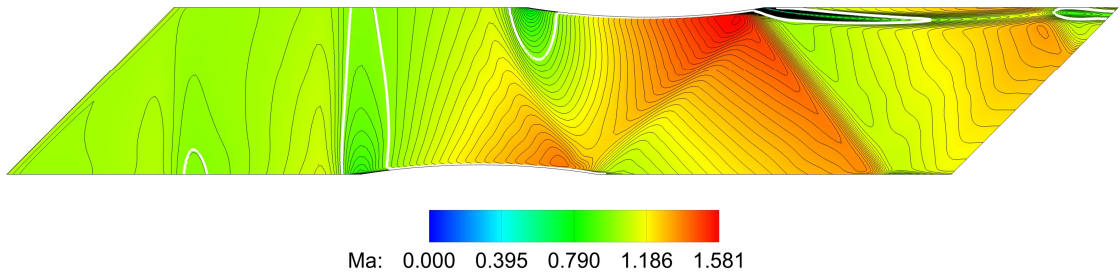
Obr. 5.30: Nevazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,130$, $\alpha = 0^\circ$



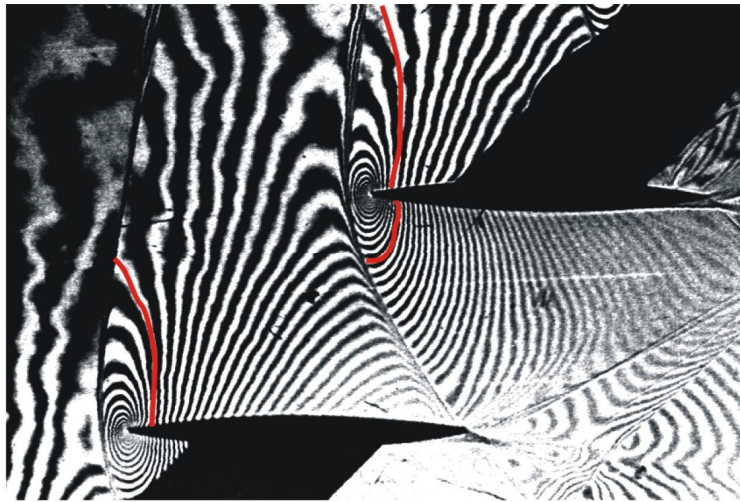
Obr. 5.31: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,135$, $\alpha = 0^\circ$, $Re = 10^6$,
Baldwin-Lomaxův model turbulence



Obr. 5.32: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,135$, $\alpha = 0^\circ$, $Re = 10^6$,
Wilcoxův $k-\omega$ model turbulence



*Obr. 5.33: Vazké proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,135$, $\alpha = 0^\circ$, $Re = 10^6$,
SST $k-\omega$ model turbulence*



*Obr. 5.34: Proudění v DCA mříži, $Ma_\infty = 1,073$, $\alpha = 0^\circ$,
experimentální data*

6 Závěr

V úvodu disertační práce byla nastíněna praktická důležitost modelování turbulentního transsonického proudění, přičemž vyplývající nutnost využívat numerické simulace je zřejmá. V technické praxi jsou důvodem jejich širšího využívání zejména finanční náročnost na provádění experimentálních měření nebo nemožnost vůbec experiment provést. Má tedy smysl i nadále vyvíjet jednoúčelové programy schopné řešit specifické problémy, které běžný komerční software neumí kvalitně řešit. Na poli výzkumu transsonického proudění a příslušného matematického modelování existuje nepřehledné množství publikací, přičemž ty stěžejní z pohledu autora byly uvedeny. Cílem práce bylo vyvinout a odladit vlastní řešič pro metody numerických simulací transsonického proudění nevazké a vazké stlačitelné tekutiny ve vnitřní aerodynamice, přičemž u vazkého proudění byly modelovány turbulence.

Důležitým předpokladem úspěchu je správně zvolený fyzikální model, jenž je popsán modelem matematickým. Tomu se věnovala kapitola 2. V ní byly uvedeny matematické modely popisující fyzikální model řešeného typu proudění. Bylo také zmíněno omezení v případě klasického řešení takového matematického modelu a problémy s ním spjaté.

V kapitole 3 bylo rozebráno turbulentní proudění jako vlastnost tekutiny a nastíněny obecné možnosti modelování turbulentního proudění. Pro řešení následných úloh byla vybrána a rozebrána metoda RANS. Z velkého množství byly vybrány a popsány tři modely turbulence, jeden základní, pro účely této práce validační algebraický model podle Baldwina a Lomaxe a dva modely dvourovnicové k - ω v rozšíření podle Wilcoxe a v SST variantě.

Kapitola 4 se zabývala numerickým řešením popisovaného proudění pomocí metody konečných objemů. Byla odvozena metoda a uvedeno numerické schéma a jeho implementace spolu s nezbytným modelem numerického tlumení v rámci metody konečných objemů. Rovněž byly uvedeny další důležité předpoklady numerické realizace.

Výpočtem proudění se zabývala kapitola 5. Byly v ní uvedeny výsledky řešení dvou úloh ve smyslu geometrie, referenční úlohy proudění GAMM kanálem a proudění DCA mříží. Ve druhé jmenované úloze byly řešeny celkem čtyři konfigurace pro různé hodnoty vstupního Machova čísla. V případě GAMM kanálu byly výsledky validovány s dalšími

autory a v případě proudění DCA mříží byla ukázána korelace řešení s experimentálními daty. Všechny výsledky pak byly navzájem srovnány a diskutovány.

Z uvažovaných cílů práce bylo splněno vše. Jednotlivé výsledky, uvedené v této práci, navazují přímo v [15], [16], [17], [18], [19], nebo nepřímo v [20] na dílčí výsledky publikované a v případě [21] přijaté k publikování v rámci celého doktorského studia. Je nutné podotknout, že výsledky nelze zobecňovat a že platí pro uvedené zkoumané geometrie. Pro případ širšího použití by bylo třeba dodatečných analýz a testování na příslušných referencích, které by svým charakterem odpovídaly dalším zamýšleným geometriím. S jistotou lze však říci, že pro případ geometrií uvedených v této práci jsou validované výsledky řešení proudění pravdivé.

Z hlediska vývoje software a implementace jednotlivých matematických modelů je nejméně náročný model popisující nevazké proudění následovaný modelem vazkého laminárního proudění (výsledky jsou uvedeny v publikacích autora [16], [17] a [20]) a nakonec modelem vazkého turbulentního proudění. Z hlediska implementace turbulentních modelů je nejjednodušší model algebraický, jehož nevýhody byly diskutovány, který je následován modely dvourovnicovými. Předchozí srovnání jsou také platná, i co se výpočetního času týče. Zde se do budoucna nabízí možnost širšího využití semiimplicitních nebo plně implicitních metod řešení. Z pohledu modelování turbulentního proudění má v budoucnu význam rozšířit dvourozměrnou úlohu na prostorovou. Očekáváním by mělo být lepší zachycení dějů spjatých s turbulentním prouděním, jenž je vždy prostorového rázu. Rovněž je třeba se v budoucnu věnovat modelování přechodu do turbulence v oblasti náběžné hrany a vzájemné interakci mezní vrstvy s rázovou vlnou a jejími odrazy. Výše uvedené problémy budou vyžadovat co nejlepší optimalizaci ke zkrácení výpočetních časů.

Matematické modelování proudění bude proto v budoucnu i nadále úzce spojeno s vývojem počítačů a výpočetních kapacit, které tyto komplexní úlohy umožní řešit.

7 Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému školiteli, panu profesoru Karlu Kozlovi, za odborné vedení během práce a možnost publikovat dílčí výsledky shrnuté v této disertační práci. Dále bych chtěl poděkovat své manželce a oběma svým dětem za podporu během doktorského studia.

8 Seznam literatury

- [1] Dvořák R. (1986): Transsonické proudění, Academia, Praha.
- [2] Slouka M. (2008): Numerické řešení subsonického proudění v kanále, Diplomová práce, Praha, ČVUT FSI.
- [3] Magnus R., Yoshihara H. (1970): Inviscid transonic flow over airfoils, AIAA Journal, 8 (12), pp. 2154-2162.
- [4] Cole J. D., Murman E. M. (1971): Calculation of plane steady transonic flows, AIAA Journal, 9 (1), pp. 114-121.
- [5] Jameson, A. (1974): Iterative solution of transonic flows over airfoils and wings, including flows at Mach 1, Comm. in Pure and Applied Math., 27, pp. 283-309.
- [6] Langley M. J. (1977): Numerical methods for two-dimensional and axisymmetric transonic flow, London, Her Majesty's Stationery Office, Report C. P. No.1376.
- [7] Kozel K. (1976): Matematické řešení transsonického obtékání rovinné lopatkové mříže složené z tenkých profilů, Disertační práce, Praha, ČVUT, Strojní fakulta.
- [8] Kozel K., Polášek J., Vavřincová M. (1978): Numerical education of transonic flow through a cascade with slender profiles, Proceedings of the sixth international methods in fluid dynamics, Tbilisi, vol. 1, pp. 166-171.
- [9] Kozel K., Rozsypal P. (1981): Rovinné transonické obtékání systémů slabých profile v kanálu, Stroj. Čas. 32 (6), s. 671-684.
- [10] Deiwert G. S. (1975): High Reynolds number transonic flow simulation, Proceedings of the Fourth Int. Conf. on Num. Methods in Fluid Dynamics., Springer-Verlag New York, pp. 132-137.
- [11] Fürst J. (2000): Modélisation numérique d'écoulement transsoniques avec des schémas TVD et ENO, Disertační práce, Praha, ČVUT FSI.
- [12] Fürst J., Kozel K. (2001): Numerical solution of inviscid and viscous flows using modern schemes and quadrilateral or triangular mesh, Mathematica Bohemica, Vol. 126, No. 2, pp. 379-393.

- [13] Dobeš J., Fürst J., Fořt J., Halama J., Kozel K. (2003): Numerical Simulation of Transonic Flow in Steam Turbine Cascades, IUTAM Symposium Transsonicum IV, 73, pp. 145-150.
- [14] Louda P. (2002): Numerické řešení dvourozměrného a třírozměrného turbulentního impaktního proudění, Disertační práce, Praha, ČVUT FSI.
- [15] Slouka M., Kozel K. (2013): Numerical solution of inviscid compressible flow in 2D channel, Topical Problems of Fluid Mechanics 2013, Praha, Ústav termomechaniky AV ČR, pp. 57-60. ISBN 978-80-87012-45-1.
- [16] Slouka M., Kozel K. (2013): Numerical solution of 2D inviscid and viscous compressible flow in channel and over the profile, Colloquium Fluid Dynamics 2013, Praha, Ústav termomechaniky AV ČR, pp. 29-30. ISBN 978-80-87012-48-2.
- [17] Slouka M., Kozel K. (2014): Numerical solution of 2D transonic inviscid and viscous compressible flow in channel, Topical Problems of Fluid Mechanics 2014, Praha, Ústav termomechaniky AV ČR, 2014, pp. 127-130. ISBN 978-80-87012-51-2.
- [18] Slouka M., Kozel K. (2014): Numerical calculation of 2D transonic flow over profile, Colloquium Fluid Dynamics 2014, Praha, Ústav termomechaniky AV ČR, 2014, pp. 25-36. ISBN 978-80-87012-53-6.
- [19] Slouka M., Kozel K. a Příhoda J. (2015): Numerical solution of inviscid and viscous flow around the profile, Experimental Fluid Mechanics 2014, EPJ Web of Conferences, 92, 02082.
- [20] Slouka M., Kozel K. (2016): Numerical solution of inviscid and viscous laminar and turbulent flow around the airfoil, Experimental Fluid Mechanics 2015, EPJ Web of Conferences, 114, 02109.
- [21] Slouka M., Kozel K.: Numerical calculations of 2D transonic flow in GAMM channel and over the profile, Experimental Fluid Mechanics 2016 (přijata k publikování).
- [22] Temam R. (1977): Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis, 2nd Edition, North-Holland Pub. Co.

- [23] Kozel K., Dvořák R. (1996): Matematické modelování v aerodynamice, Vydavatelství ČVUT, Praha.
- [24] Bradshaw P. (1971): An introduction to turbulence and its measurement, Pergamon Press, Oxford.
- [25] Reynolds O. (1895): On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 186, pp. 123-161, ser. A.
- [26] Deardorff J. (1970): A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers, J. Fluid Mech., 41, pp. 453-480.
- [27] Smagorinsky J. (1963): General circulation experiments with the primitive equations, Month Weat. Rev., 91, pp. 99-164.
- [28] Favre A. (1965): Équations des gaz turbulents compressibles, Jour. de Mécanique, 4, pp. 361-390 (part I), pp. 391-421 (part II).
- [29] Boussinesq J. (1877): Théorie de l'écoulement tourbillant, Mem. Prés. Acad. Sci. Paris, 23, 46.
- [30] Harlow F. H., Nakayma P. I. (1967): Turbulence transport equations, Phys. Fluids, 10, pp. 2323-2332.
- [31] Prandtl L. (1925): Über die ausgebildete Turbulenz, ZAMM Zeit. Angew. Math. Mech., 5, pp. 136-139.
- [32] Příhoda J. (1990): Algebraické modely turbulence a jejich použití při řešení středovaných Navier-Stokesových rovnic, Zpráva Z-1153/90, Ústav termomech. AV ČR, Praha.
- [33] Baldwin B., Lomax H. (1978): Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows, AIAA Paper 78-257.
- [34] Cebeci T., Smith A. M. O. (1974): Analysis of turbulent boundary layers, New York, Academic Press.
- [35] Wilcox D. C. (1988): Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models, AIAA Journal, pp. 1299-1310.

- [36] Wilcox D. C. (2006): Turbulence modeling for CFD, DCW Industries, La Canada, Cal., 3rd edition.
- [37] Wilcox D. C. (2008): Formulation of the k- ω turbulence model revisited, AIAA Journal, 46, pp. 2823-2838.
- [38] Menter F. R. (1994): Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications, AIAA Journal, 32, pp. 1598-1605.
- [39] Příhoda J., Louda P. (2006): Matematické modelování turbulentního proudění, Praha, Vydavatelství ČVUT.
- [40] Jameson A., Schmidt W., Turkel E. (1981): Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes, AIAA Paper 81-1250.
- [41] Swanson R. C., Radespiel R., Turkel E. (1997): Comparison of several dissipation algorithms for central difference schemes, AIAA Paper 97-1945.
- [42] Swanson R. C., Radespiel R., Turkel E. (1998): On some numerical dissipation schemes, J. Comput. Phys., 147, pp. 518-544.