



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ

Fakulta Strojní
Ústav technické matematiky

**Numerické řešení stacionárního a
nestacionárního turbulentního proudění**

Disertační práce

Matematické a fyzikální inženýrství

Studijní obor

Autor: Ing. Jiří Holman

Školitel: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.

Název: Numerické řešení stacionárního a nestacionárního turbulentního proudění.

Anotace

Tato práce se zabývá matematickým modelováním a numerickým řešením stlačitelného proudění tekutin, přičemž hlavní důraz je kladen na modelování turbulence. Modelování turbulence je založeno na soustavě středovaných Navierových-Stokesových rovnic a Kokově dvourovnicovém TNT $k-\omega$ modelu a jeho dalších modifikacích. Nejdůležitější z nich je EARSM model Wallina a Johanssona, který je založen na transportních rovnicích TNT modelu. Jedním z hlavních cílů této práce je odvození nových hodnot modelových konstant TNT modelu, které jsou vhodnější pro spojení s nelineárními vztahy EARSM modelu. Další použitou modifikací je Kokův hybridní X-LES model, který přepíná mezi RANS modelem v oblastech, kde je hrubá síť, a simulací velkých vírů v místech, kde je síť dostatečně jemná pro přímou reprezentaci velkých turbulentních struktur. X-LES model se skládá z TNT modelu v RANS režimu a jednorovnicového SGS modelu v LES režimu. Základní rovnice jsou poté diskretizovány pomocí metody konečných objemů a validovány na mnoha případech, které zahrnují i realistické úlohy vnější a vnitřní aerodynamiky.

Klíčová slova: RANS, hybridní RANS-LES, TNT $k-\omega$, EARSM, X-LES, metoda konečných objemů, stlačitelné turbulentní proudění.

Title: Numerical solution of steady and unsteady turbulent flow.

Abstract

This work deals with the mathematical modeling and numerical solution of compressible flow of fluids with the main focus on turbulence modeling. Modeling of turbulent flows is based on the system of averaged Navier-Stokes equations and Kok's two equation TNT $k-\omega$ model and its further modifications. The most important one is EARSM model of Wallin and Johansson which is based on the TNT model transport equations. One of the main goals of this work is derivation of new values of model constants for TNT model equations which are more suitable in conjunction with the EARSM nonlinear relations. Another modification used in this work is the Kok's hybrid X-LES model which switches between RANS model in regions where grid is coarse and large eddy simulation where grid is fine enough for direct resolution of large turbulent structures. X-LES model consists from TNT model in RANS regions and one equation SGS model in LES regions. Governing equations are then discretized by the finite volume method and validated on many cases including some realistic problems in external and internal aerodynamics.

Key words: RANS, hybrid RANS-LES, TNT $k-\omega$, EARSM, X-LES, finite volume method, compressible turbulent flow.

Čestné prohlášení

Tímto prohlašuji, že jsem celou disertační práci vypracoval samostatně a uvedl všechnu použitou literaturu.

V Praze dne
20. září 2014

Ing. Jirí Holman

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval svému školiteli, Doc. Ing. Jiřímu Fůrstovi, Ph.D. za jeho trpělivé a pečlivé vedení při tvorbě této práce i po celou dobu studia oboru Matematické a fyzikální inženýrství. Dále bych rád poděkoval své manželce a rodičům za obětavou podporu po celou dobu mého studia. Nakonec bych chtěl poděkovat Ing. Vadimíru Prokopovi, Ph.D. za pomoc při odstraňování nesrovnalostí a chyb.

Obsah

1 Úvod	15
1.1 Cíle disertační práce	18
1.2 Struktura disertační práce	18
2 Matematické modely stlačitelného proudění tekutiny	19
2.1 Soustava Navierových-Stokesových rovnic	19
2.2 Konstitutivní vztahy	20
2.3 Soustava Eulerových rovnic	21
2.4 Počáteční a okrajové podmínky	21
2.4.1 Počáteční podmínky	21
2.4.2 Okrajové podmínky	21
3 Matematické modelování turbulentního proudění	23
3.1 Soustava středovaných Navierových-Stokesových rovnic	24
3.2 Uzavření soustavy středovaných Navierových-Stokesových rovnic	26
3.2.1 Modely turbulence prvního řádu	27
3.2.2 Modely turbulence s algebraickými rovnicemi pro složky tenzoru Reynoldsových napětí	30
3.2.3 Aproximace turbulentního tepelného toku	34
3.3 Simulace velkých vírů	34
3.4 Uzavření soustavy filtrovaných Navierových-Stokesových rovnic	37
3.4.1 X-LES model	38
3.5 Počáteční a okrajové podmínky pro turbulentní veličiny	39
3.5.1 Počáteční podmínky pro turbulentní veličiny	39
3.5.2 Okrajové podmínky pro turbulentní veličiny	39
4 Numerické metody pro řešení proudění stlačitelné tekutiny	41
4.1 Metoda konečných objemů pro soustavu Eulerových rovnic	41
4.1.1 Schéma HLLC	42
4.1.2 Eulerova metoda časové integrace	44
4.2 Metoda konečných objemů pro soustavu Navierových-Stokesových rovnic	45
4.2.1 Časová integrace, podmínka stability	47
4.3 Numerické metody vyššího řádu přesnosti	48
4.3.1 MUSCL rekonstrukce	48
4.3.2 WENO rekonstrukce	51
4.3.3 TVD Runge-Kuttovy metody	53
4.4 Metoda konečných objemů pro rovnice modelu turbulence	54
4.5 Numerická realizace okrajových podmínek	56
4.5.1 Okrajové podmínky na vstupu	57
4.5.2 Okrajové podmínky na výstupu	57
4.5.3 Okrajové podmínky na pevné stěně	58

5	Numerické řešení prostorového nevazkého proudění	59
5.1	Transsonické proudění testovacím kanálem	59
5.1.1	Proudění GAMM kanálem rozšířeným z 2D konfigurace	59
5.1.2	Proudění GAMM kanálem s proměnnou výškou profilu	64
5.1.3	Proudění GAMM kanálem s šikmým profilem	65
5.2	Transsonické obtékání křídla NACA0012	66
5.3	Transsonické proudění statorovou mříží Škoda	68
6	Numerické řešení prostorového laminárního proudění	73
7	Numerické řešení rovinného turbulentního proudění	77
7.1	Subsonické proudění kolem desky	78
7.2	Transsonické obtékání profilu křídla RAE 2822	82
7.3	Transsonické proudění mříží SE 1050	85
8	Numerické řešení prostorového turbulentního proudění	89
8.1	Transsonické proudění turbínovou mříží SE 1050	89
8.2	Nestacionární subsonické proudění kolem válce	92
9	Závěr	99

Seznam použitých symbolů

Malá písmena

a_{ij}	Složky tenzoru anizotropie \vec{a} .
$a_{ij}^{(ex)}$	Složky tenzoru přídavné anizotropie $\vec{a}^{(ex)}$.
b	Náhodná veličina.
c	Lokální rychlost zvuku [ms^{-1}].
c_f	Třecí koeficient.
c_p	Měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku [$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$].
c_P	Tlakový koeficient.
c_V	Měrná tepelná kapacita při konstantním objemu [$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$].
d	Průměr [m].
e	Hustota energie, $e = \rho E$ [Jm^{-3}].
f	Obecná funkce.
f_v	Frekvence [Hz].
f_i	Složky vektoru tíhových sil \vec{f} [N].
g_i	Složky vektoru tíhového zrychlení \vec{g} [ms^{-2}].
grad	Diferenciální operátor gradient.
h	Měrná entalpie [Jkg^{-1}].
k	Turbulentní kinetická energie [m^2s^{-2}].
k_{SGS}	Subgridní kinetická energie [m^2s^{-2}].
n_j	Složky vektoru vnější jednotkové normály $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$.
p	Tlak [Pa].
q	Normálová rychlost [ms^{-1}].
q_j	Složky vektoru tepelného toku \vec{q} [Wm^{-2}].
q_j^t	Složky vektoru turbulentního tepelného toku \vec{q}^t [Wm^{-2}].
q_j^{SGS}	Složky vektoru subgridního tepelného toku \vec{q}^{SGS} [Wm^{-2}].
q_j^T	Složky vektoru turbulentního tepelného toku v X-LES modelu [Wm^{-2}].
r	Měrná plynová konstanta [$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$].
t	Čas [s].
u_e	Vnitřní energie [Jkg^{-1}].
u_j	Složky vektoru rychlosti $\vec{u} = (u, v, w)^T$ [ms^{-1}].
u_τ	Třecí rychlost, $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\bar{\rho}}$ [ms^{-1}].
u^\dagger	Normovaná rychlost u .
v_C	Konvektivní rychlost [ms^{-1}].

w_k	Váhy.
x_j	Kartézské souřadnice x, y, z [m].
y^+	Normovaná souřadnice y .

Velká písmena

B	Transformační matice.
C_d	Příčná difuze [$\text{kgm}^{-3}\text{s}^{-2}$].
C_K	Kolmogorovova konstanta.
C_μ	Koeficient turbulentní dynamické vazkosti.
D	Výpočetní oblast.
D_i	Buňky výpočetní sítě.
E	Celková energie [Jkg^{-1}].
$E(k)$	Energetické spektrum, kde k je vlnové číslo.
\hat{F}, F_i	Nevazké toky, $i = 1, 2, 3$.
G	Jádro konvoluce.
H	Entalpie [Jkg^{-1}].
\mathcal{I}_j	Subgridní turbulentní difuze [Wm^{-2}].
$II_\Omega, II_S, III_S, IV, V$	Invarianty tenzoru anizotropie.
K	Počet buněk.
L	Charakteristický rozměr [m].
L_t	Turbulentní délkové měřítko [m].
L_D	Charakteristický rozměr buňky [m].
M	Machovo číslo.
N, N_c	Poměr produkce a rychlosti disipace turbulentní energie.
OI	Oscilační indikátor.
P	Produkce turbulentní kinetické energie [$\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-3}$].
$P(x, y, z)$	Aproximační polynom.
Pr	Prandtlovo číslo.
Pr_t	Turbulentní Prandtlovo číslo.
Q	Vektor zdrojových členů.
\hat{R}, R_i	Vazké toky, $i = 1, 2, 3$.
Re	Reynoldsovo číslo.
Re_x	Reynoldsovo číslo v závislosti na souřadnici x .
Rez	Reziduum.
S	Velikost bezrozměrného tenzoru rychlosti deformace.
S_L, S_R, S_M	Vlnové rychlosti v HLLC schématu.
S_{ij}	Složky tenzoru rychlosti deformace \vec{S} [s^{-1}].
St	Strouhalovo číslo.
T	Teplota [K].
T_s	Doba středování [s].
Tu	Intenzita turbulence.
U	Vektor primitivních proměnných.
W	Vektor neznámých konzervativních proměnných.

Řecká písmena

α	Úhel náběhu proudu [rad].
β_i	Koeficienty tenzoru anizotropie, $i = 1, 3, 4, 6, 9$.
γ	Poissonova konstanta, $\gamma = c_p/c_V$.
δ_{ij}	Jednotkový tenzor, $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.
ϵ	Rychlost disipace [m^2s^{-3}].
ζ	Druhá vazkost [Nm^{-2}s].
η	Pomocná souřadnice ve směru osy z [m].
ϑ	Parametr MUSCL rekonstrukce.
κ	von Kármánova konstanta.
λ	Součinitel tepelné vodivosti [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$].
λ^*	Velikost rychlostí vztahovaná ke kritické rychlosti zvuku.
μ	Dynamická vazkost [Nm^{-2}s].
μ_t	Turbulentní dynamická vazkost [Nm^{-2}s].
μ_{SGS}	Subgridní vazkost [Nm^{-2}s].
μ_T	Turbulentní vazkost v X-LES modelu [Nm^{-2}s].
ν_t	Turbulentní kinematická vazkost [m^2s^{-1}].
ξ	Pomocná souřadnice ve směru osy x [m].
ρ	Hustota [kg m^{-3}].
ϱ	Poloměr [m].
σ^x	Aproximace první derivace ve směru x .
ς	Ztrátový koeficient.
τ	Turbulentní časové měřítko [s].
τ_{ij}	Složky tenzoru vazkých napětí $\vec{\tau}$ [Nm^{-2}].
τ_{ij}^t	Složky tenzoru Reynoldsových napětí $\vec{\tau}^t$ [Nm^{-2}].
τ_{ij}^{SGS}	Složky tenzoru subgridních Reynoldsových napětí $\vec{\tau}^{SGS}$ [Nm^{-2}].
τ_{ij}^T	Složky tenzoru Reynoldsových napětí v X-LES modelu [Nm^{-2}].
$v(o)$	Limitér, $o = \overrightarrow{\Delta}/\overleftarrow{\Delta}$.
φ	Úhel odklonu proudu [rad].
Φ	Obecná neznámá veličina.
ψ	Pomocná souřadnice ve směru osy y [m].
ω	Specifická rychlost disipace [s^{-1}].
Ω_{ij}	Složky tenzoru rotace $\vec{\Omega}$ [s^{-1}].
∇	Diferenciální operátor Nabla.
Δ	Šířka filtru pro LES [m].
$\overleftarrow{\Delta}$	Zpětná diference.
$\overrightarrow{\Delta}$	Dopředná diference.
Δt	Velikost časového kroku [s].
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Velikost buňky sítě ve směru příslušné souřadnice [m].
ΔS	Obsah stěny buňky výpočetní sítě.
$\Delta \xi, \Delta \psi, \Delta \eta$	Velikost buňky sítě ve směru příslušné pomocné souřadnice [m].

Dolní indexy

0	Staganční hodnota.
∞	Hodnota ve vnějším proudu.
g	Hodnota ve fiktivní buňce za hranicí výpočetní oblasti.
ch	Charakteristická hodnota.
pp	Počáteční podmínka.
ref	Referenční hodnota.
w	Hodnota na stěně.
L	Stav vlevo od rozhraní dvou buněk.
R	Stav vpravo od rozhraní dvou buněk.

Zkratky

<i>AUSM</i>	Advection Upstream Splitting Method.
<i>BSL</i>	BaSe Line.
<i>CFL</i>	Courant-Friedrichs-Lewy.
<i>CS</i>	Centrální Schéma.
<i>DES</i>	Detached Eddy Simulation.
<i>DNS</i>	Direct Numerical Simulation.
<i>DV</i>	Duální geometrie.
<i>EARSM</i>	Explicit Algebraic Reynolds Stress Model.
<i>ENO</i>	Essentially Non-Oscillatory.
<i>FDM</i>	Finite Diference Method.
<i>FEM</i>	Finite Element Method.
<i>FVM</i>	Finite Volume Method.
<i>HLLC</i>	Harten, Lax, van Leer, Contact.
<i>LES</i>	Large Eddy Simulation.
<i>MUSCL</i>	Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws.
<i>QUICK</i>	Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics.
<i>RANS</i>	Reynolds Averaged Navier-Stokes.
<i>SGS</i>	Sub-Grid Scale.
<i>SST</i>	Shear Stress Transport.
<i>TNT</i>	Turbulent-NonTurbulent.
<i>URANS</i>	Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes.
<i>WENO</i>	Weighted Essentially Non-Oscillatory.
<i>X – LES</i>	eXtra Large Eddy Simulation.

Kapitola 1

Úvod

Tato práce se zabývá matematickým modelováním a numerickým řešením proudění stlačitelné tekutiny. S prouděním stlačitelných tekutin se lze setkat v mnoha technických aplikacích. Tato práce je zaměřena především na aplikace ve vnější a vnitřní aerodynamice jako např. obtékání křídla letadla, nebo proudění v turbínové mříži.

Proudění obecné stlačitelné tekutiny představuje velmi komplexní problém. Proto je hned na začátku nutné udělat některá zjednodušení. Mezi nejdůležitější patří předpoklad spojitého prostředí, tzv. kontinua, a dále omezení na tzv. Newtonskou tekutinu, která je dobrou aproximací pro tekutiny, které se často vyskytují v technických aplikacích (např. vzduch, pára apod.). Za těchto předpokladů jsou základními matematickými modely soustava Eulerových rovnic pro nevazké (ideální) proudění tekutiny (Euler, 1757), resp. soustava Navierových-Stokesových rovnic pro vazké (reálné) proudění tekutiny (Navier 1827, Stokes 1845). Obě soustavy tvoří rovnice, které vyjadřují základní zákony zachování (zachování hmotnosti, hybnosti a energie). Z matematického hlediska se jedná o nelineární parciální diferenciální rovnice. Nelinearita těchto rovnic způsobuje v případě vazkého proudění kvalitativní změny ve struktuře proudového pole. Tyto změny závisí na tzv. Reynoldsově čísle, které vyjadřuje poměr mezi setrvačnými a vazkými silami, které působí na tekutinu. Pro nízká Reynoldsova čísla převládají vazké disipativní síly, které tlumí poruchy a jiné nestability v proudící tekutině, a proto k přenosu hmotnosti, hybnosti a energie mezi sousedními vrstami tekutiny dochází pouze vlivem difuze. Takové proudění se nazývá laminární. Pro vysoká Reynoldsova čísla jsou dominantní setrvačné síly, které způsobují růst poruch a nestabilit a jejich následkem potom dochází k velmi složitému chaotickému pohybu tekutiny, který se nazývá turbulentní proudění. Tato práce je dále značně orientována na modelování a řešení turbulentního proudění, které je charakteristické pro většinu technických aplikací.

Turbulentní proudění tekutiny lze popsat pomocí soustavy Navierových-Stokesových rovnic. Bohužel současná matematika neumožňuje nalézt její obecné řešení v uzavřeném tvaru a dokonce nebyla do nynější doby korektně vyřešena ani otázka existence či jednoznačnosti řešení. Proto se řešení provádí pomocí numerických metod. Zde se však setkáváme s novými problémy. Turbulence má velmi složitou strukturu, která obsahuje široké spektrum měřítek turbulentních vírů od nejmenších, ve kterých probíhá molekulární disipace až po největší, která jsou srovnatelná s geometrickými rozměry dané úlohy. Pro zachycení nejmenších turbulentních vírů je nutné použít velmi jemnou síť (počet buňek sítě je úměrný přibližně Reynoldsovu číslu na devět čtvrtin) a dále velmi přesnou numerickou metodu. Pro typické úlohy vnější a vnitřní aerodynamiky se Reynoldsovo číslo pohybuje v rozmezí 10^6 až 10^8 . Z uvedeného je zřejmé, že přímé numerické řešení je s použitím současné výpočetní techniky nemožné¹. Pro získání numerického řešení turbulentního proudění je tedy nutné zavést další zjednodušení. Tato zjednodušení představují modelování turbulence pomocí fyzikálních aproximací a matematických modelů namísto přímého řešení.

Nejstarší přístup k modelování turbulence je založen na časovém středování Navierových-Stokesových rovnic, pomocí kterého získáme soustavu Reynoldsových středovaných Navierových-Stokesových rovnic (Reynolds, 1895). Z fyzikálního hlediska tyto rovnice představují značné zjednodušení proti původní

¹V současné době je použití přímé numerické simulace omezeno na úlohy s jednoduchou geometrií, které jsou charakterizovány Reynoldsovým číslem v rozmezí 10^4 až 10^5 .

soustavě, protože popisují pouze vývoj středních hodnot původních okamžitých veličin. Z matematického hlediska jsou ovšem složitější, protože obsahují nové členy, složky tenzoru Reynoldsových napětí, které vznikly středováním. Tyto členy je nutné aproximovat pomocí modelu turbulence. Nejstarší modely turbulence jsou založeny na tzv. Boussinesqově hypotéze (1887), která předpokládá, že Reynoldsova napětí lze vyjádřit podobně jako vazká napětí zavedením tzv. turbulentní vazkosti. Ačkoliv Boussinesqova hypotéza představuje výrazné zjednodušení, používá se pro uzavření středované soustavy Navierových-Stokesových rovnic dodnes. Mezi nejstarší modely turbulence patří skupina algebraických modelů, které vyjadřují turbulentní vazkost pomocí algebraických vztahů, např. Prandtlův model (1925). Tyto modely mají obecně velmi omezenou použitelnost, neboť používají často empirické, či poloempirické vztahy. Další skupinou jsou jednorovnicové modely, které jsou tvořeny transportní parciální diferenciální rovnicí pro určitou veličinu, která charakterizuje jedno z turbulentních měřítek (nejčastěji je to turbulentní kinetická energie). Pro další turbulentní měřítko, které je nutné k určení turbulentní vazkosti, jsou opět použity algebraické vztahy, které značně omezují použití této třídy modelů. Nejpočetnější skupina modelů turbulence zahrnuje dvourovnicové modely. Tyto modely jsou tvořeny dvěma transportními rovnicemi pro turbulentní rychlostní měřítko (nejčastěji opět turbulentní kinetická energie), resp. turbulentní délkové měřítko. Součinem těchto dvou turbulentních měřítek lze získat turbulentní vazkost. První úspěšné dvourovnicové modely, tzv. $k - \epsilon$ modely (např. Launder a Sharma, 1974), používají k určení turbulentního délkového měřítka rychlost disipace. Tyto modely jsou díky chování rychlosti disipace v blízkosti stěny velmi obtížně numericky řešitelné. To mimo jiné vedlo k vývoji tzv. $k - \omega$ modelu (Wilcox, 1988), který určuje turbulentní délkové měřítko pomocí specifické rychlosti disipace. Tento model lze bez větších numerických obtíží integrovat až ke stěně a navíc díky vhodné volbě některých modelových konstant neobsahuje žádné tlumící členy a nevyžaduje informaci o vzdálenosti od stěny, což je výhodné pro úlohy se složitou geometrií. Původní Wilcoxův model i jeho modifikace měly jednu velkou slabinu a to výraznou citlivost na hodnoty turbulentní kinetické energie, resp. specifické rychlosti disipace v nerozrušeném proudu. Tento problém odstranil BSL $k - \omega$ (Menter, 1992), resp. SST $k - \omega$ model (Menter, 1993). Oba modely jsou kombinací $k - \epsilon$ modelu², který je použit ve vnějším proudu, a $k - \omega$ modelu, který je použit v oblastech mezní vrstvy. $k - \epsilon$ model je v tomto případě transformován do $k - \omega$ formulace a mezi oběma modely se přepíná pomocí přepínacích funkcí, které ale vyžadují informaci o vzdálenosti od stěny. Odlišné řešení problému citlivosti modelu na hodnoty turbulentních veličin v nerozrušeném proudu navrhl Kok. Jeho TNT $k - \omega$ model (1999) vychází z Wilcoxova modelu, ale přidává do transportní rovnice pro specifickou rychlost disipace člen, který vyjadřuje příčnou difúzi a dále je provedena vhodnější volba konstant modelu, která je založena na analýze chování zjednodušeného modelu v blízkosti vnější hranice mezní vrstvy.

Modelování turbulence v této práci bude založeno na Kokově TNT modelu, protože není citlivý vůči hodnotám turbulentních veličin v nerozrušeném proudu, lze jej použít i pro nízká Reynoldsova čísla, nevyžaduje informaci o vzdálenosti od stěny ani jiné tlumící funkce a je vhodnou platformou pro komplexnější modely.

Dvourovnicové modely turbulence mají poměrně široký rozsah uplatnění, ale v některých případech, jako např. proudění s odtržením mezní vrstvy selhávají. V těchto případech již nevystačíme s modelováním Reynoldsových napětí pomocí Boussinesqovy hypotézy. Jednou z možností je použití modelu, který zahrnuje transportní diferenciální rovnice pro všechny složky tenzoru Reynoldsových napětí. Tyto rovnice v sobě obsahují mnoho neznámých členů, které lze jen obtížně aproximovat a navíc se ukazuje, že jsou numericky velmi nestabilní. Proto byly vyvinuty zjednodušené modely, které tvoří explicitní nelineární algebraické vztahy pro jednotlivé složky tenzoru Reynoldsových napětí (EARSM). V našem případě budeme pracovat s EARSM modelem Wallina a Johanssona (2000), který byl navržen v kombinaci s Kokovým TNT modelem. Hellsten vyvinul vlastní $k - \omega$ model (2004), který je navržen přímo pro EARSM vztahy. Vychází z Mentrova BSL modelu, ale používá modifikované přepínací funkce a nové modelové konstanty, které byly navrženy za pomoci rozšířené analýzy pro nelineární konstitutivní vztahy a dále ukazuje, že žádný ze standardně dostupných $k - \omega$ modelů není vhodný pro spojení s EARSM vztahy. V této práci využijeme Hellstenovu rozšířenou analýzu pro odvození nových hodnot konstant Kokova TNT modelu tak, aby byl vhodný pro použití v kombinaci s EARSM konstitutivními vztahy.

Modernější přístup k modelování turbulence, tzv. simulace velkých vírů, byl navržen Smagorinským

²Který na rozdíl od $k - \omega$ modelu není citlivý na hodnoty turbulentních veličin v nerozrušeném proudu.

v roce 1963, původně pro simulaci mezní vrstvy atmosféry. Tento přístup vychází z myšlenky, že většina energie je obsažena ve velkých vírech, zatímco v případě přímé numerické simulace se většina výpočetního výkonu spotřebuje na rozřešení nejmenších vírových struktur. Proto je na výchozí soustavu Navierových-Stokesových rovnic aplikován prostorový filtr, který odstraní malá měřítká. Velké víry jsou poté reprezentovány přímo, zatímco malá měřítká jsou modelována pomocí tzv. subgridních (SGS) modelů.

SGS modely jsou většinou založeny na Boussinesqově hypotéze, která v tomto případě představuje poměrně dobrou aproximaci skutečnosti, neboť malé víry jsou téměř izotropní. V současnosti existují dvě základní skupiny modelů. První skupinu tvoří algebraické modely, ve kterých je SGS vazkost vyjádřena pomocí algebraických vztahů, např. Smagorinského model (1963). Vývoj těchto modelů probíhá dodnes. Druhou skupinu tvoří jednorovnicové modely pro turbulentní kinetickou energii malých vírů, která určuje turbulentní rychlostní měřítko. Turbulentní délkové měřítko je dáno šířkou prostorového filtru a SGS vazkost je poté vyjádřena součinem obou turbulentních měřítek.

Ačkoliv je simulace velkých vírů ve srovnání s přímou numerickou simulací mnohem méně náročná na výpočetní techniku, pro úlohy s vysokým Reynoldsovým číslem a složitou geometrií je stále daleko za hranicí možností dnešních počítačů. Proto Spalart v roce 1997 vyvinul tzv. DES metodu, která kombinuje středovanou soustavu Navierových-Stokesových rovnic (RANS) se simulací velkých vírů (LES). Středovaná soustava Navierových-Stokesových rovnic s modelem turbulence³ je použita v blízkosti obtékaných stěn, kde z technických důvodů nelze použít dostatečně jemnou síť, zatímco ve zbytku proudového pole je použita simulace velkých vírů. Tato metoda byla úspěšně použita pro reálné úlohy vnější aerodynamiky s vysokým Reynoldsovým číslem. Její nevýhodou je, že předem vyžaduje rozdělení výpočetní oblasti na zóny pro RANS a LES a s tím související obtížná příprava výpočetní sítě pro numerické řešení. Modifikací tohoto přístupu je metoda X-LES (Kok, 2004), která je tvořena TNT $k - \omega$ modelem, který je použit v RANS regionech a jednorovnicovým SGS modelem, který se používá v LES regionech. Na rozdíl od původní Spalartovy metody⁴ nevyžaduje rozdělení výpočetní oblasti na jednotlivé zóny předem, protože ty se automaticky určují podle jemnosti výpočetní sítě. Protože je modelování turbulence v této práci založeno na Kokově TNT $k - \omega$ modelu, je X-LES model logickou volbou pro simulování nestacionárního turbulentního proudění.

Numerické řešení matematických modelů stlačitelného proudění (soustavy středovaných, resp. filtrovaných Navierových-Stokesových rovnic, které jsou uzavřeny pomocí příslušných modelů turbulence, popř. soustava Eulerových rovnic) představuje další sadu problémů. Hlavní komplikací je nelinearita výchozích rovnic. Jiným problémem je např. vznik a šíření rázových vln (které lze považovat za nespojitosti) uvnitř výpočetní oblasti. V této práci je numerické řešení založeno na metodě konečných objemů, která je i přes vznik nových metod a přístupů stále dominantní pro řešení úloh mechaniky tekutin. Od poloviny minulého století vzniklo v rámci metody konečných objemů mnoho tzv. klasických numerických schémat pro aproximaci nevazkých toků (např. Laxovo-Wendroffovo schéma, MacCormackovo schéma aj.). Tyto metody jsou ovšem v nelineárních případech nestabilní, a proto je nutné je stabilizovat pomocí tzv. numerické (nebo umělé) vazkosti, která do značné míry závisí na empirických konstantách, které je nutné nastavit pro každou úlohu zvlášť. Nastavení těchto konstant potom výrazně ovlivňuje kvalitu numerického řešení. V současnosti převládá skupina tzv. moderních numerických schémat, která realizují tzv. protiproudou diskretizaci pomocí rozkladu nevazkých numerických toků. Mezi nejznámější metody této třídy patří schémata AUSM a HLLC. Tato schémata jsou pouze prvního řádu přesnosti. To znamená, že je v nich zabudována velmi silná numerická vazkost, která je stabilizuje, ale zároveň působí negativně na důležité atributy proudového pole (např. rozlišení rázových vln, nebo zachycení extrémů). Proto se tato schémata používají v kombinaci s rekonstrukcí neznámých veličin, díky které se zvýší řád přesnosti.

V této práci je použito schéma HLLC. Pro zvýšení řádu přesnosti je použito dvou zcela odlišných rekonstrukcí. MUSCL rekonstrukce je realizována pomocí jednorozměrných rekonstrukcí v jednotlivých směrech, zatímco WENO rekonstrukce je implementována jako plně vícerozměrná. Vazké toky jsou diskretizovány pomocí standardně užívané centrální aproximace druhého řádu přesnosti.

Pro časovou diskretizaci lze použít celou řadu explicitních, nebo implicitních metod. V našem případě budeme používat explicitní vícestupňové Runge-Kuttovy metody druhého, resp. třetího řádu.

³V tomto případě jednorovnicový model Spalarta a Allmarase.

⁴A jiným DES metodám, které z ní vychází.

1.1 Cíle disertační práce

Hlavním cílem této práce je vývoj metod pro modelování turbulentního proudění stlačitelné tekutiny. Vývoj se bude zaměřovat na různé modifikace TNT $k - \omega$ modelu za účelem vylepšení prediktivních vlastností pro vybrané případy proudění. Díličními cíli nezbytnými pro dosažení hlavního cíle jsou:

- Vývoj a otestování metody pro řešení nevazkého stlačitelného proudění.
- Vývoj a otestování metody pro řešení laminárního stlačitelného proudění.
- Rekalibrace TNT modelu za účelem kombinace s EARSM vztahy a validace na vybraných případech stlačitelného turbulentního proudění.
- Vývoj metody pro řešení nestacionárního stlačitelného turbulentního proudění a otestování na případu subsonického obtékání válce.

1.2 Struktura disertační práce

Struktura disertační práce je přizpůsobena splnění výše uvedených cílů.

- Ve druhé kapitole jsou definovány základní matematické modely proudící stlačitelné tekutiny, tzn. soustava Eulerových, resp. Navierových-Stokesových rovnic a dále konstitutivní vztahy, které jsou nutné k jejich uzavření. Dále jsou stručně popsány základní počáteční a okrajové podmínky, které jsou nedílnou součástí matematického modelu konkrétní úlohy.
- Třetí kapitola je věnována modelování turbulentního proudění. První přístup je založen na středované soustavě Navierových-Stokesových rovnic (RANS), která je uzavřena Kokovým TNT $k - \omega$ modelem, nebo pomocí komplexnějšího EARSM modelu Wallina a Johansona, který je založen na TNT modelu. Pomocí Hellstenovy rozšířené analýzy jsou zde odvozeny nové, vhodnější konstanty pro TNT model ve spojení s EARSM modelem. Druhým přístupem je simulace velkých vírů (LES), resp. hybridní metoda X-LES, která je kombinací RANS a LES.
- Čtvrtá kapitola se zabývá numerickým řešením základních matematických modelů pomocí metody konečných objemů. Numerická metoda je založena na schématu HLLC s MUSCL, nebo WENO rekonstrukcí pro aproximaci nevazkých toků a centrální aproximací vazkých toků. Pro časovou diskretizaci jsou použity vícestupňové TVD Runge-Kuttovy metody. V této kapitole je dále popsána numerická implementace okrajových podmínek.
- Pátá kapitola je věnována numerickému řešení prostorového nevazkého proudění. Nejprve je ověřena správnost implementace použitých numerických metod na známých případech proudění GAMM kanálem v různých konfiguracích. Poté jsou řešeny případy transsonického obtékání křídla NACA 0012 a transsonického proudění ve satorové mříži Škoda.
- Šestá kapitola slouží k ověření správnosti implementace vazkých členů, resp. jejich aproximace na jednoduchém případu subsonického laminárního proudění zahnutým kanálem.
- Sedmá kapitola je věnována rovinnému turbulentnímu proudění. Nejprve jsou zvolené modely turbulence, resp. numerické metody testovány na jednoduchém případu subsonického proudění kolem desky. Poté jsou použity k řešení transsonického obtékání profilu křídla RAE 2822 (AGARD případ 10) a dále k řešení transsonického proudění turbínovou mříží SE 1050.
- V osmé kapitole budeme řešit dva případy prostorového turbulentního proudění. První úlohou je trojrozměrný případ transsonického proudění turbínovou mříží SE 1050. Druhou úlohou je nestacionární subsonické proudění kolem válce.
- Poslední kapitola je věnována závěrečnému zhodnocení.

Kapitola 2

Matematické modely stlačitelného proudění tekutiny

V této práci budeme uvažovat pouze tzv. Newtonskou tekutinu¹, která je charakterizována těmito vlastnostmi:

- Nedochozí-li k deformaci tekutiny, je jediným působícím napětím statický tlak, který působí kolmo na jakoukoliv plochu umístěnou v tekutině.
- Místní, okamžitá hodnota napětí při deformaci tekutiny závisí pouze na rychlosti deformace v uvažovaném místě a čase. Nevyskytuje se zde žádné působení na dálku, ani vlastnost "paměti" předchozího stavu.
- Tekutina je izotropní, tzn. má stejné deformační vlastnosti ve všech směrech.
- Neexistuje přímá vazba mezi rychlostním a teplotním polem, tzn. nevznikají žádná napětí teplotním působením, ani tepelný tok působením napětí.

Základní matematické modely popisující proudění tekutiny dále předpokládají spojitě prostředí, tzv. kontinuum. Tento přístup zcela ignoruje pohyb molekul a předpokládá, že vlastnosti dané tekutiny jsou spojitými funkcemi polohy a času. Stlačitelnou Newtonskou tekutinu lze považovat za kontinuum, pokud je charakteristický rozměr obtékaného tělesa (případně jiný charakteristický rozměr úlohy) mnohem větší než střední volná dráha molekul tekutiny. Pro převážnou část technických aplikací je tento předpoklad splněn téměř dokonale.

2.1 Soustava Navierových-Stokesových rovnic

Soustava základních rovnic, která popisuje proudění vazké stlačitelné tekutiny, je tvořena zákonem zachování hmotnosti (rovnice kontinuity)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (2.1)$$

zákonem zachování hybnosti² (Navierova-Stokesova rovnice)

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

a zákonem zachování energie

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\rho E + p) u_j \right] = \frac{\partial(u_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \quad (2.3)$$

¹V této práci budeme pracovat pouze se vzduchem, pro který jsou následující předpoklady splněny téměř dokonale.

²Vzhledem k nízké hustotě vzduchu jsme zanedbali člen, který vyjadřuje tíhové síly, tzn. $f_i = \rho g_i \approx 0$.

Zde ρ je hustota tekutiny, u_j jsou složky vektoru rychlosti, p je tlak, τ_{ij} jsou složky tenzoru vazkých napětí, E je celková energie a q_j jsou složky vektoru tepelného toku.

Rovnice (2.1), (2.2) a (2.3) společně tvoří soustavu Navierových-Stokesových rovnic (odvození lze nalézt např. v [1] nebo v [9]).

2.2 Konstitutivní vztahy

Soustava Navierových-Stokesových rovnic není uzavřená, a proto musíme přidat doplňující rovnice, tzv. konstitutivní vztahy.

Prvním z nich je vzájemná vazba stavových veličin. V této práci použijeme stavovou rovnici ideálního plynu (viz [1])

$$p = \rho r T, \quad (2.4)$$

kterou lze přepsat do tvaru

$$p = (\gamma - 1) \left[\rho E - \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right], \quad (2.5)$$

kde γ je Poissonova konstanta³, která je dána poměrem měrné tepelné kapacity při konstantním tlaku ku měrné tepelné kapacitě při konstantním objemu.

Poznámka 2.2.1. *Model ideálního plynu lze použít pouze pokud je zanedbatelný vliv velikosti molekul vzhledem k objemu plynu a vliv vzájemného silového působení molekul. Tyto předpoklady platí pro poměrně široké rozsahy hodnot tlaků a teplot, viz [1].*

Další rovnice vyjadřuje vztah pro tenzor vazkých napětí $\vec{\tau}$. Pro Newtonskou tekutinu⁴ platí lineární vztah (viz [2])

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij}, \quad (2.6)$$

kde μ je dynamická vazkost a S_{ij} jsou složky tenzoru rychlosti deformace, které jsou dány rovností

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right). \quad (2.7)$$

Dynamická vazkost μ je závislá na odmocnině z absolutní teploty (toto plyne z kinetické teorie plynů, viz [1]) a lze pro ni použít např. Sutherlandův vztah [1]. V našem případě použijeme zjednodušený vztah dle Rayleigha ve tvaru

$$\mu(T) = \mu(T_{ref}) \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{\frac{3}{4}}, \quad (2.8)$$

který lze dále upravit pomocí stavové rovnice (2.4) do konečné podoby

$$\mu(T) = \mu_{ref} \left(\frac{p}{\rho} \right)^{\frac{3}{4}}, \quad (2.9)$$

kde konstanta μ_{ref} je dána vztahem

$$\mu_{ref} = \mu(T_{ref}) \left(\frac{\rho_{ref}}{p_{ref}} \right)^{\frac{3}{4}}. \quad (2.10)$$

Posledním konstitutivním vztahem je Fourierův zákon (viz [1]) pro tepelný tok \vec{q} ve tvaru

$$q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (2.11)$$

který upavíme do tvaru

$$q_j = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad (2.12)$$

³V našich výpočtech uvažujeme $\gamma = 1.4$ (hodnota Poissonovy konstanty pro vzduch).

⁴Zde jsme již použily zjednodušení ve formě vyloučení tzv. druhé vazkosti pomocí Stokesova vztahu $\zeta = -\frac{2}{3}\mu$, který platí pro jednoatomové plyny, ale běžně se používá i pro složitější plyny.

kde Pr je Prandtlovo číslo⁵, které je definováno jako

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}. \quad (2.13)$$

2.3 Soustava Eulerových rovnic

Zanedbáme-li členy zodpovědné za vazké efekty v soustavě Navierových-Stokesových rovnic (tzn. položíme $\mu = 0$), dostaneme soustavu Eulerových rovnic, která je matematickým modelem proudění tzv. ideální (nevazké) tekutiny.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\rho E + p)u_j] = 0 \quad (2.16)$$

Soustavu Eulerových rovnic (2.14) až (2.16) uzavírá stavová rovnice ideálního plynu (2.5).

2.4 Počáteční a okrajové podmínky

Soustavu Navierových-Stokesových nebo Eulerových rovnic řešíme na omezené oblasti $D \subset R^3$ pro $t > 0$, a proto je třeba ji doplnit vhodnými počátečními a okrajovými podmínkami.

2.4.1 Počáteční podmínky

Pro konkrétní výpočet za použití Navierových-Stokesových či Eulerových rovnic musíme předepsat počáteční stav⁶ proudového pole. To lze provést následovně:

$$\rho(\vec{x}, 0) = \rho_{pp}(\vec{x}), \quad \vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_{pp}(\vec{x}), \quad E(\vec{x}, 0) = E_{pp}(\vec{x}), \quad (2.17)$$

kde $\rho_{pp}(\vec{x})$, $\vec{u}_{pp}(\vec{x})$ a $E_{pp}(\vec{x})$ jsou dané počáteční hodnoty neznámých veličin.

2.4.2 Okrajové podmínky

V této části uvedeme základní okrajové podmínky, tzn. vstupní okrajovou podmínku (část hranice, kterou proud vstupuje do výpočetní oblasti), výstupní okrajovou podmínku (část hranice, kterou proud opouští výpočetní oblast) a okrajovou podmínku pro pevnou stěnu. Analýza okrajových podmínek pro obecné prostorové proudění je velmi obtížná a přesahuje rámec této práce. Proto se omezíme pouze na uvedení některých možností realizace okrajových podmínek. Podrobnější analýzu je možné nalézt např. v [10].

Okrajové podmínky pro soustavu Navierových-Stokesových rovnic

Formulace okrajových podmínek pro systém Navierových-Stokesových rovnic nebyla do nynější doby korektně matematicky vyřešena a navíc jejich volba závisí na řešeném případě (nadzvukové či podzvukové proudění). Proto uvedeme pouze jeden z možných postupů pro prostorové proudění (viz [10]).

Vstupní okrajová podmínka:

- Zadat ρ , \vec{u} , $\sum_{j=1}^3 (\sum_{i=1}^3 \tau_{ij} n_i) u_j + \lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$.

⁵V našich výpočtech uvažujeme $Pr = 0.72$ (hodnota Prandtlova čísla pro vzduch).

⁶Tzn. stav při $t = 0$.

Výstupní okrajová podmínka:

- Zadat $-pn_i + \sum_{j=1}^3 \tau_{ij}n_j = \text{konst.}$ pro $i = 1, 2, 3$, $\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$.

Pevná stěna:

V této práci budeme uvažovat okrajové podmínky pro adiabatickou stěnu

$$\vec{u} = \vec{0}, \quad \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0.$$

Vektor \vec{n} , který se vyskytuje ve výše uvedených okrajových podmínkách představuje vnější jednotkovou normálu.

Okrajové podmínky pro soustavu Eulerových rovnic

Okrajové podmínky pro soustavu Eulerových rovnic vycházejí z jednorozměrné analýzy hyperbolických soustav, resp. z rozšíření této analýzy do více dimenzí (viz např. [9]). Při předeepisování okrajových podmínek na vstupu, resp. výstupu musíme rozlišovat, zda normálová rychlost nabíhajícího, resp. výstupního proudu je větší či menší než lokální rychlost zvuku c .

Vstupní okrajová podmínka:

- Pro $\vec{u} \cdot \vec{n} < c$ zadat čtyři veličiny, např. ρ, u, v, w .
- Pro $\vec{u} \cdot \vec{n} > c$ zadat všech pět veličin, např. ρ, u, v, w, E .

Výstupní okrajová podmínka:

- Pro $\vec{u} \cdot \vec{n} < c$ zadat jednu veličinu, např. p .
- Pro $\vec{u} \cdot \vec{n} > c$ nezadat žádnou veličinu.

Pevná stěna:

Pro nevaké proudění platí, že proud stěnou neprochází a je s ní tedy v její blízkosti rovnoběžný, tzn.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0. \tag{2.18}$$

Kapitola 3

Matematické modelování turbulentního proudění

Většina případů proudění v technických aplikacích má turbulentní charakter. Pro turbulentní proudění je charakteristické, že setrvačné síly působící na tekutinu převažují nad vazkými silami, které tlumí malé poruchy a nestability proudění. Poměr setrvačných a vazkých sil vyjadřuje Reynoldsovo podobnostní číslo

$$Re = \frac{\rho |\vec{u}| L}{\mu}, \quad (3.1)$$

kde L je charakteristický rozměr daného proudění. Při překročení kritického Reynoldsova čísla dochází k přechodu laminárního proudění do turbulentního proudění.

Pro turbulentní proudění neexistuje jednoznačná definice. Například podle Bradshawa je turbulence trojrozměrný nestacionární pohyb, ve kterém následkem protahování vírů vznikají fluktuační rychlosti, které tvoří spojité spektrum vlnových délek v intervalu od nejmenších určených vazkými silami do největších určených okrajovými podmínkami proudění, tj. geometrickými rozměry [11].

Pro turbulentní proudění jsou charakteristické následující vlastnosti:

- Turbulence není vlastností tekutiny, ale jejího pohybu.
- Turbulence je pohybem kontinua s určitými materiálovými vlastnostmi (vývoj turbulence na nich závisí, ale přímo je neovlivňuje).
- Turbulentní pohyb má chaotický charakter.
- Turbulentní proudění je druhem nestacionárního prostorového vířivého pohybu.
- Turbulence má složitou vnitřní strukturu.
- Turbulence způsobuje intenzivní přenos hmoty, hybnosti, energie a tepla.
- Turbulence má difuzivní charakter.

Přes chaotický charakter turbulence dochází pro stejné počáteční a okrajové podmínky ke vzniku stejných univerzálních vlastností struktury turbulentního proudění. Turbulenci lze považovat za výsledek kvazideterministických procesů v proudící tekutině a střední proudění lze popsat pomocí statistických zákonů. Turbulence má vlastnosti spojitého prostředí (kontinua), a proto okamžitý stav turbulentního proudění lze popsat soustavou Navierových-Stokesových rovnic (2.1), (2.2) a (2.3). Analytické řešení turbulentního proudění, které popisuje soustava Navierových-Stokesových rovnic, není proveditelné pomocí známých matematických prostředků. Proto se řešení provádí výhradně numericky. V současné době se používají následujících základní postupy:

- **DNS (Direct Numerical Simulation)**, přímá numerická simulace. Tato metoda předpokládá přímé numerické řešení soustavy Navierových-Stokesových rovnic (doplňené konkrétními poč. a

okrajovými podmínkami). To je ale možné pouze v případě, že použijeme velmi přesnou numerickou metodu¹ a velmi jemnou výpočetní síť², aby bylo možné zachytit i nejmenší turbulentní vírové struktury. S dnešní výpočetní technikou je možné provádět přímou numerickou simulaci pro úlohy s Reynoldsovým číslem řádu 10^4 až 10^5 . Typické technické aplikace (např. proudění ve vnější a vnitřní aerodynamice) jsou charakteristické Reynoldsovým číslem řádu 10^6 až 10^8 . Z toho plyne, že přímá numerická simulace je v současnosti a v blízké budoucnosti pro reálné úlohy nepoužitelná z technických důvodů.

- **LES (Large Eddy Simulation)**, simulace velkých vírů. Tento přístup je určité zjednodušení předchozí metody. Simulovány jsou pouze vírové struktury do určité velikosti a zbytek je modelován pomocí tzv. SGS (subgrid scale) modelu. Tato metoda je ve srovnání s přímou numerickou simulací mnohem méně náročná na výpočetní výkon. Výpočetní síť může být znatelně hrubší³ a numerické metody řešení jsou srovnatelné s běžně používanými metodami pro laminární proudění. O simulaci velkých vírů se předpokládá, že bude v blízké budoucnosti použitelná pro řešení reálných technických aplikací.
- **RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes)**, středovaná soustava Navierových-Stokesových rovnic. V současné době nejpoužívanější metoda, která spočívá v rozdělení okamžitých hodnot neznámých veličin na střední hodnotu a fluktuaci. Poté se takto rozložené neznámé dosadí do soustavy Navierových-Stokesových rovnic a provede se její středování. Výsledkem je formálně téměř shodná soustava rovnic pro střední hodnoty neznámých veličin. Členy, které vzniknou navíc díky středování je nutné modelovat pomocí modelu turbulence. Výpočetní síť i numerické metody jsou v tomto případě srovnatelné s metodami pro laminární proudění. Výhoda tohoto postupu je realizovatelnost numerického řešení úloh s vysokým Reynoldsovým číslem i na dnešních počítačích. Nevýhodou je, že veškeré turbulentní struktury jsou modelovány pomocí modelu turbulence, který je často založen na empirických, či poloempirických vztazích.
- **RANS-LES Hybrid**. Poslední metodou je kombinace předešlých dvou přístupů, tzn. simulace velkých vírů a soustavy středovaných Navierových-Stokesových rovnic. V blízkosti obtékaných stěn, kde jsou v případě simulací velmi restriktivní požadavky na počet buněk sítě, jsou použity středované Navierovy-Stokesovy rovnice a ve zbytku proudového pole (popřípadě v regionech, kde je výpočetní síť dostatečně jemná) simulace velkých vírů. Tyto metody, známé také jako DES (Detached Eddy Simulation), se v současnosti začínají používat pro numerické řešení reálných technických aplikací s vysokým Reynoldsovým číslem.

3.1 Soustava středovaných Navierových-Stokesových rovnic

Středovaná soustava Navierových-Stokesových rovnic vychází z dekompozice okamžitých hodnot neznámých veličin na střední hodnotu a fluktuaci

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi', \quad (3.2)$$

kde $\bar{\Phi}$ je střední hodnota a Φ' je fluktuace obecné okamžité veličiny Φ . Protože má turbulence chaotický charakter, jsou jednotlivé veličiny turbulentního proudění náhodné funkce času. Pro vybraný náhodný interval dostaneme jednu realizaci náhodného procesu - výběrovou funkci. Střední hodnota náhodné veličiny je potom dána středováním n výběrových funkcí

$$\bar{\Phi}(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Phi_k(x_i, t_s), \quad (3.3)$$

kde t_s je počáteční čas středování. Pokud střední hodnota nezávisí na výběru počátečního času, jedná se o ergodický stacionární proces, který je stacionární ve středních hodnotách. V takovém případě může být střední hodnota získána středováním jediné výběrové funkce podle času

$$\bar{\Phi}(x_i) = \lim_{T_s \rightarrow \infty} \frac{1}{T_s} \int_{t_s}^{t_s+T_s} \Phi(x_i, t) dt, \quad (3.4)$$

¹Většinou se používají tzv. spektrální metody založené na Fourierově transformaci.

²Potřebný počet buněk je úměrný $Re^{9/4}$.

³Kromě oblastí, které se nacházejí v blízkosti obtékaných stěn. Zde jsou požadavky na síť přibližně srovnatelné.

kde T_s je doba středování. Pro hustotu ρ a tlak p tedy použijeme konvenční (tzv. Reynoldsovo) středování, kde okamžité hodnoty jsou dány vztahem

$$\Phi(x_i, t) = \bar{\Phi}(x_i) + \Phi'(x_i, t), \quad (3.5)$$

kde střední hodnota $\bar{\Phi}(x_i)$ je dána vztahem (3.4) a střední hodnota fluktuace $\Phi'(x_i, t)$ je rovna nule, tedy

$$\bar{\Phi}(x_i) = \lim_{T_s \rightarrow \infty} \frac{1}{T_s} \int_{t_s}^{t_s+T_s} \Phi'(x_i, t) dt = 0. \quad (3.6)$$

Vzhledem k matematickým obtížím při modelování stlačitelného turbulentního proudění (viz např. [9]) se pro dekompozici okamžitých hodnot složek rychlosti u_j a celkové energie E používá vztah

$$\Phi(x_i, t) = \tilde{\Phi}(x_i) + \Phi''(x_i, t), \quad (3.7)$$

kde $\tilde{\Phi}(x_i)$ je střední hodnota získaná pomocí Favrova středování, které je dáno vztahem

$$\tilde{\Phi}(x_i) = \frac{1}{\bar{\rho}(x_i)} \lim_{T_s \rightarrow \infty} \frac{1}{T_s} \int_{t_s}^{t_s+T_s} \rho(x_i, t) \Phi(x_i, t) dt. \quad (3.8)$$

Jde tedy o Reynoldsovo středování, které je vážené hustotou. Na rozdíl od konvenčního středování platí, že střední hodnota fluktuace obecné neznámé $\Phi'' \neq 0$, ale $\bar{\rho}\Phi'' = 0$.

Použijeme-li nyní dekompozici (3.5) pro hustotu a tlak a dekompozici (3.7) pro složky vektoru rychlosti a pro celkovou energii v soustavě Navierových-Stokesových rovnic⁴, dostaneme po konvenčním středování všech rovnic tzv. středovanou soustavu Navierových-Stokesových rovnic:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''}) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p}) \tilde{u}_j] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''}) \tilde{u}_i \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{q}_j + \overline{\rho u_j'' h''} - \bar{\tau}_{ij} u_i'' + \overline{\rho u_j'' \frac{1}{2} u_i'' u_i''} \right]. \quad (3.11)$$

Celková energie \tilde{E} v rovnici (3.11) je nyní dána vztahem

$$\tilde{E} = c_V \tilde{T} + \frac{1}{2} \tilde{u}_j \tilde{u}_j + k = \tilde{u}_e + \frac{1}{2} \tilde{u}_j \tilde{u}_j + k, \quad (3.12)$$

kde u_e je vnitřní energie a k je turbulentní kinetická energie, která je definována jako

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i''}. \quad (3.13)$$

Složky středovaného tenzoru vazkých napětí $\bar{\tau}_{ij}$ jsou dány vztahem (2.6) pro středované veličiny, tedy

$$\bar{\tau}_{ij} = 2\bar{\mu} \bar{S}_{ij}, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right), \quad \bar{\mu} = \mu_{ref} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right)^{\frac{3}{4}}. \quad (3.14)$$

Složky středovaného vektoru tepelného toku \bar{q}_j jsou podobně jako v případě středovaného tenzoru vazkých napětí dány vztahem (2.12), tedy

$$\bar{q}_j = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\bar{\mu}}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right). \quad (3.15)$$

Nedílnou součástí soustavy středovaných Navierových-Stokesových rovnic je i středovaná stavová rovnice ideálního plynu ve tvaru

$$\bar{p} = (\gamma-1) \left[\bar{\rho} \tilde{E} - \frac{1}{2} \overline{\rho u_j'' u_j''} - \bar{\rho} k \right]. \quad (3.16)$$

⁴Rovnice (2.1), (2.2) a (2.3).

Středovaná soustava Navierových-Stokesových rovnic obsahuje stejné členy jako soustava pro okamžité hodnoty, ale navíc se v ní vyskytují členy, které obsahují fluktuace rychlosti, popř. fluktuace entalpie. Poslední člen ve středované Navierově-Stokesově rovnici (3.10), tzn. $-\overline{\rho u_i'' u_j''}$, vyjadřuje vliv turbulentního přenosu hybnosti a nazývá se tenzor Reynoldsových napětí (jehož složky označíme τ_{ij}^t). Člen $\overline{\rho u_j'' h''}$, který se vyskytuje ve středovaném zákonu zachování energie (3.11) vyjadřuje turbulentní tepelný tok, jehož složky označíme q_j^t . Poslední dva členy v rovnici (3.11) odpovídají turbulentnímu přenosu a molekulární difuzi turbulentní energie. Tyto členy jsou zanedbatelně malé pro režimy proudění s Machovým číslem $M_\infty < 5$ (viz [14]), a proto budou zanedbány i v této práci. Pro složky tenzoru Reynoldsových napětí τ_{ij}^t lze odvodit (viz [11], nebo [12]) transportní rovnici

$$\frac{\partial \tau_{ij}^t}{\partial t} + \frac{\partial (\tilde{u}_k \tau_{ij}^t)}{\partial x_k} = P_{ij} + \epsilon_{ij} - \Pi_{ij} + D_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\tau_{kj} u_i'' + \tau_{ki} u_j''}) + \overline{u_i''} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \overline{u_j''} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}, \quad (3.17)$$

kde jednotlivé výrazy na pravé straně představují:

- produkce Reynoldsových napětí P_{ij} ,

$$P_{ij} = -\tau_{ik}^t \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{jk}^t \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \quad (3.18)$$

- disipace ϵ_{ij} ,

$$\epsilon_{ij} = \overline{\tau_{kj} \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} + \tau_{ki} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}} \quad (3.19)$$

- redistribuce Reynoldsových napětí Π_{ij} ,

$$\Pi_{ij} = \overline{p' \left(\frac{\partial u_j''}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \right)} \quad (3.20)$$

- turbulentní difuze D_{ij} ,

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho u_k'' u_i'' u_j''}) + \frac{\partial}{\partial x_k} [\overline{p' (\delta_{jk} u_i'' + \delta_{ik} u_j'')}]. \quad (3.21)$$

Pokud v rovnici (3.17) položíme $i = j$, dostaneme po úpravě transportní rovnici pro turbulentní kinetickou energii (viz [12])

$$\frac{\partial (\bar{\rho} k)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} k \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = \tau_{ij}^t \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\tau_{ij} u_i''} - \overline{\rho u_j'' \frac{1}{2} u_i'' u_i''} - \overline{p' u_j''} \right] - \overline{u_i''} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}}. \quad (3.22)$$

3.2 Uzavření soustavy středovaných Navierových-Stokesových rovnic

Při zkoumání rovnice (3.17) vychází najevo, že se v ní objevují nové neznámé korelace fluktuací rychlosti a tlaku. Pro ně lze odvodit odpovídající transportní rovnice, ve kterých se ale opět vyskytnou nové neznámé korelace. Proto je nutné, v zájmu uzavření soustavy rovnic, na určité úrovni začít s aproximací těchto neznámých členů. V současné době existují tři základní přístupy k uzavření soustavy středovaných Navierových-Stokesových rovnic:

- V prvním případě jsou modelovány neznámé členy přímo v rovnici pro tenzor Reynoldsových napětí, tzn. v rovnici (3.17). Tyto modely, které se označují jako modely 2. řádu, poskytují nejkompaktnější fyzikální popis turbulence (z metod, které jsou založeny na středování soustavy Navierových-Stokesových rovnic). Některé z těchto modelů lze nalézt např. v [11], nebo v [12]. Nevýhodnou těchto modelů je jejich velmi obtížné numerické řešení, a proto se jimi v této práci nebudeme zabývat.

- Druhý přístup spočívá přímo v aproximaci tenzoru Reynoldsových napětí zjednodušeným vztahem, který je založen na analogii k Newtonovu třecímu zákonu (tzv. Boussinesqova hypotéza) a na dimenzionální analýze (viz [11]). Tyto modely se označují jako modely 1. řádu.
- Třetí přístup je určitým kompromisem předchozích dvou. Je založen na zjednodušeném řešení rovnice pro tenzor Reynoldsových napětí, kde je zanedbána konvekce a difuze. Toto řešení poté vede na algebraické vztahy pro složky tenzoru Reynoldsových napětí (viz [15], nebo [11]).

Některé z těchto postupů budou podrobněji popsány níže.

3.2.1 Modely turbulence prvního řádu

Tyto modely jsou založeny na přímé aproximaci tenzoru Reynoldsových napětí $\overline{\tau}^t$ pomocí Boussinesqovy hypotézy. Ta předpokládá, že turbulentní přenos hybnosti je analogický k molekulárnímu přenosu hybnosti, tzn. k Newtonovu třecímu zákonu. Tuto hypotézu dále rozšířili Harlow a Nakayama (viz [11]) pro případ obecného turbulentního proudění, kde tenzor Reynoldsových napětí závisí na tenzoru rychlosti deformace. Složky tenzoru Reynoldsových napětí jsou tedy aproximovány pomocí vztahu

$$-\overline{\rho u_i'' u_j''} = \tau_{ij}^t = 2\mu_t \overline{S}_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{\rho k}, \quad (3.23)$$

kde složky středovaného tenzoru rychlosti deformace \overline{S}_{ij} jsou dány druhým vztahem v (3.14). V aproximaci (3.23) se objevuje nová veličina μ_t , která představuje turbulentní vazkost. Boussinesqova hypotéza tedy sama o sobě neřeší problém úzavěru soustavy středovaných Navierových-Stokesových rovnic, protože jsme pouze nahradili původní neznámé (složky tenzoru Reynoldsových napětí) za jinou neznámou veličinu (turbulentní vazkost).

Pomocí podobnostní teorie a dimenzionální analýzy lze turbulentní vazkost vyjádřit ve tvaru součinu turbulentního rychlostního a turbulentního délkového měřítka. Opět zde existuje několik kategorií, které se liší svojí komplexností:

- **Algebraické modely turbulence** - Obě turbulentní měřítka jsou určena pomocí algebraických vztahů. Do této skupiny patří modely Prandtlův, Cebeciho a Smitha, Baldwinův a Lomaxův a další viz [12]. Největší výhodou těchto modelů je jejich jednoduchost, protože není potřeba řešit žádnou další parciální diferenciální rovnici. To je ale současně i jejich největší nevýhoda, protože výpočet obou turbulentních měřítek je založen na empirických či poloempirických vztazích. To výrazně snižuje univerzálnost (a použitelnost) těchto modelů.
- **Půlrovnice modely turbulence** - Jsou velmi podobné algebraickým modelům, ale pro určitou veličinu se řeší obyčejná diferenciální rovnice. Zástupcem této třídy je např. model Johnsonův a Kingův [12].
- **Jednorovnicové modely turbulence** - Pro jedno z turbulentních měřítek (většinou rychlostní, které je charakterizováno turbulentní kinetickou energií k) se řeší transportní parciální diferenciální rovnice. Zbylé délkové měřítka jsou z pravidla dopočítána z algebraického vztahu ve tvaru $L_t = f(y)$, což omezuje použitelnost těchto modelů na jednodušší přírady rovinného proudění. Jedním z modelů této třídy je např. Prandtlův model, viz [12]. Některé modely této třídy však řeší transportní rovnici pro jistou pomocnou veličinu, ze které je pak přímo určena turbulentní vazkost μ_T . Příkladem takového modelu je Spalartův a Allmarasův model turbulence [12].
- **Dvourovnice modely turbulence** - Nejrozšířenější skupina modelů, kde jsou pro obě turbulentní měřítka řešeny transportní parciální diferenciální rovnice. Mezi nejznámější modely této třídy patří $k - \epsilon$ a $k - \omega$ modely [12].

Dále se budeme zabývat pouze dvourovnice modely turbulence, konkrétněji $k - \omega$ modelem.

TNT $k - \omega$ model

Kokův TNT $k - \omega$ model (viz [13]) vychází z původního Wilcoxova $k - \omega$ modelu (viz [12]). Název TNT (Turbulent-NonTurbulent) dostal díky analýze difuzních konstant (viz dále), která se provádí v oblasti vnější hranice mezní vrstvy, tzn. v okolí hranice oblasti, kde se turbulentní efekty projevují.

Skládá se z transportní rovnice pro turbulentní kinetickou energii k , která charakterizuje turbulentní rychlostní měřítko, a dále z transportní rovnice pro specifickou rychlost disipace ω , která charakterizuje turbulentní délkové měřítko.

Transportní rovnice pro turbulentní kinetickou energii vychází z rovnice (3.22), kde jsou zanedbány všechny členy, které obsahují tlak. Toto zjednodušení se prakticky neprojeví pro režimy proudění s Machovým číslem $M_\infty < 5$. První člen na pravé straně představuje produkci turbulentní kinetické energie

$$P = \tau_{ij}^t \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}. \quad (3.24)$$

Druhý člen na pravé straně rovnice (3.22) představuje rychlost disipace

$$\bar{\rho}\epsilon = \tau_{ij} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}. \quad (3.25)$$

V TNT modelu je místo rychlosti disipace ϵ použita specifická rychlost disipace ω . Tyto dvě veličiny jsou spolu svázány vztahem

$$\epsilon = \beta^* k \omega, \quad (3.26)$$

kde β^* je konstanta modelu turbulence, která bude specifikována později. Třetí a čtvrtý člen na pravé straně odpovídá molekulární difuzi, resp. turbulentnímu transportu turbulentní kinetické energie. Nejčastěji používaná aproximace těchto členů je

$$\overline{\tau_{ij} u_i''} - \overline{\rho u_j'' \frac{1}{2} u_i'' u_i''} = (\bar{\mu} + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j}, \quad (3.27)$$

kde σ^* je opět konstanta modelu turbulence. Dosazením vztahů (3.24) až (3.27) do rovnice (3.22) získáme konečnou podobu transportní rovnice pro turbulentní kinetickou energii

$$\frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}k\tilde{u}_j)}{\partial x_j} = P - \beta^* \bar{\rho}k\omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\bar{\mu} + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]. \quad (3.28)$$

Transportní rovnici pro specifickou rychlost disipace lze odvodit pomocí transformace transportních rovnic pro turbulentní kinetickou energii k a rychlost disipace ϵ (viz [11]). Její tvar má podobu

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\omega\tilde{u}_j)}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} P - \beta \bar{\rho}\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\bar{\mu} + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \sigma_d \frac{\bar{\rho}}{\omega} \max \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 0 \right), \quad (3.29)$$

kde α , β , σ a σ_d jsou modelové konstanty. Na rozdíl od původní rovnice, kterou navrhl Wilcox (viz [12]), se v ní objevuje poslední člen na pravé straně, který představuje příčnou difuzi. Tento člen, společně s vhodnou volbou modelových konstant, odstraňuje citlivost na hodnotě specifické rychlosti disipace v nerušeném proudě.

Turbulentní vazkost μ_t je nakonec dána vztahem

$$\mu_t = C_\mu \frac{\bar{\rho}k}{\omega}, \quad (3.30)$$

kde koeficient turbulentní vazkosti $C_\mu = 1$.

Kalibrace modelových konstant

Konstanty modelu turbulence lze určit na základě jednoduchých případů proudění, případně numerickou optimalizací. První vztah můžeme získat z rozpadu homogenní izotropní turbulence. V takovém případě lze v rovnicích pro turbulentní kinetickou energii (3.28) a specifickou rychlost disipace (3.29) zanedbat konvekci, difuzi a produkci, takže se redukují na obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{dk}{dt} = -\beta^* k \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\beta^* \omega^2. \quad (3.31)$$

Řešení soustavy rovnic (3.31) vede na vztah

$$k \sim t^{-\beta^*/\beta}. \quad (3.32)$$

Experimenty ukazují, že $k \sim t^{-n}$, kde $n = 1.25 \pm 0.06$ (viz [12]). Po porovnání se vztahem (3.32) dostaneme vztah pro poměr modelových konstant

$$\frac{\beta^*}{\beta} = \frac{6}{5}, \quad (3.33)$$

který odpovídá spodní části intervalu experimentálních hodnot.

Další vztahy lze odvodit z případu obtékání desky s nulovým gradientem tlaku. V logaritmické části mezní vrstvy platí, že je dostatečně vzdálená od stěny a můžeme tedy zanedbat vliv molekulární vazkosti. Zároveň je ale dostatečně blízko na to, abychom mohli zanedbat konvekci. V takovém případě se transportní rovnice modelu turbulence společně se středovanými hybnostními rovnicemi zjednoduší do tvaru

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] \\ 0 &= \nu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)^2 - \beta^* k \omega + \sigma^* \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \frac{\partial k}{\partial y} \right] \\ 0 &= \alpha \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)^2 - \beta \omega^2 + \sigma \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \frac{\partial \omega}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (3.34)$$

kde $\nu_t = \mu_t / \bar{\rho}$ je kinematická turbulentní vazkost. Řešení soustavy rovnic (3.34) je

$$\tilde{u} = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln y + \text{const.}, \quad k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{\beta^*}}, \quad \omega = \frac{u_\tau}{\sqrt{\beta^* \kappa y}}, \quad (3.35)$$

kde u_τ je tzv. třecí rychlost a κ je von Kármánova konstanta. Dosazením řešení (3.35) zpět do soustavy (3.34) obdržíme vztah pro modelovou konstantu α ,

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta^*} - \frac{\sigma \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} \quad (3.36)$$

a dále pro složku tenzoru Reynoldsových napětí τ_{xy}^t ,

$$\tau_{xy}^t = u_\tau^2. \quad (3.37)$$

Z experimentálních měření lze vypočítat, že poměr složky tenzoru Reynoldsových napětí τ_{xy}^t ku turbulentní kinetické energii k v logaritmické části mezní vrstvy je přibližně 3/10 (viz [12]). Použitím druhého vztahu v (3.35) a (3.37) vyčíslíme modelovou konstantu $\beta^* = 0.09$. Následně můžeme pomocí vztahu (3.33) a hodnoty β^* vyčíslit i modelovou konstantu $\beta = 0.075$.

Analýza vazké podvrstvy mezní vrstvy (viz [12]) ukazuje, že optimální hodnota pro modelovou konstantu σ je 1/2. V takovém případě je možné integrovat rovnice modelu turbulence s přijatelným výsledkem až ke stěně bez použití tlumících funkcí. Dosazením hodnot $\beta^* = 0.09$, $\beta = 0.075$, $\sigma = 0.5$ a $\kappa = 0.41$ do vztahu (3.36) dostaneme hodnotu modelové konstanty $\alpha = 0.553$.

Zbylé dvě konstanty (σ^* a σ_d) mají ve vnitřní části mezní vrstvy malý vliv a jejich hodnoty se proto odvozují z rozboru chování proudění v blízkosti vnější hranice mezní vrstvy. Transportní rovnice modelu turbulence společně se středovanými hybnostními rovnicemi se redukují (viz např. [16]) na

$$\begin{aligned} v_C \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] \\ v_C \frac{\partial k}{\partial y} &= \sigma^* \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \frac{\partial k}{\partial y} \right] \\ v_C \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \sigma \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] + \sigma_d \frac{\nu_t}{k} \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

přičemž předpokládáme, že konvektivní rychlost v_C je pro tento případ konstantní. Řešením soustavy rovnic (3.38) je

$$\begin{aligned} \tilde{u}(y) &= u_{ch} f^{\sigma^* \sigma / (\sigma - \sigma^* + \sigma_d)} \\ k(y) &= k_{ch} f^{\sigma / (\sigma - \sigma^* + \sigma_d)} \\ \omega(y) &= \omega_{ch} f^{(\sigma^* - \sigma_d) / (\sigma - \sigma^* + \sigma_d)}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

kde indexem ch jsou označeny charakteristické hodnoty dané úlohy a funkce f je dána vztahem

$$f(y) = \max\left(\frac{L_{ch} - y}{L_{ch}}, 0\right). \quad (3.40)$$

Pokud mají vztahy (3.39) tvořit alespoň slabé řešení soustavy (3.38), musí splňovat podmínky, které odvodil Kok (viz [13]). Tyto podmínky jsou formulovány v podobě následující soustavy nerovnic:

$$\begin{aligned} \sigma - \sigma^* + \sigma_d &> 0 \\ \sigma^* - \sigma_d &> 0 \\ \sigma - \sigma^* + \sigma_d &\leq \sigma^* \sigma. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Dále se předpokládá, že $\sigma^* > 0.5$ a $\sigma > 0$. Na základě podmínek (3.41) byly Kokem zvoleny hodnoty modelových konstant $\sigma^* = 2/3$ a $\sigma_d = 1/2$.

3.2.2 Modely turbulence s algebraickými rovnicemi pro složky tenzoru Reynoldsových napětí

Modely turbulence prvního řádu (zejména dvourovnicové modely) jsou použitelné pro poměrně značný rozsah technických aplikací. Existuje však několik podstatných případů proudění, kde tyto modely částečně, nebo úplně selhávají. Mezi nejdůležitější případy patří:

- Proudění s náhlou změnou v rychlosti deformace.
- Obtékání (hodně) zakřivených ploch.
- Proudění v kanálech se sekundárním prouděním.
- Proudění rotujících tekutin.
- Prostorové proudění.
- Proudění s odtržením mezní vrstvy.

V těchto případech již nevystačíme s lineárními modely turbulence, které jsou založeny na Boussinesqově hypotéze. Nedostatečný fyzikální popis turbulence pomocí lineárních modelů lze odstranit použitím modelů druhého řádu. Ty se ovšem skládají z šesti nelineárních parciálních diferenciálních rovnic pro jednotlivé složky tenzoru Reynoldsových napětí (který je symetrický) a dále z další transportní rovnice pro veličinu, která charakterizuje turbulentní délkové měřítko⁵.

Řešení dalších sedmi parciálních diferenciálních rovnic klade zvýšené nároky na výpočetní výkon a dále se ukazuje, že numerické řešení těchto rovnic je velmi obtížné. Zanedbání konvekce a difuze v těchto rovnicích a následné aproximace vedou na soustavu nelineárních algebraických rovnic (viz [15]), kterou lze zapsat symbolicky ve tvaru

$$f_{ij}(a_{kl}, S_{kl}^*, \Omega_{kl}^*) = 0, \quad (3.42)$$

kde a_{kl} jsou složky symetrického tenzoru anizotropie Reynoldsových napětí, který je definován vztahem

$$a_{kl} = \frac{\overline{u_k'' u_l''}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{kl}. \quad (3.43)$$

Soustava rovnic (3.42) závisí na bezrozměrném středovaném tenzoru rychlosti deformace

$$S_{kl}^* = \tau \overline{S}_{kl} = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} \right), \quad (3.44)$$

resp. na bezrozměrném středovaném tenzoru rotace

$$\Omega_{kl}^* = \tau \overline{\Omega}_{kl} = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_l} - \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_k} \right), \quad (3.45)$$

⁵Nejčastěji rychlost disipace ϵ , ale existují i formulace pro specifickou rychlost disipace ω .

kde τ je turbulentní časové měřítko, které odpovídá převrácené hodnotě specifické rychlosti disipace ω . Soustava rovnic (3.42) neobsahuje difuzi ani tlumící členy, a proto je numericky velmi nestabilní. Díky tomu nepřináší prakticky žádné výhody oproti modelům, které jsou založeny na diferenciální rovnici pro složky tenzoru Reynoldsových napětí. Proto byly v posledních letech navrženy modely, které vyjadřují složky tenzoru Reynoldsových napětí pomocí explicitních nelineárních vztahů. V našem případě popíšeme EARSM model, který vyvinuli Wallin a Johansson (viz [15]).

Explicitní vztah pro tenzor anizotropie byl navržen pomocí teorie lineární algebry tak, že symetrický tenzor druhého řádu má být vyjádřen pomocí dvou tenzorů druhého řádu - symetrického (3.44) a antisymetrického (3.45). Nejobecnější tvar tohoto vyjádření obsahuje deset nezávislých skupin, přičemž všechny kombinace vyšších řádu lze redukovat pomocí Cayleyho-Hamiltonova teorému (viz [15]). Pro prostorové proudění lze počet nezávislých skupin redukovat na pět skupin a výsledný výraz má tvar

$$\begin{aligned} a_{ij} = & \beta_1 S_{ij}^* \\ & + \beta_3 \left(\Omega_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \frac{1}{3} II_{\Omega} \delta_{ij} \right) \\ & + \beta_4 (S_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* S_{kj}^*) \\ & + \beta_6 \left(S_{ik}^* \Omega_{kl}^* \Omega_{lj}^* + \Omega_{ik}^* \Omega_{kl}^* S_{lj}^* - \frac{2}{3} IV \delta_{ij} \right) \\ & + \beta_9 (\Omega_{ik}^* S_{kl}^* \Omega_{lm}^* \Omega_{mj}^* - \Omega_{ik}^* \Omega_{kl}^* S_{lm}^* \Omega_{mj}^*). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Koeficienty β_1 až β_9 jsou obecně funkcemi pěti nezávislých invariantů kombinací \vec{S}^* a $\vec{\Omega}^*$

$$II_{\Omega} = \Omega_{kl}^* \Omega_{lk}^*, \quad (3.47)$$

$$II_S = S_{kl}^* S_{lk}^*, \quad (3.48)$$

$$III_S = S_{kl}^* S_{lm}^* S_{mk}^*, \quad (3.49)$$

$$IV = S_{kl}^* \Omega_{lm}^* \Omega_{mk}^*, \quad (3.50)$$

$$V = S_{kl}^* S_{lm}^* \Omega_{mn}^* \Omega_{nk}^* \quad (3.51)$$

a dále závisí na parametru N , který odpovídá poměru produkce a rychlosti disipace turbulentní kinetické energie. Jeho vyjádření vychází z kombinace obecné rovnice pro tenzor anizotropie (3.46) a řešení zjednodušené soustavy nelineárních algebraických rovnic (3.42), viz [15], nebo [11]. Pro prostorové proudění dostaneme rovnici šestého stupně pro N

$$N^6 - C_1' N^5 - \left(\frac{27}{10} II_S + \frac{5}{2} II_{\Omega} \right) N^4 + \frac{5}{2} C_1' II_{\Omega} N^3 + \left(II_{\Omega}^2 + \frac{189}{20} II_S II_{\Omega} - \frac{81}{5} V \right) N^2 - C_1' II_{\Omega}^2 N - \frac{81}{5} IV^2 = 0, \quad (3.52)$$

jejíž řešení nelze nalézt v uzavřeném tvaru, a proto se určuje iteračně. Pro rovinné proudění se tato rovnice zjednoduší na kubickou rovnici (viz [15])

$$N_c^3 - C_1' N_c^2 - \left(\frac{27}{10} II_S + 2 II_{\Omega} \right) N_c + 2 C_1' II_{\Omega} = 0, \quad (3.53)$$

která má řešení

$$N_c = \begin{cases} \frac{C_1'}{3} + (P_1 + \sqrt{P_2})^{\frac{1}{3}} + \text{sign}(P_1 - \sqrt{P_2}) |(P_1 - \sqrt{P_2})^{\frac{1}{3}}| & \text{pro } P_2 \geq 0 \\ \frac{C_1'}{3} + 2(P_1^2 - P_2)^{\frac{1}{6}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}} \right) \right] & \text{pro } P_2 < 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

kde P_1 a P_2 jsou dány vztahy

$$P_1 = \left(\frac{C_1'^2}{27} + \frac{9}{20} II_S - \frac{2}{3} II_{\Omega} \right) C_1', \text{ resp. } P_2 = P_1^2 - \left(\frac{C_1'^2}{9} + \frac{9}{10} II_S + \frac{2}{3} II_{\Omega} \right)^3. \quad (3.55)$$

Řešení (3.54) lze použít jako počáteční přiblížení v iteračním procesu pro rovnici (3.52), případně lze zvolit přímo $N \approx N_c$, což je dostatečná aproximace pro většinu aplikací, viz [15]. Lepší aproximaci lze dostat pomocí perturbace invariantů IV a V v okolí dvourozměrného řešení, což vede na vztah

$$N \approx N_c + \frac{162 [IV^2 + (V - 0.5 II_S II_{\Omega}) N_c^2]}{20 N_c^4 (N_c - 0.5 C_1') - II_{\Omega} (10 N_c^3 + 15 C_1' N_c^2) + 10 C_1' II_{\Omega}^2}. \quad (3.56)$$

Pomocí invariantů (3.47) až (3.51) a parametu N můžeme vyjádřit koeficienty β_i :

$$\beta_1 = -\frac{N(2N^2 - 7II_\Omega)}{Q}, \quad \beta_3 = -\frac{12N^{-1}IV}{Q}, \quad \beta_4 = -\frac{2(N^2 - 2II_\Omega)}{Q}, \quad \beta_6 = -\frac{6N}{Q}, \quad \beta_9 = \frac{6}{Q}, \quad (3.57)$$

kde jmenovatel Q má tvar

$$Q = \frac{5}{6}(N^2 - 2II_\Omega)(2N^2 - II_\Omega). \quad (3.58)$$

Pro úplnost ještě zbývá definovat turbulentní časové měřítko τ ,

$$\tau = \max\left(\frac{1}{\beta^*\omega}, C_\tau\sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\beta^*\bar{\rho}k\omega}}\right). \quad (3.59)$$

Konstanty EARSM modelu jsou $C'_1 = 1.8$ a $C_\tau = 6$, viz [15]. Z uvedeného modelu je zřejmé, že se jedná pouze o konstitutivní vztahy. Ty je potřeba doplnit o transportní rovnice pro turbulentní kinetickou energii k a specifickou rychlost disipace ω . Výše popsaný model lze doplnit rovnicemi TNT $k - \omega$ modelu, tzn. rovnicemi (3.28) a (3.29), případně rovnicemi původního Wilcoxova modelu, viz [15].

Dále je vhodné přeformulovat konstitutivní vztahy pro tenzor anizotropie do podoby rovnice pro tenzor Reynoldsových napětí, tedy

$$-\overline{\rho u_i'' u_j''} = \tau_{ij}^t = 2\mu_t \bar{S}_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\bar{\rho}k - \bar{\rho}k a_{ij}^{(ex)}, \quad (3.60)$$

kde $a_{ij}^{(ex)}$ jsou složky tenzoru přídavné anizotropie, který definujeme jako

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(ex)} &= \beta_3 \left(\Omega_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \frac{1}{3} II_\Omega \delta_{ij} \right) \\ &+ \beta_4 (S_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* S_{kj}^*) \\ &+ \beta_6 \left(S_{ik}^* \Omega_{kl}^* \Omega_{lj}^* + \Omega_{ik}^* \Omega_{kl}^* S_{lj}^* - II_\Omega S_{ij}^* - \frac{2}{3} IV \delta_{ij} \right) \\ &+ \beta_9 (\Omega_{ik}^* S_{kl}^* \Omega_{lm}^* \Omega_{mj}^* - \Omega_{ik}^* \Omega_{kl}^* S_{lm}^* \Omega_{mj}^*) \end{aligned} \quad (3.61)$$

a turbulentní vazkost μ_t je dána vztahem

$$\mu_t = C_\mu \bar{\rho} k \tau = -\frac{1}{2}(\beta_1 + II_\Omega \beta_6) \bar{\rho} k \tau. \quad (3.62)$$

Pro rovinné proudění existují pouze dva nenulové koeficienty, β_1 a β_4 , které jsou definovány jako

$$\beta_1^{(2D)} = -\frac{6}{5} \frac{N_c}{N_c^2 - 2II_\Omega}, \quad \beta_4^{(2D)} = -\frac{6}{5} \frac{1}{N_c^2 - 2II_\Omega}, \quad (3.63)$$

takže se vztahy pro přídavnou anizotropii (3.61), resp. turbulentní vazkost (3.62) výrazně zjednoduší. Přídavná anizotropie pro rovinné proudění má tvar

$$a_{ij}^{(ex)} = \beta_4^{(2D)} (S_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* S_{kj}^*). \quad (3.64)$$

Turbulentní vazkost pro rovinné proudění je dána vztahem

$$\mu_t = C_\mu \bar{\rho} k \tau = -\frac{1}{2} \beta_1^{(2D)} \bar{\rho} k \tau. \quad (3.65)$$

Rekalibrace modelových konstant TNT modelu pro EARSM

Hellsten ve své práci ukazuje (viz [16]), že ne každý dvourovnicový model lze použít ve spojení s konstitutivními vztahy EARSM modelu. Spojení EARSM vztahů s TNT $k - \omega$ modelem produkuje nefyzikálně ostré průběhy rychlostních profilů na hranici mezní vrstvy, viz [16], nebo obrázek 7.5. To je způsobeno tím, že difuzní konstanty σ^* a σ_d byly odvozeny za předpokladu lineárního vztahu mezi tenzorem Reynoldsových napětí a tenzorem rychlosti deformace, tzn. za Boussinesqovy hypotézy. Ta dále

předpokládá, že koeficient turbulentní vazkosti C_μ je konstantní. Naštěstí je vliv členů vyššího řádu v blízkosti vnější hranice mezní vrstvy zanedbatelný (viz [16]) a jediný podstatný rozdíl proti lineárním modelům je fakt, že koeficient C_μ je v případě nelineárních konstitutivních modelů proměnný. V následující analýze předpokládáme, že koeficient C_μ lze vyjádřit v mocninném tvaru podobně jako veličiny \tilde{u} , k a ω , tzn. řešení soustavy (3.38). Protože platí, že $\nu_t \sim f$ (viz [13]) a $\nu_t = C_\mu k/\omega$, můžeme předpokládat, že pokud koeficient C_μ je úměrný f^m potom poměr k/ω je úměrný f^{1-m} . Za výše uvedených předpokladů se řešení soustavy rovnic (3.38) modifikuje na

$$\begin{aligned}\tilde{u}(y) &= u_{ch} f^{\sigma^* \sigma(1-m)/(\sigma-\sigma^*+\sigma_d)} \\ k(y) &= k_{ch} f^{\sigma(1-m)/(\sigma-\sigma^*+\sigma_d)} \\ \omega(y) &= \omega_{ch} f^{(\sigma^*-\sigma_d)(1-m)/(\sigma-\sigma^*+\sigma_d)}.\end{aligned}\quad (3.66)$$

Je zřejmé, že modifikované vztahy (3.66) budou slabým řešením soustavy (3.38) pokud $m < 1$. Navíc pro $m < 0$ bude koeficient C_μ se zmenšující se vzdáleností k vnější hranici mezní vrstvy rostoucí a řešení v okolí hranice bude hladší. Pro případ $m > 0$ bude situace opačná. Se zmenšující se vzdáleností k vnější hranici mezní vrstvy je koeficient C_μ klesající a řešení bude mít nefyzikálně ostré průběhy. Pro EARSM model platí, že koeficient C_μ přibližně odpovídá převrácené hodnotě parametru $S = \sqrt{2S_{ij}^* S_{ij}^*}$, viz [16]. Z toho vyplývá, že situace, kde S roste se zmenšující se vzdáleností k vnější hranici mezní vrstvy je nepříznivá. Parametr S pro tento případ je dán vztahem

$$S = \frac{1}{\omega} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \sim f^{[\sigma^* \sigma(1-m) + (\sigma^* - \sigma_d)m - \sigma]/(\sigma - \sigma^* + \sigma_d)}.\quad (3.67)$$

Vzhledem k předchozím poznatkům je zřejmé, že požadujeme, aby parametr S byl konstantní nebo klesající se zmenšující se vzdáleností k vnější hranici mezní vrstvy. To lze zajistit požadavkem na nezápornost exponentu ve vztahu (3.67), který vede na podmínku

$$\sigma^* \geq \frac{\sigma + m\sigma_d}{\sigma + m(1 - \sigma)},\quad (3.68)$$

kde m je neznámý parametr. Případy, kde $m > 0$ můžeme vyloučit, protože kladné hodnoty tohoto parametru odpovídají klesajícím hodnotám koeficientu C_μ . Pro $m = 0$ dostaneme podmínku $\sigma^* \geq 1$. Podle Hellstena (viz [16]) je bezpečnější požadovat ostrou nerovnost, tedy

$$\sigma^* > 1.\quad (3.69)$$

Pro případy, kde $m < 0$ platí, že podmínka (3.68) bude obsažena v (3.69) pokud $\sigma_d > 1 - \sigma$. To bude splněno za předpokladu platnosti první podmínky v (3.41) a pokud $\sigma^* \geq 1$. Z uvedeného tedy vyplývá, že postačující je požadovat splnění podmínky (3.69) a dále prvních dvou podmínek z (3.41), které zůstanou nezměněny. Poslední podmínka z (3.41) bude za předpokladů platnosti podmínky (3.69) a prvních dvou podmínek v (3.41) splněna vždy.

Pro difuzní konstanty v případě nelineárního modelování konstitutivních vztahů tedy platí modifikovaná soustava nerovnic:

$$\begin{aligned}\sigma - \sigma^* + \sigma_d &> 0 \\ \sigma^* - \sigma_d &> 0 \\ \sigma^* &> 1.\end{aligned}\quad (3.70)$$

Naše strategie při volbě nových hodnot modelových konstant vychází z myšlenky, že konstanty musí splňovat podmínky (3.70) a dále by měly být co nejlíže původním hodnotám TNT modelu. Podle poslední nerovnice v soustavě (3.70) tedy volíme hodnotu $\sigma^* = 1.01$. Dosazením této hodnoty do první nerovnice v (3.70) dostaneme, že konstanta $\sigma_d > 0.51$. Dosazením σ^* do druhé nerovnice v (3.70) dostaneme, že $\sigma_d < 1.01$ a v kombinaci s předchozí nerovností $\sigma_d \in (0.51, 1.01)$. Její hodnotu volíme jako dolní mez, tzn. $\sigma_d = 0.52$. Na závěr poznamenejme, že nově zvolené modelové konstanty $\sigma^* = 1.01$ a $\sigma_d = 0.52$ splňují Hellstenovy podmínky pro nelineární modelování (3.70) i původní Kokovy podmínky (3.41). Volba nových hodnot modelových konstant byla publikována v [47] a [49].

3.2.3 Aproximace turbulentního tepelného toku

K uzavření soustavy středovaných Navierových-Stokesových rovnic je ještě nutné aproximovat turbulentní tepelný tok \bar{q}^t . Ten je obvykle modelován pomocí předpokladu o přídavné turbulentní tepelné vodivosti, který je ekvivalentem k Boussinesqově hypotéze (viz [11]). Jednotlivé složky vektoru turbulentního tepelného toku jsou aproximovány vztahem

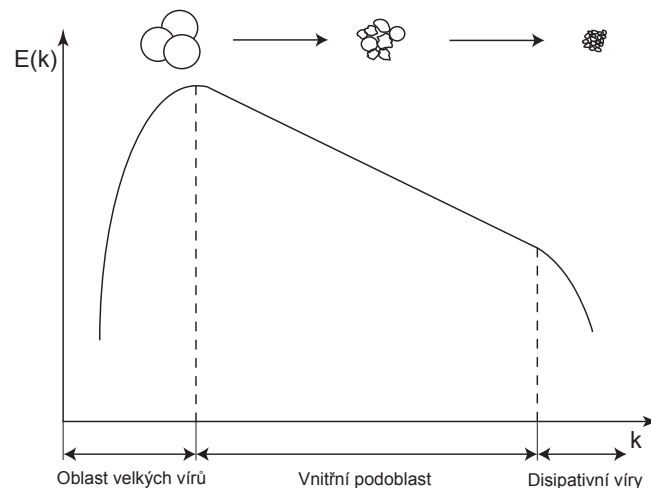
$$\overline{\rho u_j'' h''} = q_j^t = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right), \quad (3.71)$$

kde Pr_t je turbulentní Prandtlovo číslo⁶. Tento přístup se obvykle používá pro modely turbulence prvního i druhého řádu.

3.3 Simulace velkých vírů

Již v úvodu této kapitoly bylo naznačeno, že přímá numerická simulace (DNS) je pro řešení proudění v reálných okrajových podmínkách nepoužitelná z důvodu příliš velké náročnosti na paměť a výpočetní výkon současných počítačů. Tyto nároky vyplývají z faktu, že DNS přímo reprezentuje veškeré vírové struktury od největších, které odpovídají geometrii dané úlohy až po nejmenší, ve kterých probíhá vazká disipace. Simulace velkých vírů (LES) je založena na myšlence, že většina energie je obsažena ve velkých vírech. Ty jsou tedy reprezentovány přímo, zatímco menší víry jsou odfiltrovány a následně modelovány pomocí tzv. subgridních modelů. Vzhledem k tomu, že se velká část výpočetního výkonu pro DNS spotřebuje právě na přímou reprezentaci malých vírových struktur, klade LES metoda výrazně menší nároky na výpočetní techniku.

Přirozenou otázkou je, jak velké víry by měly být reprezentovány přímo. Na tuto otázku nám může odpovědět koncept tzv. energetické kaskády [17] (viz obr. 3.1). Tato koncepce předpokládá, že turbulentní kinetická energie je generována vnějšími silami v oblasti velkých vírů, které jsou srovnatelné s charakteristickým rozměrem dané úlohy. Tyto víry se vlivem nelineárního mechanismu konvektivních členů protahují, deformují a následně rozpadají na menší víry, přičemž se turbulentní energie transportuje do stále menších vírů. Nakonec se energie obsažená v nejmenších vírech přemění na teplo vlivem vazké disipace.



Obrázek 3.1: Energetická kaskáda (v logaritmických souřadnicích).

⁶V našich výpočtech uvažujeme $Pr_t = 0.9$.

V oblasti velkých vírů dochází ke generování turbulentní kinetické energie vlivem vnějších sil, nebo nestability uvnitř proudového pole. Mechanismy generování turbulence mohou být různé, a proto tato oblast nemá univerzální charakter. Ve vnitřní podoblasti dochází k transportu turbulentní kinetické energie z velkých vírů do menších. Velikost této oblasti závisí na velikosti Reynoldsova čísla a energetické spektrum v této části je známé jako Kolmogorovův zákon (viz [12], nebo [17])

$$E(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (3.72)$$

kde C_K je Kolmogorovova konstanta, která nabývá hodnoty od 1.4 do 1.7. Poslední část energetické kaskády zahrnuje nejmenší víry, jejichž prostřednictvím je turbulentní kinetická energie disipována na teplo. Tyto víry jsou prakticky izotropní a lze je modelovat pomocí Boussinesqovy hypotézy.

Základní myšlenkou LES metody je tedy přímo reprezentovat turbulentní struktury z oblasti velkých vírů a modelovat malé víry, ve kterých probíhá disipace energie. Hranice mezi přímou reprezentací a modelováním leží ve vnitřní podoblasti a závisí na výpočetní síti.

Separace velkých turbulentních struktur, které jsou rozřešeny přímo, od malých, které je nutné modelovat, se provádí pomocí tzv. filtrace soustavy Navierových-Stokesových rovnic. Okamžité hodnoty neznámých veličin se podobně jako v případě časového středování rozloží na přefiltrovanou část $\bar{\Phi}$ a zbytek reprezentující malá měřítka Φ' , tedy

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi'. \quad (3.73)$$

Poznámka 3.3.1. *Dekompozice (3.73) je zde označena stejně jako v případě Reynoldsova středování. Nyní jde ovšem o prostorové filtrování, nikoliv o časové středování a stejné značení zde zachováváme z důvodu formální podobnosti základních rovnic.*

Přefiltrovaná hodnota $\bar{\Phi}$ je definována jako

$$\bar{\Phi}(\vec{x}, t) = \int_D G(\vec{r}, \Delta) \Phi(\vec{x} - \vec{r}, t) d\vec{r} = G * \Phi(\vec{x}, t), \quad (3.74)$$

hvězdička * značí operátor konvoluce a D je daná oblast. Funkce $G(\vec{r}, \Delta)$ se nazývá jádrem konvoluce (neboli filtru) a platí pro ni podmínka

$$\int_D G(\vec{r}, \Delta) d\vec{r} = 1. \quad (3.75)$$

Jestliže pro velká měřítka platí vztah (3.74), pak pro odfiltrovaná malá měřítka můžeme psát

$$\Phi'(\vec{x}, t) = (1 - G(\vec{r}, \Delta)) * \Phi(\vec{x}, t). \quad (3.76)$$

Parametr Δ je šířka filtru, která určuje velikost oblasti malých měřítek, které je nutné modelovat. Mezi nejčastěji používané filtry patří tzv. Box filtr, který je definován jako

$$G(\vec{r}, \Delta) = \begin{cases} 1/\Delta^3 & \text{pro } |\vec{r}| \leq \Delta/2 \\ 0 & \text{pro } |\vec{r}| > \Delta/2. \end{cases} \quad (3.77)$$

Poznámka 3.3.2. *Box filtr se často používá pro numerické řešení metodou konečných objemů, přičemž šířka filtru Δ odpovídá velikosti buňky výpočetní sítě.*

Další standardně používané filtry jsou Gaussův filtr

$$G(\vec{r}, \Delta) = \left(\frac{6}{\pi \Delta^2} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{6|\vec{r}|^2}{\Delta^2} \right) \quad (3.78)$$

a spektrální filtr

$$G(\vec{r}, \Delta) = \prod_{i=1}^3 \frac{\sin(r_i/\Delta)}{r_i}, \quad (3.79)$$

kteří se používají pro numerické řešení spektrálními metodami, které jsou založeny na rychlé Fourierově transformaci (podrobněji např. v [21], [22], nebo [23]).

Na rozdíl od Reynoldsova středování zde neplatí, že $\bar{\bar{\Phi}} = \bar{\Phi}$, neboť

$$\bar{\bar{\Phi}} = G * G * \Phi = G^2 * \Phi \neq G * \Phi = \bar{\Phi} \quad (3.80)$$

a dále neplatí, že $\overline{\Phi'} = 0$, protože

$$\overline{\Phi'} = G * (1 - G) * \Phi \neq 0. \quad (3.81)$$

Podobně jako v případě středování Navierových-Stokesových rovnic pro stlačitelné proudění se pro simulaci velkých vírů zavádí filtrování, které je vážené hustotou, tedy tzv. Favrovo filtrování. To můžeme pro obecnou veličinu Φ definovat jako

$$\tilde{\Phi} = \frac{\overline{\rho\Phi}}{\bar{\rho}} \quad (3.82)$$

a okamžité hodnoty neznámých veličin lze rozložit jako

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \Phi'', \quad (3.83)$$

kde Φ'' značí odfiltrovaná malá měřítko turbulence.

Poznámka 3.3.3. *Dekompozice (3.83) je zde označena stejně jako v případě Favrova středování. Nyní jde ovšem o prostorové filtrování, nikoliv o časové středování a stejné značení zde zachováváme z důvodu formální podobnosti základních rovnic.*

Pokud použijeme dekompozici (3.73) pro okamžité hodnoty hustoty ρ a tlaku p a dekompozici (3.83) pro okamžité hodnoty složek vektoru rychlosti u_j a pro okamžitou celkovou energii E , dostaneme dosazením do soustavy Navierových-Stokesových rovnic⁷ a následným filtrováním soustavu filtrovaných Navierových-Stokesových rovnic:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (3.84)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial \hat{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j - \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \hat{\tau}_{ij}) \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{p})\tilde{u}_j \right] = \frac{\partial(\hat{\tau}_{ij}\tilde{u}_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \hat{q}_j}{\partial x_j} + Z, \quad (3.86)$$

kde člen Z je dán předpisem

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\overline{\rho u_j E} - \bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{E}) + (\overline{u_j p} - \tilde{u}_j\bar{p}) - (\overline{\tau_{ij} u_i} - \hat{\tau}_{ij}\tilde{u}_i) + (\bar{q}_j - \hat{q}_j) \right], \quad (3.87)$$

přefiltrované složky tenzoru vazkých napětí jsou definovány jako

$$\hat{\tau}_{ij} = 2\bar{\mu}\bar{S}_{ij}, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right), \quad \bar{\mu} = \mu_{ref} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right)^{\frac{3}{4}}, \quad (3.88)$$

složky tepelného toku jako

$$\hat{q}_j = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\bar{\mu}}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) \quad (3.89)$$

a tlak pomocí filtrované stavové rovnice (2.5), tzn.

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \left[\bar{\rho}\tilde{E} - \frac{1}{2}\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{u}_j - \frac{1}{2}\bar{\rho}(\tilde{u}_i\tilde{u}_i - \tilde{u}_i\tilde{u}_i) \right]. \quad (3.90)$$

⁷Rovnice (2.1), (2.2) a (2.3).

3.4 Uzavření soustavy filtrovaných Navierových-Stokesových rovnic

Podobně, jako tomu bylo v případě soustavy středovaných Navierových-Stokesových rovnic, je i soustava filtrovaných Navierových-Stokesových rovnic formálně shodná s původní soustavou rovnic až na nové členy, které vznikly aplikací operace filtrování. Tyto nové členy je nutné aproximovat. Druhý člen na pravé straně v hybnostní rovnici (3.85), tedy $-(\overline{\rho u_i u_j} - \tilde{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)$ vyjadřuje vliv turbulentního přenosu hybnosti malých měřítek, které je nutné modelovat a nazývá se subgridní tenzor Reynoldsových napětí. Jeho složky označíme τ_{ij}^{SGS} . Vzhledem k tomu, že malá turbulentní měřítka jsou téměř izotropní, se subgridní tenzor Reynoldsových napětí modeluje pomocí Boussinesqovy hypotézy

$$\tau_{ij}^{SGS} = -(\overline{\rho u_i u_j} - \tilde{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) = 2\mu_{SGS} \overline{S}_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{\rho} k_{SGS}, \quad (3.91)$$

kde μ_{SGS} je subgridní vazkost a k_{SGS} je subgridní kinetická energie. Existují dva základní postupy, jak modelovat členy ve vztahu (3.91):

- **Algebraické modely** - Subgridní vazkost závisí na velikosti rychlosti deformace, šířce filtru a konstantě, která se mění v závislosti na řešeném případě proudění. Subgridní kinetická energie se zanedbává. Tento model se nazývá Smagorinského model. Jeho největší výhodou je jeho jednoduchost. Největší nevýhodou je fakt, že musíme pro různé případy proudění zadávat tzv. Smagorinského konstantu. Tento problém odstraňuje dynamický Smagorinského model, kde je tato konstanta počítána v průběhu vlastního výpočtu (podrobněji viz [17], nebo [19]).
- **Jednorovnicové modely** - Subgridní vazkost v těchto modelech lze vyjádřit ve tvaru součinu rychlostního a délkového měřítka. Rychlostní měřítka zde představuje subgridní kinetická energie k_{SGS} , pro kterou je řešena transportní rovnice. Délkové měřítka pak závisí na šířce filtru Δ . Podrobněji o těchto modelech viz [24].

Poslední člen v rovnici (3.85) vznikl díky nelinearitě vztahu pro turbulentní vazkost (2.8). Jeho vliv je velmi malý (viz [18]), a proto ho lze zanedbat.

Také v zákonu zachování energie vzniknou po filtrování nové členy, se kterými se musíme vypořádat. Všechny tyto členy jsou obsaženy v pomocném vztahu (3.87). Poslední člen v tomto vztahu opět vznikl díky nelinearitě turbulentní vazkosti a můžeme ho zanedbat. Předposlední člen odpovídá subgridní vazké difuzi a je o řád menší než zbylé dva členy (viz [18]), takže je možné ho také zanedbat. První dva členy ve vztahu (3.87) lze přepsat do tvaru

$$(\overline{\rho u_j E} - \tilde{\rho} \tilde{u}_j \tilde{E}) + (\overline{u_j p} - \tilde{u}_j \tilde{p}) = q_j^{SGS} + \mathcal{I}_j, \quad (3.92)$$

kde q_j^{SGS} jsou složky vektoru subgridního tepelného toku, které jsou definovány jako

$$q_j^{SGS} = c_p \tilde{\rho} (\overline{u_j T} - \tilde{u}_j \tilde{T}) \quad (3.93)$$

a \mathcal{I}_j odpovídá subgridní turbulentní difuzi, která je dána vztahem

$$\mathcal{I}_j = \frac{1}{2} (\overline{\rho u_j u_i u_i} - \tilde{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_i \tilde{u}_i). \quad (3.94)$$

Subgridní tepelný tok lze aproximovat za pomoci analogie k Boussinesqově hypotéze (viz [20]) podobně jako v případě středovaných Navierových-Stokesových rovnic v kapitole 3.2.3, tzn.

$$q_j^{SGS} = c_p \tilde{\rho} (\overline{u_j T} - \tilde{u}_j \tilde{T}) \approx -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mu_{SGS}}{Pr_t} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \right), \quad (3.95)$$

Subgridní turbulentní difuzi \mathcal{I}_j lze podle [20] aproximovat jako

$$\mathcal{I}_j = \frac{1}{2} (\overline{\rho u_j u_i u_i} - \tilde{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_i \tilde{u}_i) \approx -\tilde{u}_i \tau_{ij}^{SGS}. \quad (3.96)$$

Poslední nově vzniklý člen se objevuje ve filtrované stavové rovnici (3.90). Ten odpovídá subgridní kinetické energii k_{SGS} , tedy

$$k_{SGS} = \frac{\overline{u_i u_i} - \tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} = -\frac{\tau_{ii}^{SGS}}{2\tilde{\rho}}. \quad (3.97)$$

3.4.1 X-LES model

I když je simulace velkých vírů v porovnání s přímou numerickou simulací méně náročná na výpočetní techniku, nelze ji v současnosti použít pro výpočty s vysokým Reynoldsovým číslem, speciálně pokud se v dané úloze vyskytují okrajové podmínky, které modelují pevnou stěnu. Proto se v nedávné době objevily hybridní metody, které kombinují simulaci velkých vírů se soustavou středovaných Navierových-Stokesových rovnic. Tato kombinace umožňuje přepínání mezi LES modelem v místech, kde je výpočetní síť dostatečně jemná pro přímou reprezentaci velkých turbulentních struktur a RANS modelem v místech, kde to síť neumožňuje, tzn. zejména v blízkosti obtékaných stěn.

V našem případě popíšeme model X-LES, který kombinuje dvourovnicový TNT $k-\omega$ model z kapitoly 3.2.1 v RANS režimu a jednorovnicový model pro subgridní kinetickou energii v LES režimu. Tento model byl vyvinutý Kokem, viz [25]. Výchozí rovnice zahrnují soustavu středovaných Navierových-Stokesových rovnic v RANS režimu, resp. soustavu filtrovaných Navierových-Stokesových rovnic v LES režimu:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^T), \quad (3.99)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}[(\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{p})\tilde{u}_j] = \frac{\partial}{\partial x_j}[(\bar{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^T)\tilde{u}_i] - \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{q}_j + q_j^T), \quad (3.100)$$

kde neznámé veličiny jsou středované v RANS režimu, resp. filtrované v LES režimu.

Poznámka 3.4.1. *Ve výchozích rovnicích (3.98) až (3.100) jsou již provedeny všechny aproximace a zjednodušení, které jsou popsány v kapitolách 3.1 a 3.2, resp. 3.4.*

Tenzor Reynoldsových napětí je aproximován na základě Boussinesqovy hypotézy, tedy

$$\tau_{ij}^T = \begin{cases} 2\mu_t \bar{S}_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\bar{\rho}k & \text{v RANS režimu} \\ 2\mu_{SGS} \bar{S}_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\bar{\rho}k_{SGS} & \text{v LES režimu} \end{cases} \quad (3.101)$$

a vektor turbulentního tepelného toku je definován jako

$$q_j^T = \begin{cases} -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) & \text{v RANS režimu} \\ -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\mu_{SGS}}{Pr_t} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) & \text{v LES režimu.} \end{cases} \quad (3.102)$$

Vztahy (3.101) a (3.102) lze přeformulovat zavedením turbulentní vazkosti pro X-LES model, kterou označíme μ_T a definujeme jí vztahem

$$\mu_T = \bar{\rho}L_t\sqrt{k}, \quad (3.103)$$

kde L_t je turbulentní délkové měřítko, které je v X-LES modelu kombinací RANS délkového měřítko a subgridního délkového měřítko. Toto měřítko definujeme předpisem

$$L_t = \min(\sqrt{k}/\omega, C_1\Delta), \quad (3.104)$$

kde $C_1 = 0.05$ je konstanta modelu a $\Delta = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ je šířka filtru. Kinetická energie k ve vztahu (3.103) je turbulentní kinetická energie v RANS režimu, resp. subgridní kinetická energie v LES režimu. Tenzor Reynoldsových napětí je poté vyjádřen jako

$$\tau_{ij}^T = 2\mu_T \bar{S}_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\bar{\rho}k \quad (3.105)$$

a turbulentní tepelný tok jako

$$q_j^T = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\mu_T}{Pr_t} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right). \quad (3.106)$$

X-LES model je uzavřen pomocí dvourovnicového TNT $k-\omega$ modelu v RANS režimu⁸ a jednorovnicového modelu pro subgridní kinetickou energii v LES režimu. Transportní rovnice pro subgridní kinetickou energii má tvar

$$\frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}k\tilde{u}_j)}{\partial x_j} = \tau_{ij}^T \frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} - \bar{\rho}\epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\bar{\mu} + \sigma^* \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \quad (3.107)$$

⁸Viz kapitola 3.2.1.

kde rychlost disipace ϵ je dána vztahem

$$\epsilon = \beta^* \frac{k^{3/2}}{L_t}. \quad (3.108)$$

Zbylé konstitutivní vztahy jsou následující:

$$\bar{\tau}_{ij} = 2\bar{\mu}\bar{S}_{ij}, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right), \quad \bar{\mu} = \mu_{ref} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right)^{\frac{3}{4}}, \quad (3.109)$$

$$\bar{q}_j = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\bar{\mu}}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right), \quad (3.110)$$

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \left[\bar{\rho} \tilde{E} - \frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_j - \bar{\rho} k \right], \quad (3.111)$$

kde neznámé veličiny v těchto vztazích představují průměrované veličiny v RANS režimu, resp. přefiltrované veličiny v LES režimu.

3.5 Počáteční a okrajové podmínky pro turbulentní veličiny

Pro použití modelů turbulence v konkrétních úlohách je nutné specifikovat počáteční stav a okrajové podmínky pro turbulentní veličiny. V této práci používáme dvourovnicový TNT $k-\omega$ model, EARSM model a hybridní X-LES model. Ve všech výše zmíněných modelech se vyskytují dvě turbulentní veličiny - turbulentní kinetická energie k a specifická rychlost disipace ω .

3.5.1 Počáteční podmínky pro turbulentní veličiny

Počáteční stav turbulentních veličin lze předepsat následujícím způsobem:

$$k(\vec{x}, 0) = k_{pp}(\vec{x}), \quad \omega(\vec{x}, 0) = \omega_{pp}(\vec{x}), \quad (3.112)$$

kde $k_{pp}(\vec{x})$ a $\omega_{pp}(\vec{x})$ jsou dané počáteční hodnoty turbulentních veličin.

3.5.2 Okrajové podmínky pro turbulentní veličiny

V této kapitole uvedeme základní okrajové podmínky, tzn. vstupní a výstupní okrajové podmínky a dále okrajové podmínky pro modelování pevné stěny.

Vstupní okrajové podmínky

Na vstupu do výpočetní oblasti se předepisují Dirichletovy okrajové podmínky, tzn. $k_\infty = konst.$ a $\omega_\infty = konst.$ Hodnota turbulentní kinetické energie k_∞ se obvykle určuje ze zadané intenzity turbulence Tu pomocí vztahu

$$k_\infty = \frac{3}{2} Tu^2 |\vec{u}_\infty|^2. \quad (3.113)$$

Hodnotu specifické rychlosti disipace ω_∞ lze určit např. ze zadaného poměru turbulentní a molekulární vaskzosti

$$\frac{(\mu_t)_\infty}{(\bar{\mu})_\infty} = konst. \Rightarrow \omega_\infty. \quad (3.114)$$

Výstupní okrajové podmínky

Na výstupu z výpočetní oblasti se pro turbulentní kinetickou energii a specifickou rychlost disipace předepisují Neumannovy okrajové podmínky

$$\frac{\partial k}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (3.115)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \vec{n}} = 0. \quad (3.116)$$

Okrajové podmínky pro pevnou stěnu

V této práci budeme uvažovat pouze adiabatickou stěnu pro kterou platí, že turbulentní kinetická energie na stěně je nulová, tedy $k_w = 0$. Okrajovou podmínku pro specifickou rychlost disipace lze získat řešením transportní rovnice (3.29), která se v blízkosti stěny zjednoduší na (viz [11])

$$\bar{\mu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \beta \bar{\rho} \omega^2 = 0. \quad (3.117)$$

Řešením rovnice (3.117) je

$$\omega = \frac{6\bar{\mu}}{\bar{\rho}\beta y^2}, \quad (3.118)$$

přičemž okrajová podmínka na stěně, která z tohoto řešení vychází, má tvar

$$\omega_w = C_\omega \frac{6\bar{\mu}}{\bar{\rho}\beta(\Delta y_{1/2})^2}, \quad (3.119)$$

kde $\Delta y_{1/2}$ je vzdálenost středu první buňky výpočetní sítě od stěny a C_ω je konstanta, kterou v případě dvourovnicového $k - \omega$ modelu volíme podle Mentera jako $C_\omega = 10$. V případě EARSM modelu ji volíme podle Hellstena jako $C_\omega = 1.5$, viz [16].

Kromě výše popsaného postupu lze okrajovou podmínku pro specifickou rychlost disipace volit v závislosti na drsnosti stěny, viz [9], nebo [12].

Kapitola 4

Numerické metody pro řešení proudění stlačitelné tekutiny

Matematické modely, které popisují proudění stlačitelných tekutin, jsou tvořeny soustavou nelineárních parciálních diferenciálních rovnic¹. Současný matematický aparát nám takové rovnice neumožňuje řešit v uzavřeném tvaru, a proto se jejich řešení provádí výhradně numericky. V současnosti se používají tři základní numerické metody diskretizace výchozích rovnic:

- **Metoda konečných diferencí (FDM)**. Nejstarší metodou je metoda konečných diferencí, která je také známá jako metoda sítí. Výpočetní oblast je rozdělena pomocí síťových čar, v jejichž průsečících se nachází uzly sítě. V těchto uzlech jsou řešeny diskretizované výchozí rovnice². Diskretizace se provádí pomocí náhrady derivací diferencemi. Podrobněji o této metodě viz [1], [3], [8], nebo [29].
- **Metoda konečných objemů (FVM)**. Nejpoužívanější metoda pro numerické řešení základních rovnic mechaniky tekutin je metoda konečných objemů. Tato metoda diskretizuje výchozí rovnice v integrálním tvaru, který je pro řešení přirozenější, neboť umožňuje vznik a šíření nespojitostí³. Výpočetní oblast je v této metodě rozdělena na jednotlivé buňky, které mohou mít různý tvar a řešení výchozích rovnic je definováno v těžištích (v případě prostorové úlohy), resp. středech (v případě rovinné úlohy) těchto buněk. Dále se budeme zabývat pouze touto metodou.
- **Metoda konečných prvků (FEM)**. Pro úplnost ještě uvedeme nejmladší metodu, kterou je metoda konečných prvků. V mechanice tekutin se používá zejména její speciální varianta, která se nazývá nespojitá Galerkinova metoda. Tuto metodu lze chápat jako zobecnění výše zmíněné metody konečných objemů. Podrobný popis této metody lze nalézt v [10].

4.1 Metoda konečných objemů pro soustavu Eulerových rovnic

Výchozí soustavu rovnic lze zapsat ve vektorovém tvaru

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F_1(W)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(W)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(W)}{\partial z} = 0, \quad (4.1)$$

kde vektor neznámých konzervativních proměnných $W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T$ a F_i , $i = 1, 2, 3$, jsou nevazkové toky, které jsou definovány jako

$$F_1(W) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho E + p)u \end{bmatrix}, \quad F_2(W) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vw \\ (\rho E + p)v \end{bmatrix}, \quad F_3(W) = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + p \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (\rho E + p)w \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

¹A dále konstitutivními vztahy, které jsou často rovněž nelineární.

²Soustava Navierových-Stokesových rovnic, nebo soustava Eulerových rovnic.

³Např. rázových vln.

Soustava rovnic (4.1) je uzavřena stavovou rovnicí ideálního plynu

$$p = (\gamma - 1) \left[\rho E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right]. \quad (4.3)$$

Nyní rozdělíme výpočetní oblast D na jednotlivé buňky D_i ⁴ přičemž platí, že buňky jsou navzájem disjunktní a sjednocení pokrývá celou výpočetní oblast, tzn. $\cup D_i = D$. Integrujme nyní soustavu rovnic (4.1) přes obecnou buňku sítě D_i

$$\iiint_{D_i} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) dx dy dz + \iiint_{D_i} \left[\frac{\partial F_1(W)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(W)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(W)}{\partial z} \right] dx dy dz = 0. \quad (4.4)$$

Pokud u prvního intergrálu v rovnici (4.4) zaměníme pořadí derivace a integrování a na druhý intergrál aplikujeme Gaussovu-Ostrogradského větu, dostaneme

$$\frac{d}{dt} \iiint_{D_i} W dx dy dz + \iint_{\partial D_i} [F_1(W)n_x + F_2(W)n_y + F_3(W)n_z] dS = 0, \quad (4.5)$$

kde n_x , n_y a n_z jsou složky vnější jednotkové normály. Nyní označíme

$$|D_i| = \iiint_{D_i} dx dy dz \quad (4.6)$$

a dále

$$\widehat{F}(W, \vec{n}) = F_1(W)n_x + F_2(W)n_y + F_3(W)n_z = \begin{bmatrix} \rho q \\ \rho u q + p n_x \\ \rho v q + p n_y \\ \rho w q + p n_z \\ (\rho E + p) q \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

kde $q = un_x + vn_y + wn_z$ je normálová rychlost. Na první intergrál v rovnici (4.5) aplikujeme větu o střední hodnotě a po úpravě s použitím vztahů (4.6) a (4.7) dostaneme

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = -\frac{1}{|D_i|} \iint_{\partial D_i} \widehat{F}(W, \vec{n}) dS. \quad (4.8)$$

Pokud v rovnici (4.8) nahradíme plošný integrál přes uzavřenou plochu sumací přes všechny stěny buňky D_i , dostaneme obecný semidiskrétní tvar metody konečných objemů pro soustavu Eulerových rovnic

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = -\frac{1}{|D_i|} \sum_{k=1}^6 \widehat{F}_k(W, \vec{n}) \Delta S_k, \quad (4.9)$$

kde ΔS_k je obsah příslušných stěn, které tvoří hranici buňky D_i . Z uvedeného postupu je zřejmé, že neznámé konzervativní proměnné $W_i(t)$ chápeme jako střední hodnoty v jednotlivých buňkách D_i .

4.1.1 Schéma HLLC

Ve vztahu (4.9) se objevuje člen $\widehat{F}_k(W, \vec{n})$, který představuje nevazký tok k-tou stěnou hranice buňky D_i . Pro jeho výpočet existuje celá řada numerických schémat. V našem případě použijeme schéma HLLC, které bylo vyvinuto na základě zjednodušeného řešení Riemannova problému⁵ pro soustavu Eulerových rovnic. Podrobné odvození schématu HLLC lze nalézt v [30].

Nevazký tok stěnou, která představuje rozhraní mezi dvěma sousedícími buňkami, závisí na stavu konzervativních veličin vlevo (index L), resp. vpravo (index R) od tohoto rozhraní. Nevazký tok je pomocí schématu HLLC aproximován jako

$$\widehat{F}_k(W, \vec{n}) \approx \widehat{F}_k^{HLLC}(W_L, W_R, \vec{n}) = \begin{cases} F(W_L) & \text{pro } S_L > 0 \\ F(W_L^*) & \text{pro } S_L \leq 0 < S_M \\ F(W_R^*) & \text{pro } S_M \leq 0 \leq S_R \\ F(W_R) & \text{pro } S_R < 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

⁴V našem případě budeme pracovat pouze se strukturovanou sítí složenou z hexahedrálních buněk.

⁵Podrobněji o Riemannově problému viz [27], nebo [28].

kde

$$F(W_L) = \begin{bmatrix} \rho_L q_L \\ \rho_L u_L q_L + p_L n_x \\ \rho_L v_L q_L + p_L n_y \\ \rho_L w_L q_L + p_L n_z \\ (e_L + p_L) q_L \end{bmatrix}, \quad F(W_R) = \begin{bmatrix} \rho_R q_R \\ \rho_R u_R q_R + p_R n_x \\ \rho_R v_R q_R + p_R n_y \\ \rho_R w_R q_R + p_R n_z \\ (e_R + p_R) q_R \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$F(W_L^*) = \begin{bmatrix} \rho_L^* S_M \\ (\rho u)_L^* S_M + p^* n_x \\ (\rho v)_L^* S_M + p^* n_y \\ (\rho w)_L^* S_M + p^* n_z \\ (e_L^* + p^*) S_M \end{bmatrix}, \quad F(W_R^*) = \begin{bmatrix} \rho_R^* S_M \\ (\rho u)_R^* S_M + p^* n_x \\ (\rho v)_R^* S_M + p^* n_y \\ (\rho w)_R^* S_M + p^* n_z \\ (e_R^* + p^*) S_M \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$W_L^* = \begin{bmatrix} \rho_L^* \\ (\rho u)_L^* \\ (\rho v)_L^* \\ (\rho w)_L^* \\ e_L^* \end{bmatrix} = \frac{1}{S_L - S_M} \begin{bmatrix} \rho_L (S_L - q_L) \\ (S_L - q_L)(\rho u)_L + (p^* - p_L) n_x \\ (S_L - q_L)(\rho v)_L + (p^* - p_L) n_y \\ (S_L - q_L)(\rho w)_L + (p^* - p_L) n_z \\ (S_L - q_L) e_L - p_L q_L + p^* S_M \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

$$W_R^* = \begin{bmatrix} \rho_R^* \\ (\rho u)_R^* \\ (\rho v)_R^* \\ (\rho w)_R^* \\ e_R^* \end{bmatrix} = \frac{1}{S_R - S_M} \begin{bmatrix} \rho_R (S_R - q_R) \\ (S_R - q_R)(\rho u)_R + (p^* - p_R) n_x \\ (S_R - q_R)(\rho v)_R + (p^* - p_R) n_y \\ (S_R - q_R)(\rho w)_R + (p^* - p_R) n_z \\ (S_R - q_R) e_R - p_R q_R + p^* S_M \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$$p^* = \rho_L (q_L - S_L)(q_L - S_M) + p_L = \rho_R (q_R - S_R)(q_R - S_M) + p_R, \quad (4.15)$$

kde $e = \rho E$. Vlnovou rychlost S_M vypočteme podle Battena (viz [31])

$$S_M = \frac{\rho_R q_R (S_R - q_R) - \rho_L q_L (S_L - q_L) + p_L - p_R}{\rho_R (S_R - q_R) - \rho_L (S_L - q_L)} \quad (4.16)$$

a vlnové rychlosti S_L a S_R jsou podle [30] definovány následovně:

$$S_L = \min [\lambda_1(W_L), \lambda_1(W^{Roe})] \quad (4.17)$$

$$S_R = \max [\lambda_m(W_R), \lambda_m(W^{Roe})], \quad (4.18)$$

kde $\lambda_1(W_L)$ a $\lambda_m(W_R)$ je nejmenší, resp. největší vlastní číslo jakobiánu $\partial \hat{F} / \partial W$, tedy

$$\lambda_1(W_L) = q_L - c_L, \quad (4.19)$$

$$\lambda_m(W_R) = q_R + c_R \quad (4.20)$$

a $\lambda_1(W^{Roe})$ a $\lambda_m(W^{Roe})$ je nejmenší, resp. největší vlastní číslo Roeho matice (viz [27]). Tato vlastní čísla jsou definována jako

$$\lambda_1(W^{Roe}) = \bar{q} - \bar{c}, \quad (4.21)$$

$$\lambda_m(W^{Roe}) = \bar{q} + \bar{c}, \quad (4.22)$$

kde

$$\bar{q} = \bar{u} n_x + \bar{v} n_y + \bar{w} n_z, \quad (4.23)$$

$$\bar{u} = \frac{u_L + u_R R_\rho}{1 + R_\rho}, \quad \bar{v} = \frac{v_L + v_R R_\rho}{1 + R_\rho}, \quad \bar{w} = \frac{w_L + w_R R_\rho}{1 + R_\rho}, \quad (4.24)$$

$$\bar{c}^2 = (\gamma - 1) \left[\bar{H} - \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) \right], \quad (4.25)$$

$$\bar{H} = \frac{H_L + H_R R_\rho}{1 + R_\rho} \quad (4.26)$$

a

$$R_\rho = \sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_L}}, \quad (4.27)$$

kde $H = (e + p)/\rho$ je entalpie. Schéma HLLC je prvního řádu přesnosti. Je vhodné pro aproximaci nevazkého toku v případě řešení soustavy Eulerových rovnic, ale i pro případ soustavy Navierových-Stokesových rovnic, neboť dokáže správně zachytit rázové vlny, kontaktní nespojitost i smykové vlny (viz [9], nebo [44]) a navíc zachovává pozitivitu hustoty i tlaku v případě kladných počátečních podmínek.

4.1.2 Eulerova metoda časové integrace

Díky aproximaci nevazkého toku pomocí schématu HLLC z předchozí kapitoly (4.1.1) můžeme přepsat semidiskrétní metodu konečných objemů pro soustavu Eulerových rovnic do tvaru

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = -\frac{1}{|D_i|} \sum_{k=1}^6 \widehat{F}_k^{HLLC}(W_L, W_R, \vec{n}) \Delta S_k = \text{Rez}(W)_i. \quad (4.28)$$

To je soustava obyčejných diferenciálních rovnic pro každou buňku výpočetní sítě D_i . Opět existuje velké množství numerických metod, pomocí kterých lze soustavu (4.28) vyřešit. Nejjednodušší z nich je dopředná Eulerova metoda, pomocí které se časová derivace aproximuje dopřednou diferencí

$$\frac{dW_i(t)}{dt} \approx \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t}, \quad (4.29)$$

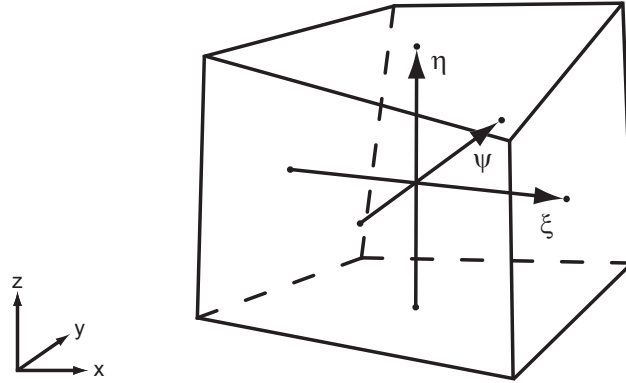
kde Δt je velikost časového kroku. Pomocí aproximace (4.29) dostaneme plně diskretní explicitní metodu konečných objemů

$$W_i^{n+1} = W_i^n + \Delta t \text{Rez}(W)_i^n. \quad (4.30)$$

Tato metoda je prvního řádu přesnosti. Eulerova metoda je podmíněně stabilní. To znamená, že časový krok je omezený tzv. podmínkou stability

$$\Delta t \leq \min \left(\frac{CFL}{\frac{|u|+c}{\Delta x} + \frac{|v|+c}{\Delta y} + \frac{|w|+c}{\Delta z}} \right), \quad (4.31)$$

kde minimum je bráno přes všechny buňky sítě. CFL je Courantovo-Friedrichsovo-Lewyho číslo, které lze pro Eulerovu metodu volit v intervalu $(0, 1)$. Podmínka (4.31) byla odvozena, resp. platí pouze pro kartézskou síť. V našem případě budeme používat obecnější strukturované křivočaré sítě. Proto musíme podmínku stability pro tyto typy sítí upravit.



Obrázek 4.1: Obecná buňka výpočetní sítě.

Zavedeme pomocné vektory ξ , ψ a η , které charakterizují velikost buňky ve směru souřadnice x , resp. y , resp. z , viz obrázek 4.1. Potom můžeme podmínku stability (4.31) přepsat do tvaru

$$\Delta t \leq \min \left(\frac{CFL}{\frac{|u^\xi|+c}{\Delta \xi} + \frac{|u^\psi|+c}{\Delta \psi} + \frac{|u^\eta|+c}{\Delta \eta}} \right), \quad (4.32)$$

kde

$$u^\xi = \vec{u} \cdot \frac{\vec{\xi}}{\|\xi\|}, \quad u^\psi = \vec{u} \cdot \frac{\vec{\psi}}{\|\psi\|}, \quad u^\eta = \vec{u} \cdot \frac{\vec{\eta}}{\|\eta\|} \quad (4.33)$$

a

$$\Delta\xi = \|\vec{\xi}\|, \quad \Delta\psi = \|\vec{\psi}\|, \quad \Delta\eta = \|\vec{\eta}\|. \quad (4.34)$$

4.2 Metoda konečných objemů pro soustavu Navierových-Stokesových rovnic

Výchozí soustavu rovnic lze opět zapsat ve vektorovém tvaru pro neznámé konzervativní proměnné $W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T$, tedy

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F_1(W)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(W)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(W)}{\partial z} = \frac{\partial R_1(W, \nabla W)}{\partial x} + \frac{\partial R_2(W, \nabla W)}{\partial y} + \frac{\partial R_3(W, \nabla W)}{\partial z}, \quad (4.35)$$

kde F_i , $i = 1, 2, 3$, jsou nevazké toky, které jsou definovány pomocí vztahů (4.2) a R_i , $i = 1, 2, 3$, jsou vazké toky, které lze vyjádřit jako

$$R_1(W, \nabla W) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x \end{bmatrix}, \quad R_2(W, \nabla W) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y \end{bmatrix},$$

$$R_3(W, \nabla W) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

kde jednotlivé složky tenzoru vazkých napětí jsou

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{yy} &= \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{zz} &= \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right), & \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

a složky vektoru tepelného toku jsou

$$q_x = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad q_y = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad q_z = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad (4.38)$$

příčměž dynamická vazkost μ je dána vztahem (2.9) a celou soustavu rovnic uzavírá stavová rovnice ideálního plynu (4.3).

Stejným postupem jako v kapitole 4.1 dostaneme semidiskrétní tvar metody konečných objemů pro soustavu Navierových-Stokesových rovnic

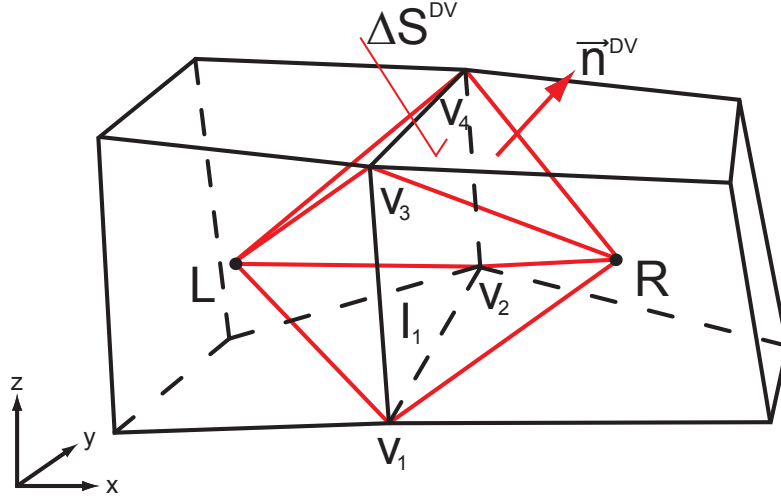
$$\frac{dW_i(t)}{dt} = \frac{1}{|D_i|} \sum_{k=1}^6 [\widehat{R}_k(W, \nabla W, \vec{n}) - \widehat{F}_k(W, \vec{n})] \Delta S_k, \quad (4.39)$$

kde

$$\widehat{R}(W, \nabla W, \vec{n}) = R_1(W, \nabla W)n_x + R_2(W, \nabla W)n_y + R_3(W, \nabla W)n_z. \quad (4.40)$$

Nevazký tok $\widehat{F}_k(W, \vec{n})$ lze aproximovat pomocí schématu HLLC z kapitoly 4.1.1. Ze vztahů (4.37) a (4.38) je zřejmé, že vazký tok $\widehat{R}(W, \nabla W, \vec{n})$ závisí jak na řešení W , tak i na první derivaci tohoto

řešení. Proto nejprve musíme vhodným způsobem tyto derivace aproximovat. V našem případě k tomuto účelu použijeme duální síť, resp. duální geometrii, viz obrázek 4.2.



Obrázek 4.2: Duální buňka (červená) vytvořená na rozhraní dvou primárních buněk výpočetní sítě.

Předpokládejme, že chceme určit parciální derivaci obecné proměnné Φ podle x na rozhraní I_1 , viz obrázek 4.2. Integrujme derivaci Φ přes duální buňku, kterou označíme D_1^{DV} . Pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty dostaneme

$$\iiint_{D_1^{DV}} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial D_1^{DV}} \Phi n_x dS. \quad (4.41)$$

Označme objem duální buňky

$$|D_1^{DV}| = \iiint_{D_1^{DV}} dx dy dz. \quad (4.42)$$

S použitím věty o střední hodnotě můžeme vztah (4.41) upravit do podoby

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{I_1} = \frac{1}{|D_1^{DV}|} \iint_{\partial D_1^{DV}} \Phi n_x^{DV} dS^{DV}. \quad (4.43)$$

Ve vztahu (4.43) dále nahradíme plošný integrál přes uzavřenou plochu sumací a dostaneme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{I_1} = \frac{1}{|D_1^{DV}|} \sum_{k=1}^8 \bar{\Phi}_k [(n_x^{DV})_k (\Delta S^{DV})_k], \quad (4.44)$$

kde jednotlivé $\bar{\Phi}_k$ jsou dány jako

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1 &= \frac{1}{3}(\Phi_{v1} + \Phi_{v2} + \Phi_R) & \bar{\Phi}_5 &= \frac{1}{3}(\Phi_{v1} + \Phi_{v2} + \Phi_L) \\ \bar{\Phi}_2 &= \frac{1}{3}(\Phi_{v2} + \Phi_{v3} + \Phi_R) & \bar{\Phi}_6 &= \frac{1}{3}(\Phi_{v2} + \Phi_{v3} + \Phi_L) \\ \bar{\Phi}_3 &= \frac{1}{3}(\Phi_{v3} + \Phi_{v4} + \Phi_R) & \bar{\Phi}_7 &= \frac{1}{3}(\Phi_{v3} + \Phi_{v4} + \Phi_L) \\ \bar{\Phi}_4 &= \frac{1}{3}(\Phi_{v1} + \Phi_{v3} + \Phi_R) & \bar{\Phi}_8 &= \frac{1}{3}(\Phi_{v1} + \Phi_{v3} + \Phi_L). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Neznámé Φ_{v1} , Φ_{v2} , Φ_{v3} a Φ_{v4} , které jsou definovány ve vrcholech primární buňky, získáme jako algebraické průměry z hodnot, které jsou definovány v primárních buňkách. Tyto průměry bereme přes všechny primární buňky, které se daného vrcholu dotýkají, tzn.

$$\Phi_{v1} = \frac{1}{8} \sum_{l=1}^8 \Phi_l, \quad \Phi_{v2} = \frac{1}{8} \sum_{m=1}^8 \Phi_m, \quad \Phi_{v3} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^8 \Phi_n, \quad \Phi_{v4} = \frac{1}{8} \sum_{o=1}^8 \Phi_o. \quad (4.46)$$

Parciální derivace podle y a z dostaneme pomocí vztahů

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{I_1} = \frac{1}{|D_1^{DV}|} \sum_{k=1}^8 \bar{\Phi}_k [(n_y^{DV})_k (\Delta S^{DV})_k], \quad (4.47)$$

resp.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{I_1} = \frac{1}{|D_1^{DV}|} \sum_{k=1}^8 \bar{\Phi}_k [(n_z^{DV})_k (\Delta S^{DV})_k]. \quad (4.48)$$

Výpočet parciálních derivací na ostatních rozhraních je analogický.

Hodnoty ostatních neznámých veličin na jednotlivých rozhraních jsou vyčísleny pomocí centrální metody, tzn. pomocí algebraického průměru hodnot vlevo, resp. vpravo od daného rozhraní, tedy

$$\Phi|_{I_k} = \frac{1}{2} (\Phi_L + \Phi_R). \quad (4.49)$$

Vazký tok $\widehat{R}_k(W, \nabla W, \vec{n})$ je nakonec aproximován jako

$$\widehat{R}_k(W, \nabla W, \vec{n}) \approx \widehat{R}_k^{CS}(W_L, W_R, \nabla W, \vec{n}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx}|_{I_k} n_x + \tau_{xy}|_{I_k} n_y + \tau_{xz}|_{I_k} n_z \\ \tau_{xy}|_{I_k} n_x + \tau_{yy}|_{I_k} n_y + \tau_{yz}|_{I_k} n_z \\ \tau_{xz}|_{I_k} n_x + \tau_{yz}|_{I_k} n_y + \tau_{zz}|_{I_k} n_z \\ R_5 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

a poslední složka R_5 je dána vztahem

$$\begin{aligned} R_5 = & (u|_{I_k} \tau_{xx}|_{I_k} + v|_{I_k} \tau_{xy}|_{I_k} + w|_{I_k} \tau_{xz}|_{I_k} - q_x|_{I_k}) n_x \\ & + (u|_{I_k} \tau_{xy}|_{I_k} + v|_{I_k} \tau_{yy}|_{I_k} + w|_{I_k} \tau_{yz}|_{I_k} - q_y|_{I_k}) n_y \\ & + (u|_{I_k} \tau_{xz}|_{I_k} + v|_{I_k} \tau_{yz}|_{I_k} + w|_{I_k} \tau_{zz}|_{I_k} - q_z|_{I_k}) n_z, \end{aligned} \quad (4.51)$$

kde např. člen $u|_{I_k} \tau_{xx}|_{I_k}$ je

$$u|_{I_k} \tau_{xx}|_{I_k} = \frac{1}{2} (u_L + u_R) \frac{1}{2} (\mu_L + \mu_R) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{I_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{I_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{I_k} \right). \quad (4.52)$$

Na závěr poznamenejme, že centrální aproximace (4.50) je druhého řádu přesnosti.

Poznámka 4.2.1. *Soustava středovaných, nebo filtrovaných Navierových-Stokesových rovnic se liší přidavným tenzorem Reynoldsových/subgridních napětí a přidavným turbulentním/subgridním tepelným tokem ve vazkých tocích. Jejich diskretizace je analogická jako v případě složek tenzoru vazkých napětí, resp. složek vektoru tepelného toku.*

4.2.1 Časová integrace, podmínka stability

Semidiskrétní tvar metody konečných objemů pro soustavu Navierových-Stokesových rovnic, kde je použito schéma HLLC (4.10) pro nevazké toky a centrální schéma (4.50) pro vazké toky má tvar

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = \frac{1}{|D_i|} \sum_{k=1}^6 [\widehat{R}_k^{CS}(W_L, W_R, \nabla W, \vec{n}) - \widehat{F}_k^{HLLC}(W_L, W_R, \vec{n})] \Delta S_k = \text{Rez}^{NS}(W)_i. \quad (4.53)$$

Nejjednodušší metodou časové integrace je opět Eulerova metoda (4.29). Pomocí této metody dostaneme

$$W_i^{n+1} = W_i^n + \Delta t \operatorname{Rez}^{NS}(W)_i^n. \quad (4.54)$$

Již z kapitoly 4.1.2 víme, že Eulerova metoda je prvního řádu přesnosti a podmíněně stabilní. Obecnější tvar podmínky stability⁶ pro případ řešení soustavy Navierových-Stokesových rovnic je

$$\Delta t \leq \min \left[\frac{CFL}{\frac{|u^\xi|+c}{\Delta\xi} + \frac{|u^\psi|+c}{\Delta\psi} + \frac{|u^\eta|+c}{\Delta\eta} + 2\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{1}{\Delta\xi^2} + \frac{1}{\Delta\psi^2} + \frac{1}{\Delta\eta^2} \right)} \right], \quad (4.55)$$

kde u^ξ , u^ψ , u^η jsou dány vztahy (4.33) a $\Delta\xi$, $\Delta\psi$ a $\Delta\eta$ vztahy (4.34). Minimum je zde opět bráno přes všechny primární buňky sítě a CFL lze volit v intervalu (0, 1).

4.3 Numerické metody vyššího řádu přesnosti

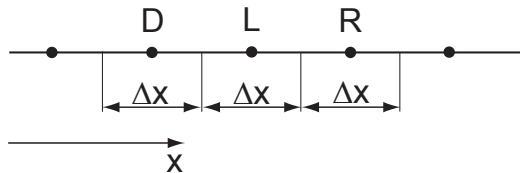
Do této chvíle jsme uvažovali pouze numerické metody prvního řádu⁷. Metody prvního řádu jsou velmi robustní, ale jejich nevýhodou je silná numerická vazkost, která je srovnatelná s fyzikální vazkostí a navíc "rozmazává" rázové vlny a vyhlazuje řešení. Pro získání kvalitních výsledků je nutná velmi jemná výpočetní síť, ideálně s dynamickou adaptací, viz [10]. Jinou možností je použití metod vyššího řádu přesnosti. V současné době existuje velké množství metod, které lze rozdělit do dvou skupin:

- **Klasické metody** - Zástupci těchto metod jsou např. Laxovo-Wendroffovo schéma, nebo MacCormackovo schéma. Tyto metody jsou druhého řádu v prostoru i v čase, ale pro nelineární úlohy, popř. pro úlohy s nespojitou počáteční podmínkou jsou nestabilní, viz [4]. Proto se k nim přidává tzv. umělá vazkost, která tyto schémata stabilizuje. Nevýhodou umělé vazkosti je závislost na empirických konstantách, které je nutné nastavit pro každou úlohu. Podrobněji o klasických metodách viz [1].
- **Moderní metody** - Tyto metody realizují většinou protiproudou diskretizaci nevazkého toku, přičemž základní schéma je prvního řádu přesnosti. Mezi nejznámější schémata patří AUSM (viz [32], nebo [33]) a HLLC. Pro zvýšení řádu v prostoru se používá rekonstrukce neznámých veličin, pro kterou je opět dostupných mnoho metod. Pro zvýšení řádu v čase lze použít např. metody Runge-Kutty, viz [34].

V této kapitole popíšeme dva druhy rekonstrukcí, které budeme používat pro zvýšení řádu přesnosti schématu HLLC a dále Runge-Kuttovy metody časové integrace.

4.3.1 MUSCL rekonstrukce

MUSCL rekonstrukce (viz [4], nebo [6]) je jedna z nejpoužívanějších metod pro zvýšení řádu přesnosti moderních schémat. Nejprve uvedeme zjednodušenou jednorozměrnou variantu pro výpočetní síť s konstantním krokem Δx (viz obrázek 4.3), ze které vycházíme i v případě prostorového proudění.



Obrázek 4.3: Část výpočetní sítě pro jednorozměrný případ.

⁶Pro obecné strukturované křivočaré sítě.

⁷To platí pro aproximaci nevazkého toku schématem HLLC a Eulerovu metodu časové integrace.

Rekonstrukci provedeme pro primitivní proměnné, které uspořádáme do vektoru $U = (\rho, u, p)^T$. Základní rekonstrukce spočívá v nahrazení po částech konstantních hodnot v jednotlivých buňkách po částech lineárními průběhy

$$U_i \rightarrow \tilde{U}_i = U_i + (x - x_i)\sigma_i^x, \quad (4.56)$$

kde σ_i^x aproximuje první derivaci U . Lineární rekonstrukcí dostaneme schéma druhého řádu. Použitím vztahu (4.56) dostaneme rekonstruované primitivní proměnné na rozhraní mezi buňkami D_L a D_R ve tvaru

$$\tilde{U}_L = U_L + \frac{\Delta x}{2}\sigma_L^x, \quad (4.57)$$

$$\tilde{U}_R = U_R - \frac{\Delta x}{2}\sigma_R^x. \quad (4.58)$$

Aproximace prvních derivací $\sigma_{L/R}^x$ můžeme vyjádřit pomocí zpětných diferencí⁸

$$\sigma_L^x = \frac{U_L - U_D}{\Delta x}, \quad \sigma_R^x = \frac{U_R - U_L}{\Delta x} \quad (4.59)$$

a dále dosadit do (4.57), resp. (4.58). Nakonec dostaneme

$$\tilde{U}_L = U_L + \frac{1}{2}\overleftarrow{\Delta}_L, \quad (4.60)$$

$$\tilde{U}_R = U_R - \frac{1}{2}\overleftarrow{\Delta}_R, \quad (4.61)$$

kde jsme označily

$$\overleftarrow{\Delta}_L = U_L - U_D, \quad (4.62)$$

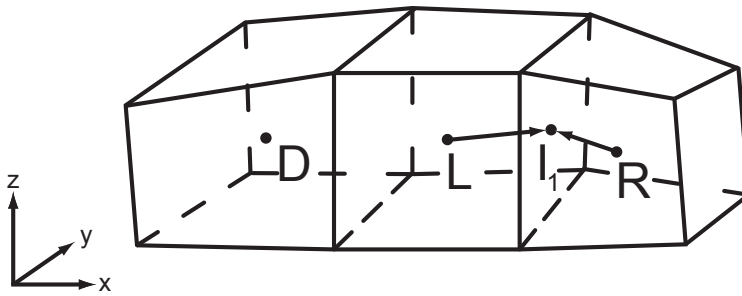
$$\overleftarrow{\Delta}_R = U_R - U_L. \quad (4.63)$$

Z rekonstruovaných primitivních proměnných $\tilde{U}_{L/R}$ lze snadno dostat konzervativní proměnné $\tilde{W}_{L/R}$, které ve schématu HLLC nahradí původní proměnné $W_{L/R}$

$$\hat{F}_{1,\text{řad}}^{HLLC}(W_L, W_R, \vec{n}) \rightarrow \hat{F}_{2,\text{řad}}^{HLLC}(\tilde{W}_L, \tilde{W}_R, \vec{n}). \quad (4.64)$$

Tím získáme schéma druhého řádu v prostoru.

Uvažujme nyní případ obecné trojrozměrné strukturované sítě, viz obrázek 4.4.



Obrázek 4.4: Část výpočetní sítě pro trojrozměrný případ.

Pro případ prostorového proudění použijeme výše popsanou jednorozměrnou rekonstrukci ve všech směrech, přičemž ji zobecníme do standardní podoby MUSCL metody (viz [37]). Označme

$$\overrightarrow{\Delta}_L = U_R - U_L, \quad (4.65)$$

$$\overleftarrow{\Delta}_L = U_L - U_D, \quad (4.66)$$

⁸Tím dostaneme protiproudé schéma druhého řádu.

kde $U = (\rho, u, v, w, p)^T$. Potom rekonstrukci pomocí MUSCL metody na rozhraní I_1 lze zapsat jako

$$\tilde{U}_L = U_L + \frac{1}{2}\sigma_L^x, \quad (4.67)$$

$$\tilde{U}_R = U_R - \frac{1}{2}\sigma_R^x, \quad (4.68)$$

kde $\sigma_{L/R}^x$ aproximující první derivaci v x-ovém směru je dána jako

$$\sigma_L^x = \frac{1}{2} \left[(1 - \vartheta) \overleftarrow{\Delta}_L + (1 + \vartheta) \overrightarrow{\Delta}_L \right], \quad (4.69)$$

$$\sigma_R^x = \frac{1}{2} \left[(1 - \vartheta) \overleftarrow{\Delta}_R + (1 + \vartheta) \overrightarrow{\Delta}_R \right]. \quad (4.70)$$

Parametr ϑ , který se objevuje ve vztazích (4.69), resp. (4.70), rozhoduje o typu schématu, které z MUSCL rekonstrukce vznikne a lze ho volit podle následující tabulky.

Schémata vzniklá MUSCL rekonstrukcí.		
ϑ	schéma	řád
-1	Upwind	2.
0	Frommovo	2.
1/3	Upwind	3.
1/2	QUICK	2.
1	Centrální	2.

Tabulka 4.1: Schémata vzniklá z MUSCL rekonstrukce v závislosti na parametru ϑ .

Poznámka 4.3.1. Vztahy (4.67), (4.68), (4.69) a (4.70) nezahrnují vliv geometrie sítě, která již není rozdělena s konstantním krokem Δx , resp. Δy , resp. Δz . Toto zjednodušení jsme převzali z jednorozměrného případu a numerické experimenty ukazují, že nemá velký vliv na kvalitu numerického řešení.

Poznámka 4.3.2. V tabulce 4.1 se objevuje pro hodnotu parametru $\vartheta = 1/3$ protiproudé schéma třetího řádu. Třetí řád lze ale získat pouze na kartézské síti s konstantní velikostí buněk. Pro obecnou strukturovanou síť je toto schéma formálně pouze druhého řádu.

Schéma HLLC s MUSCL rekonstrukcí je numericky nestabilní, případně silně osciluje v blízkosti nespojitostí. Proto se zavádí tzv. limiter, který v blízkosti nespojitostí přepíná řád metody z druhého na první. Silná numerická vazkost metody prvního řádu v okolí nespojitostí pomáhá stabilizovat numerické řešení. Limiter lze do MUSCL rekonstrukce implementovat jednoduchou úpravou vztahů (4.69) a (4.70) do tvaru

$$\sigma_L^x = \frac{1}{2} \left[(1 - \vartheta) v(o_L) \overleftarrow{\Delta}_L + (1 + \vartheta) v\left(\frac{1}{o_L}\right) \overrightarrow{\Delta}_L \right], \quad (4.71)$$

$$\sigma_R^x = \frac{1}{2} \left[(1 - \vartheta) v(o_R) \overleftarrow{\Delta}_R + (1 + \vartheta) v\left(\frac{1}{o_R}\right) \overrightarrow{\Delta}_R \right], \quad (4.72)$$

kde $o = \overrightarrow{\Delta}/\overleftarrow{\Delta}$ a funkce $v(o)$ je limiter. Některé limity, které lze použít v kombinaci s MUSCL rekonstrukcí jsou:

- Minmod limiter

$$v(o) = \max[0, \min(1, o)]. \quad (4.73)$$

- Osherův limiter

$$v(o) = \max[0, \min(C_\beta, o)], \quad (4.74)$$

kde parametr C_β lze volit v intervalu $(1, 2)$.

- van Albadův limiter

$$v(o) = \frac{o + o^2}{1 + o^2}. \quad (4.75)$$

- van Leerův limiter

$$v(o) = \frac{o + |o|}{1 + |o|}. \quad (4.76)$$

- Korenův limiter, který je vhodný pro protiproudé schéma třetího řádu

$$v(o) = \max \left[0, \min \left(2o, \frac{1 + 2o}{3}, 2 \right) \right]. \quad (4.77)$$

- Superbee limiter

$$v(o) = \max [0, \min(2o, 1), \min(o, 2)]. \quad (4.78)$$

- MC limiter

$$v(o) = \max \left[0, \min \left(2o, \frac{1 + o}{2}, 2 \right) \right]. \quad (4.79)$$

- Ospre limiter

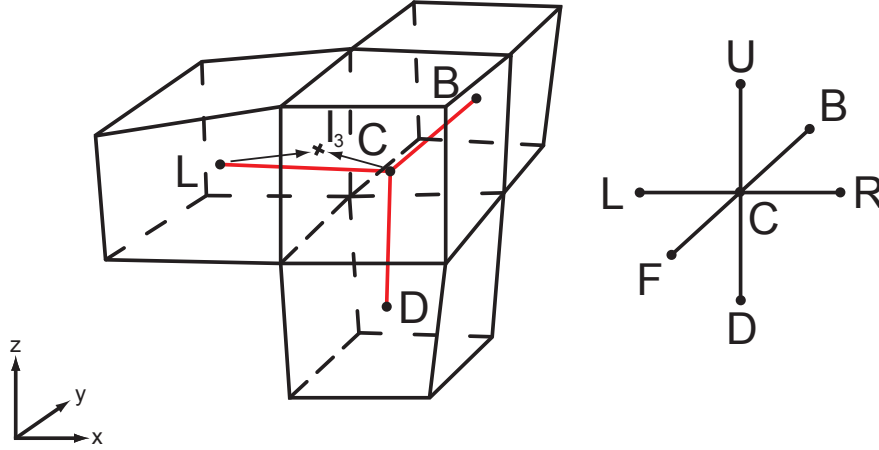
$$v(o) = \frac{1.5(o^2 + o)}{o^2 + o + 1}. \quad (4.80)$$

Numerická metoda s MUSCL rekonstrukcí a limiterem má v jednorozměrném případě TVD vlastnost⁹ a je stabilní v TV normě (viz [34]). Ve vícerozměrném případě se TVD vlastnost nepodařilo dokázat, ale numerické experimenty ukazují, že si tato metoda zachovává příznivé vlastnosti TVD metod. Rekonstrukce primitivních proměnných na ostatních rozhraních je analogická. Nakonec lze z primitivních proměnných $\tilde{U}_{L/R}$ stejně jako v jednorozměrném případě dostat konzervativní proměnné $\tilde{W}_{L/R}$, které ve schématu HLLC nahradí původní proměnné $W_{L/R}$, viz (4.64).

4.3.2 WENO rekonstrukce

Dalším typem rekonstrukce, která bude použita v této práci je WENO rekonstrukce, viz [38]. Na rozdíl od MUSCL metody, která je popsána v předchozí kapitole, je WENO rekonstrukce vícerozměrná a nesnižuje řád v okolí nespojitostí. V této práci se omezíme pouze na po částech lineární rekonstrukci, která vede na schéma druhého řádu v prostoru, ačkoliv lze tuto metodu rozšířit i pro vyšší řády přesnosti, viz [38]. Sada buněk, která se použije k výpočtu predikce gradientů řešení zahrnuje buňku, ve které chceme gradient určit a dále všechny její sousedy. Rekonstrukci zde opět provedeme pro primitivní proměnné $U = (\rho, u, v, w, p)^T$. Pro šestistěnnou buňku existuje osm možností, jak spočítat predikci gradientu řešení, tedy z buněk s těžišti *FRDC*, *RBDC*, *BLDC*, *LFDC*, *FRUC*, *RBUC*, *BLUC* a *LFUC*, viz obrázek 4.5.

⁹Tzn. nerostoucí totální variaci v čase, viz např. [28].



Obrázek 4.5: Část výpočetní sítě pro znázornění WENO rekonstrukce.

Nyní sestavme rovnice pro případ $BLDC$:

$$\begin{aligned}
 U_L - U_C &= \text{grad}_x^1 U_C (\overrightarrow{CL})_x + \text{grad}_y^1 U_C (\overrightarrow{CL})_y + \text{grad}_z^1 U_C (\overrightarrow{CL})_z, \\
 U_B - U_C &= \text{grad}_x^1 U_C (\overrightarrow{CB})_x + \text{grad}_y^1 U_C (\overrightarrow{CB})_y + \text{grad}_z^1 U_C (\overrightarrow{CB})_z, \\
 U_D - U_C &= \text{grad}_x^1 U_C (\overrightarrow{CD})_x + \text{grad}_y^1 U_C (\overrightarrow{CD})_y + \text{grad}_z^1 U_C (\overrightarrow{CD})_z.
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

Ze soustavy rovnic (4.81) lze získat¹⁰ řešení $\text{grad}^1 U_C = (\text{grad}_x^1 U_C, \text{grad}_y^1 U_C, \text{grad}_z^1 U_C)$. Tím jsme získaly jednu z možností jak spočítat predikci gradientu v buňce D_C . Pro ostatní možnosti lze sestavit obdobné soustavy rovnic, jejichž řešením obdržíme gradienty $\text{grad}^k U_C = (\text{grad}_x^k U_C, \text{grad}_y^k U_C, \text{grad}_z^k U_C)$, kde $k = 2, \dots, 8$.

WENO rekonstrukce je vylepšením původní ENO metody, jejíž princip spočívá ve výběru gradientu s nejmenší totální variací, aby se co nejvíce potlačil vznik a šíření nefyzikálních oscilací v řešení, viz [38]. Vylepšení spočívá v uvažování všech predikcí gradientu, přičemž výsledný gradient je určen jako vážený průměr všech možností. Váhy jsou navrženy tak, aby byla jejich hodnota velká v místech, kde je řešení hladké a naopak, aby se jejich hodnota blížila k nule v okolí nespojitostí. Součet všech vah pak musí být roven jedné. Podle Friedrichse (viz [38]) lze váhy určit pomocí tzv. oscilačního indikátoru, který je obecně definován jako

$$OI = \left(\sum_{1 \leq |\alpha| \leq n} \iiint_{D_i} L_D^{2|\alpha|-4} [D^\alpha P(x, y, z)]^2 dx dy dz \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.82}$$

kde $P(x, y, z)$ je polynom stupně n , který aproximuje řešení U . V našem případě po částech lineární rekonstrukce (polynom prvního stupně) se oscilační indikátor zjednoduší do tvaru

$$OI_k \approx \left(L_D^{-2} [(\text{grad}_x^k U_C)^2 + (\text{grad}_y^k U_C)^2 + (\text{grad}_z^k U_C)^2] |D_i| \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.83}$$

kde L_D je charakteristický rozměr buňky, který lze určit jako

$$L_D = \sqrt[3]{\frac{D}{K}}, \tag{4.84}$$

kde K je počet buněk sítě. Váhy jsou pak dány vztahem

$$w_k = \frac{OI_k^{-2}}{\sum_{l=1}^8 OI_l^{-2}} \tag{4.85}$$

¹⁰Libovolnou metodou pro řešení soustavy lineárních rovnic.

a výsledné složky gradientu vztahy

$$\text{grad}_x U_C = \sum_{k=1}^8 w_k \text{grad}_x^k U_C, \quad \text{grad}_y U_C = \sum_{k=1}^8 w_k \text{grad}_y^k U_C, \quad \text{grad}_z U_C = \sum_{k=1}^8 w_k \text{grad}_z^k U_C. \quad (4.86)$$

Rekonstrukci primitivních proměnných na rozhraní I_3 , viz obrázek 4.5, sestavíme jako

$$\tilde{U}_C = U_C + (\overrightarrow{CI_3})_x \text{grad}_x U_C + (\overrightarrow{CI_3})_y \text{grad}_y U_C + (\overrightarrow{CI_3})_z \text{grad}_z U_C, \quad (4.87)$$

$$\tilde{U}_L = U_L + (\overrightarrow{LI_3})_x \text{grad}_x U_L + (\overrightarrow{LI_3})_y \text{grad}_y U_L + (\overrightarrow{LI_3})_z \text{grad}_z U_L. \quad (4.88)$$

Rekonstrukce na ostatních rozhraních je analogická. Podobně, jako v případě MUSCL rekonstrukce, lze snadno z rekonstruovaných proměnných $\tilde{U}_{L/C}$ získat konzervativní proměnné $\tilde{W}_{L/C}$, které ve schématu HLLC nahradí původní proměnné $W_{L/C}$.

4.3.3 TVD Runge-Kuttovy metody

Základní metodou pro časovou diskretizaci je Eulerova metoda, která již byla popsána v kapitolách 4.1.2, resp. 4.2.1. V nestacionárních případech proudění je použití schémat vyššího řádu nutností, neboť Eulerova metoda by snížila celkový řád metody. Ve stacionárním případě lze Eulerovu metodu použít, ale i zde jsou žádoucí schémata vyššího řádu, protože numerické experimenty ukazují, že metody vyššího řádu konvergují rychleji ke stacionárnímu řešení.

V našem případě používáme pro časovou diskretizaci explicitní TVD Runge-Kuttovy metody, u kterých je zaručeno, že totální variace bude v čase nerostoucí a v řešení nebudou vznikat nežádoucí nefyzikální oscilace. Tyto metody jsou popsány např. v [34], nebo v [35].

Uvažujme metodu konečných objemů v semidiskrétním tvaru, kde reziduum na pravé straně vzniklo diskretizací nevazkých, případně i vazkých¹¹ toků

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = \text{Rez}(W)_i. \quad (4.89)$$

Dvukroková TVD Runge-Kuttova metoda

Pro časovou diskretizaci použijeme dvukrokovou TVD Runge-Kuttovu metodu

$$\begin{aligned} W_i^{n+\frac{1}{2}} &= W_i^n + \Delta t \text{Rez}(W)_i^n \\ W_i^{n+1} &= \frac{1}{2} W_i^n + \frac{1}{2} W_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \Delta t \text{Rez}(W)_i^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Tato metoda je druhého řádu v čase.

Tříkroková TVD Runge-Kuttova metoda

Tříkroková TVD Runge-Kuttova metoda má tvar

$$\begin{aligned} W_i^{n+\frac{1}{3}} &= W_i^n + \Delta t \text{Rez}(W)_i^n \\ W_i^{n+\frac{2}{3}} &= \frac{3}{4} W_i^n + \frac{1}{4} W_i^{n+\frac{1}{3}} + \frac{1}{4} \Delta t \text{Rez}(W)_i^{n+\frac{1}{3}} \\ W_i^{n+1} &= \frac{1}{3} W_i^n + \frac{2}{3} W_i^{n+\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \Delta t \text{Rez}(W)_i^{n+\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Tato metoda je třetího řádu v čase.

Pro obě metody platí podmínka stability (4.32) v případě řešení soustavy Eulerových rovnic, resp. podmínka (4.55) pro případ řešení soustavy Navierových-Stokesových rovnic. CFL číslo lze pro obě metody volit v intervalu (0, 1).

Ve stacionárních případech proudění lze urychlit konvergenci ke stacionárnímu řešení použitím lokálního časového kroku, kde místo minima ve vztahu (4.32), resp. (4.55) počítáme časový krok pro každou buňku zvlášť. Použití lokálního časového kroku redukuje dobu potřebnou k dosažení stacionárního řešení přibližně o polovinu.

¹¹V případě, kdy řešíme soustavu Navierových-Stokesových rovnic.

4.4 Metoda konečných objemů pro rovnice modelu turbulence

V této kapitole se budeme zabývat metodou konečných objemů pro transportní rovnice TNT $k - \omega$ modelu, viz kapitola 3.2.1. Modelové rovnice zapíšeme opět ve vektorovém tvaru

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F_1(W)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(W)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(W)}{\partial z} = \frac{\partial R_1(W, \nabla W)}{\partial x} + \frac{\partial R_2(W, \nabla W)}{\partial y} + \frac{\partial R_3(W, \nabla W)}{\partial z} + Q(W, \nabla W), \quad (4.92)$$

kde

$$W = \begin{bmatrix} \bar{\rho}k \\ \bar{\rho}\omega \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} \bar{\rho}k\tilde{u} \\ \bar{\rho}\omega\tilde{u} \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} \bar{\rho}k\tilde{v} \\ \bar{\rho}\omega\tilde{v} \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} \bar{\rho}k\tilde{w} \\ \bar{\rho}\omega\tilde{w} \end{bmatrix}, \quad (4.93)$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} (\bar{\mu} + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x} \\ (\bar{\mu} + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} (\bar{\mu} + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial y} \\ (\bar{\mu} + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} (\bar{\mu} + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial z} \\ (\bar{\mu} + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

a

$$Q = \begin{bmatrix} P - \beta^* \bar{\rho}k\omega \\ \alpha \frac{\omega}{k} P - \beta \bar{\rho}\omega^2 + C_d \end{bmatrix}, \quad (4.95)$$

kde P je produkční člen daný vztahem (3.24), vazkost $\bar{\mu}$ je dána posledním vztahem v (3.14), turbulentní vazkost μ_t závisí na volbě modelu turbulence a C_d představuje příčnou difuzi

$$C_d = \sigma_d \frac{\bar{\rho}}{\omega} \max \left(\frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z}, 0 \right). \quad (4.96)$$

Semidiskrétní schéma metody konečných objemů dostaneme integrací rovnice (4.92) přes obecnou buňku sítě D_i a následnou aplikací věty o střední hodnotě, resp. Gaussovy-Ostrogradského věty, přičemž integrál přes uzavřenou plochu nahradíme sumací

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = \frac{1}{|D_i|} \sum_{k=1}^6 [\hat{R}_k(W, \nabla W, \vec{n}) - \hat{F}_k(W, \vec{n})] \Delta S_k + Q_i(W, \nabla W), \quad (4.97)$$

kde

$$\hat{F}_k(W, \vec{n}) = F_1 n_x + F_2 n_y + F_3 n_z = \begin{bmatrix} \bar{\rho}k\tilde{q} \\ \bar{\rho}\omega\tilde{q} \end{bmatrix}, \quad (4.98)$$

$$\tilde{q} = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y + \tilde{w}n_z \quad (4.99)$$

a

$$\hat{R}_k(W, \nabla W, \vec{n}) = R_1 n_x + R_2 n_y + R_3 n_z. \quad (4.100)$$

Aproximace nevazkých toků je v našem případě realizována schématem HLLC (viz kapitola 4.1.1)

$$\hat{F}_k(W, \vec{n}) \approx \hat{F}_k^{HLLC}(W_L, W_R, \vec{n}) = \begin{cases} F(W_L) & \text{pro } S_L > 0 \\ F(W_L^*) & \text{pro } S_L \leq 0 < S_M \\ F(W_R^*) & \text{pro } S_M \leq 0 \leq S_R \\ F(W_R) & \text{pro } S_R < 0, \end{cases} \quad (4.101)$$

kde

$$F(W_L) = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_L k_L \tilde{q}_L \\ \bar{\rho}_L \omega_L \tilde{q}_L \end{bmatrix}, \quad F(W_R) = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_R k_R \tilde{q}_R \\ \bar{\rho}_R \omega_R \tilde{q}_R \end{bmatrix}, \quad (4.102)$$

$$F(W_L^*) = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_L^* k_L S_M \\ \bar{\rho}_L^* \omega_L S_M \end{bmatrix}, \quad F(W_R^*) = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_R^* k_R S_M \\ \bar{\rho}_R^* \omega_R S_M \end{bmatrix}, \quad (4.103)$$

$$\bar{\rho}_L^* = \bar{\rho}_L \frac{\bar{\rho}_L - \tilde{q}_L}{S_L - S_M}, \quad \bar{\rho}_R^* = \bar{\rho}_R \frac{\bar{\rho}_R - \tilde{q}_R}{S_R - S_M} \quad (4.104)$$

a vlnové rychlosti S_M , S_L , S_R jsou vyčísleny pomocí vztahů (4.16), resp. (4.17), resp. (4.18) pro středované veličiny. Pro vyšší řád v prostoru lze použít rekonstrukce MUSCL (kapitola 4.3.1), či

WENO (kapitola 4.3.2) pro primitivní proměnné k a ω .

Aproximace vazkých toků je provedena pomocí centrálního schématu popsaného v kapitole 4.2, tzn.

$$\begin{aligned} \widehat{R}_k(W, \nabla W, \vec{n}) &\approx \widehat{R}_k^{CS}(W_L, W_R, \nabla W, \vec{n}) = \\ &= \begin{bmatrix} (\bar{\mu}|_{I_k} + \sigma^* \mu_t|_{I_k}) \frac{\partial k}{\partial x} \Big|_{I_k} n_x + (\bar{\mu}|_{I_k} + \sigma^* \mu_t|_{I_k}) \frac{\partial k}{\partial y} \Big|_{I_k} n_y + (\bar{\mu}|_{I_k} + \sigma^* \mu_t|_{I_k}) \frac{\partial k}{\partial z} \Big|_{I_k} n_z \\ (\bar{\mu}|_{I_k} + \sigma^* \mu_t|_{I_k}) \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{I_k} n_x + (\bar{\mu}|_{I_k} + \sigma^* \mu_t|_{I_k}) \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{I_k} n_y + (\bar{\mu}|_{I_k} + \sigma^* \mu_t|_{I_k}) \frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{I_k} n_z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Zdrojové členy, které jsou obsaženy ve vektoru Q se vyčíslují přímo z hodnot v primárních buňkách D_i . Jediným problémem je závislost zdrojových členů na prvních derivacích řešení, které je tedy nutné určit. K výpočtu derivací v primárních buňkách D_i použijeme Gaussovu-Ostrogradského větu podobně jako v kapitole 4.2.

Určeme nyní parciální derivaci obecné veličiny Φ podle x . Pomocí výše zmíněné věty dostaneme

$$\iiint_{D_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial D_i} \Phi n_x dS. \quad (4.106)$$

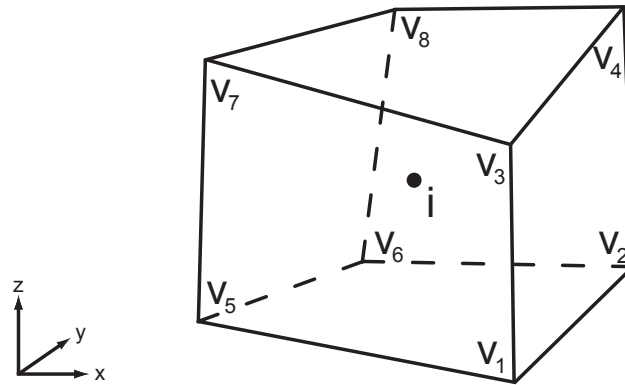
S využitím věty o střední hodnotě a nahrazením plošného integrálu přes uzavřenou plochu sumací obdržíme vztah

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \frac{1}{|D_i|} \sum_{k=1}^6 \bar{\Phi}_k [(n_x)_k \Delta S_k], \quad (4.107)$$

kde jednotlivé $\bar{\Phi}_k$ jsou dány jako

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1 &= \frac{1}{4}(\Phi_{v1} + \Phi_{v2} + \Phi_{v3} + \Phi_{v4}), \\ \bar{\Phi}_2 &= \frac{1}{4}(\Phi_{v2} + \Phi_{v6} + \Phi_{v4} + \Phi_{v8}), \\ \bar{\Phi}_3 &= \frac{1}{4}(\Phi_{v5} + \Phi_{v6} + \Phi_{v7} + \Phi_{v8}), \\ \bar{\Phi}_4 &= \frac{1}{4}(\Phi_{v1} + \Phi_{v5} + \Phi_{v3} + \Phi_{v7}), \\ \bar{\Phi}_5 &= \frac{1}{4}(\Phi_{v1} + \Phi_{v2} + \Phi_{v5} + \Phi_{v6}), \\ \bar{\Phi}_6 &= \frac{1}{4}(\Phi_{v3} + \Phi_{v4} + \Phi_{v7} + \Phi_{v8}), \end{aligned} \quad (4.108)$$

viz obrázek 4.6.



Obrázek 4.6: Primární výpočetní buňka.

Neznámé hodnoty ve vrcholech primární buňky D_i jsou určeny jako algebraické průměry hodnot ze všech okolních buněk D_j , které se daného vrcholu dotýkají, tzn.

$$\Phi_{v_l} = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 \Phi_j, \quad l = 1, \dots, 8. \quad (4.109)$$

Parciální derivace podle y a z dostaneme pomocí vztahů

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = \frac{1}{|D_i|} \sum_{k=1}^6 \bar{\Phi}_k [(n_y)_k \Delta S_k], \quad (4.110)$$

resp.

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = \frac{1}{|D_i|} \sum_{k=1}^6 \bar{\Phi}_k [(n_z)_k \Delta S_k]. \quad (4.111)$$

Pro časovou diskretizaci vztahu (4.97) lze použít některou z TVD Runge-Kuttových metod, viz kapitola 4.3.3. Transportní rovnice modelu turbulence jsou ovšem obtížně řešitelné, neboť jsou díky zdrojovým členům velmi citlivé na počáteční podmínky a malé poruchy, které vedou k nestabilitě a následné divergenci. Tento problém lze odstranit volbou menšího časového kroku, nebo implicitní diskretizací zdrojových členů. Implicitní metody jsou v lineárních případech nepodmíněně stabilní a v nelineárních případech dovolují výpočty s mnohem větším časovým krokem, než explicitní metody, viz [36]. V našem případě použijeme metodu, která vychází z bodové implicitní metody pro zdrojové členy a je odvozena v [9], nebo v [45].

Uvažujme semidiskrétní tvar metody konečných objemů (4.97), který přepíšeme do podoby

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = \text{Rez}(W)_i = \text{Rez}^{NV}(W)_i + Q_i(W), \quad (4.112)$$

kde $\text{Rez}^{NV}(W)_i$ obsahuje diskretizované nevazké a vazké toky. Nechť \bar{W}_i je řešením soustavy rovnic

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = \text{Rez}^{NV}(W)_i, \quad (4.113)$$

keré je získané libovolnou explicitní metodou. Potom poslední krok časové integrace má tvar

$$W_i^{n+1} = \bar{W}_i + \frac{\Delta t}{1 - \Delta t \min(A, 0)} Q_i(\bar{W}), \quad (4.114)$$

kde A je definován jako

$$A = \begin{cases} -\beta^* \omega & \text{pro 1. rovnici} \\ -2\beta\omega - C_d/\rho\omega & \text{pro 2. rovnici.} \end{cases} \quad (4.115)$$

Výše popsaná metoda je prvního řádu přesnosti a může být použita pouze pro stacionární případy proudění. V nestacionárních režimech lze použít jednu z explicitních TVD Runge-Kuttových metod. V této práci je soustava středovaných Navierových-Stokesových rovnic řešena společně s transportními rovnicemi modelu turbulence. Podmínka stability pro tento případ má tvar

$$\Delta t \leq \min \left[\frac{CFL}{\frac{|u^\xi|+c}{\Delta\xi} + \frac{|u^\psi|+c}{\Delta\psi} + \frac{|u^\eta|+c}{\Delta\eta} + 2\frac{\mu+\mu_t}{\rho} \left(\frac{1}{\Delta\xi^2} + \frac{1}{\Delta\psi^2} + \frac{1}{\Delta\eta^2} \right)} \right], \quad (4.116)$$

kde u^ξ , u^ψ , u^η jsou dány vztahy (4.33) a $\Delta\xi$, $\Delta\psi$ a $\Delta\eta$ vztahy (4.34). Minimum je zde opět bráno přes všechny primární buňky sítě a CFL lze volit v intervalu (0, 1).

Poznámka 4.4.1. V této kapitole byla popsána metoda konečných objemů pro transportní rovnice TNT modelu, přičemž jsme předpokládali, že uzavírá středovanou soustavu Navierových-Stokesových rovnic. Výše popsaný postup lze ale použít i pro X-LES model.

4.5 Numerická realizace okrajových podmínek

V této práci je použita metoda, jejíž princip spočívá v přidání fiktivní řady buněk (tzv. ghost cells) za hranici výpočetní oblasti. Okrajové podmínky jsou vyčísleny v těchto fiktivních buňkách a nevazké a vazké toky hranic výpočetní oblasti jsou poté počítány numerickým schématem bez jakékoliv modifikace.

4.5.1 Okrajové podmínky na vstupu

Podle kapitoly 2.4 bychom v případě prostorového subsonického¹² proudění měli na vstupu zadat čtyři veličiny. V této práci nejčastěji zadáváme stagnační hustotu ρ_0 , stagnační tlak p_0 , úhel náběhu proudu α_∞ a úhel odklonu proudu φ_∞ . Dále extrapolujeme tlak ze vnitřku výpočetní oblasti, tzn. předepisujeme

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \approx \frac{p_g - p_1}{\Delta s} = 0 \rightarrow p_g = p_1, \quad (4.117)$$

kde p_g označuje tlak ve fiktivní buňce před vstupní hranicí, p_1 označuje tlak z první buňky výpočetní oblasti za vstupní hranicí a Δs je vzdálenost mezi těžišti první a fiktivní buňky. Pomocí daných stagnačních veličin a extrapolovaného tlaku lze pomocí izoentropických vztahů (viz [7]) spočítat hustotu ve fiktivní buňce

$$\frac{p_g}{p_0} = \left(\frac{\rho_g}{\rho_0} \right)^\gamma \rightarrow \rho_g \quad (4.118)$$

a dále Machovo číslo ve fiktivní buňce

$$p_0 = p_g \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_g^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \rightarrow M_g. \quad (4.119)$$

Pomocí hustoty a tlaku lze ve fiktivní buňce vyjádřit rychlost zvuku

$$c_g = \sqrt{\frac{\gamma p_g}{\rho_g}} \quad (4.120)$$

a s pomocí Machova čísla velikost rychlosti

$$|\vec{u}_g| = M_g c_g. \quad (4.121)$$

Pomocí velikosti rychlosti a zadaných úhlů můžeme vyjádřit jednotlivé složky vektoru rychlosti jako

$$u_g = |\vec{u}_g| \cos \alpha_\infty \cos \varphi_\infty, \quad (4.122)$$

$$v_g = |\vec{u}_g| \sin \alpha_\infty, \quad (4.123)$$

$$w_g = |\vec{u}_g| \cos \alpha_\infty \sin \varphi_\infty \quad (4.124)$$

a nakonec dopočítat celkovou energii

$$E_g = \frac{p_g}{\rho_g(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} |\vec{u}_g|^2. \quad (4.125)$$

V případě turbulentního proudění je na vstupu předepsána hodnota turbulentní kinetické energie k_∞ a specifické rychlosti disipace ω_∞ , takže můžeme položit $k_g = k_\infty$ a $\omega_g = \omega_\infty$, přičemž turbulentní kinetickou energii je nutné přičíst k celkové energii, tzn. na pravou stranu vztahu (4.125).

4.5.2 Okrajové podmínky na výstupu

Podle kapitoly 2.4 bychom v případě prostorového subsonického proudění měli na výstupu zadat jednu veličinu a v případě supersonického proudění bychom neměli zadat žádnou veličinu. V této práci zadáváme na výstupu v případě subsonického proudu tlak p_2 . Hodnota tlaku ve fiktivní buňce za výstupní hranicí tedy bude $p_g = p_2$. Ostatní veličiny, tedy hustota a složky vektoru rychlosti, případně turbulentní kinetická energie a specifická rychlost disipace, jsou extrapolovány z vnitřku výpočetní oblasti. Celková energie je potom dopočtena pomocí vztahu¹³ (4.125) pro veličiny ve fiktivní buňce za výstupní hranicí.

V případě supersonického výstupního proudu se extrapolují do fiktivní buňky za výstupní hranicí všechny veličiny.

¹²V této práci budeme řešit pouze subsonické a transsonické režimy proudění, ve kterých je normálová složka rychlosti nabíhajícího proudu podzvuková.

¹³Případně doplněného o turbulentní kinetickou energii.

4.5.3 Okrajové podmínky na pevné stěně

V tomto případě musíme rozlišit, zda se jedná o nevazké, nebo vazké proudění. V nevazkém proudění platí, že normálová složka vektoru rychlosti musí být nulová. To odpovídá podmínce symetrie, kterou v našem případě realizujeme metodou zrcadlení, tzn. veličiny ve fiktivní bunce za stěnou dostaneme jako zrcadlové obrazy veličin v první bunce u stěny (označené indexem 1) ve směru normály, tedy

$$\rho_g = \rho_1, \quad (4.126)$$

$$u_g = u_1 - 2(u_1 n_x + v_1 n_y + w_1 n_z)n_x, \quad (4.127)$$

$$v_g = v_1 - 2(u_1 n_x + v_1 n_y + w_1 n_z)n_y, \quad (4.128)$$

$$w_g = w_1 - 2(u_1 n_x + v_1 n_y + w_1 n_z)n_z, \quad (4.129)$$

$$p_g = p_1. \quad (4.130)$$

Celkovou energii lze snadno dopočítat ze vztahu (4.125).

Pro vazké proudění uvažujeme adiabatickou stěnu, pro kterou platí, že složky vektoru rychlosti na stěně jsou nulové. Veličiny ve fiktivní bunce dostaneme jako

$$\rho_g = \rho_1, \quad (4.131)$$

$$u_g = -u_1, \quad (4.132)$$

$$v_g = -v_1, \quad (4.133)$$

$$w_g = -w_1, \quad (4.134)$$

$$p_g = p_1, \quad (4.135)$$

kde index 1 opět značí první buňku u stěny ve směru normály. Pro turbulentní kinetickou energii platí, že je na stěně nulová, takže podobně jako pro složky vektoru rychlosti dostaneme

$$k_g = -k_1. \quad (4.136)$$

Hodnota specifické rychlosti disipace na stěně ω_w je zadána. Hodnotu ve fiktivní bunce za stěnou dostaneme jako

$$\omega_g = 2\omega_w - \omega_1. \quad (4.137)$$

Celkovou energii opět dopočítáme pomocí vztahu (4.125), který v případě turbulentního proudění doplníme o turbulentní kinetickou energii.

Kapitola 5

Numerické řešení prostorového nevazkého proudění

V této kapitole budou řešeny některé případy prostorového proudění nevazké tekutiny, které je modelováno pomocí soustavy Eulerových rovnic.

5.1 Transsonické proudění testovacím kanálem

Prvním řešeným případem je transsonické proudění GAMM kanálem, přičemž uvažujeme tři různé geometrie. Tyto případy slouží k otestování numerických schémat pro aproximaci nevazkých toků. První případ je v podstatě rozšíření dvourozměrné konfigurace (viz [9]) do 3D.

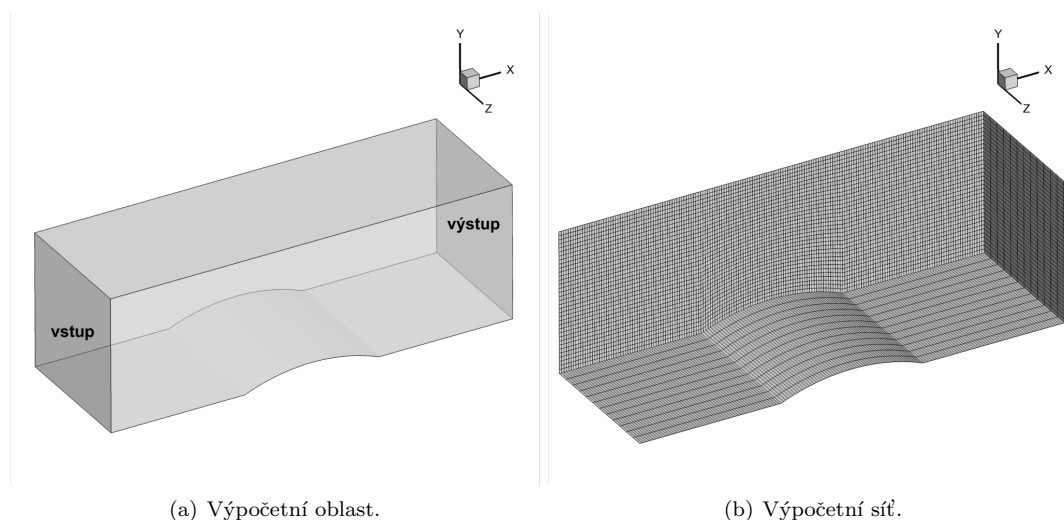
Ve druhém případě má profil uprostřed kanálu proměnnou výšku od 0.16 pro $z = 0$ až do 0.1 pro $z = 1$.

Ve třetím případě je profil šikmý, viz obrázek 5.11.

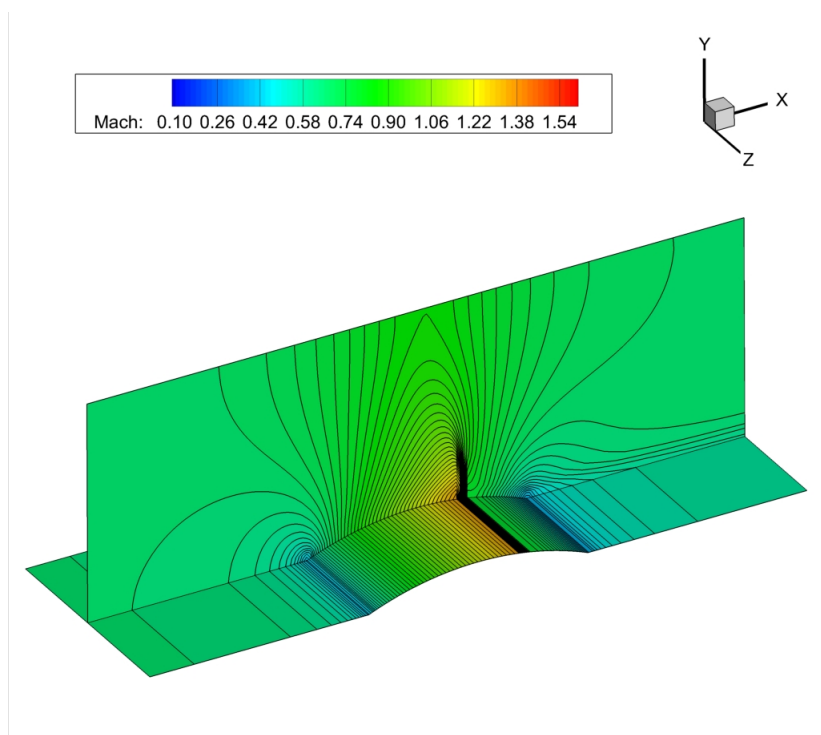
Ve všech třech případech je proudění charakterizováno poměrem výstupního a stagnačního tlaku $p_2/p_0 = 0.737$ a nulovým úhlem náběhu, resp. odklonu proudu, tzn. $\alpha_\infty = 0^\circ$, resp. $\varphi_\infty = 0^\circ$. Stagnační hustota je volena $\rho_0 = 1$ a stagnační tlak $p_0 = 1$.

Ve všech třech případech je použita strukturovaná H-síť, která se skládá z $180 \times 35 \times 12$ hexahedrálních buněk.

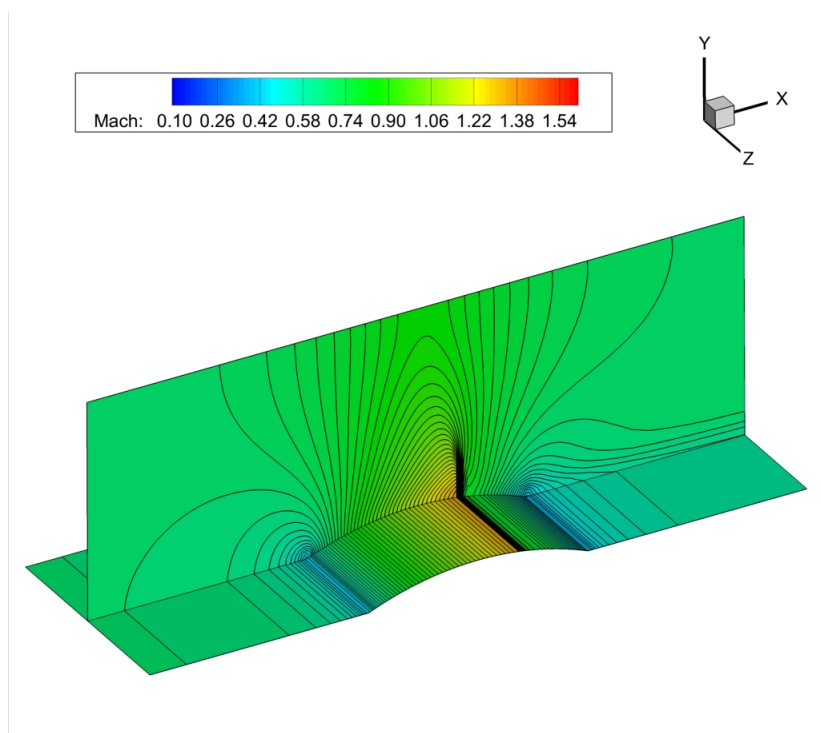
5.1.1 Proudění GAMM kanálem rozšířeným z 2D konfigurace



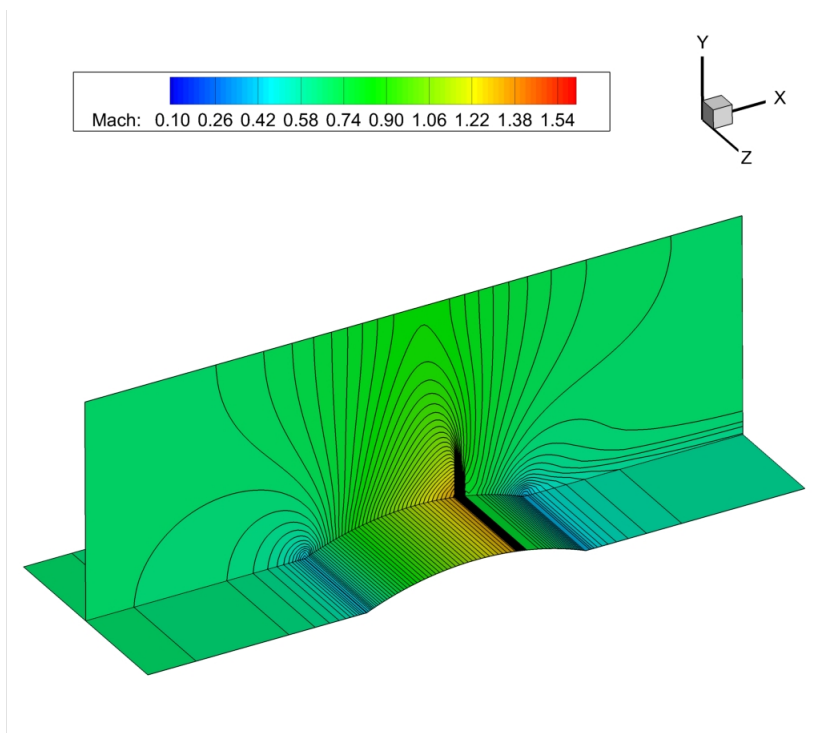
Obrázek 5.1: Rozšířený GAMM kanál pro prostorové proudění.



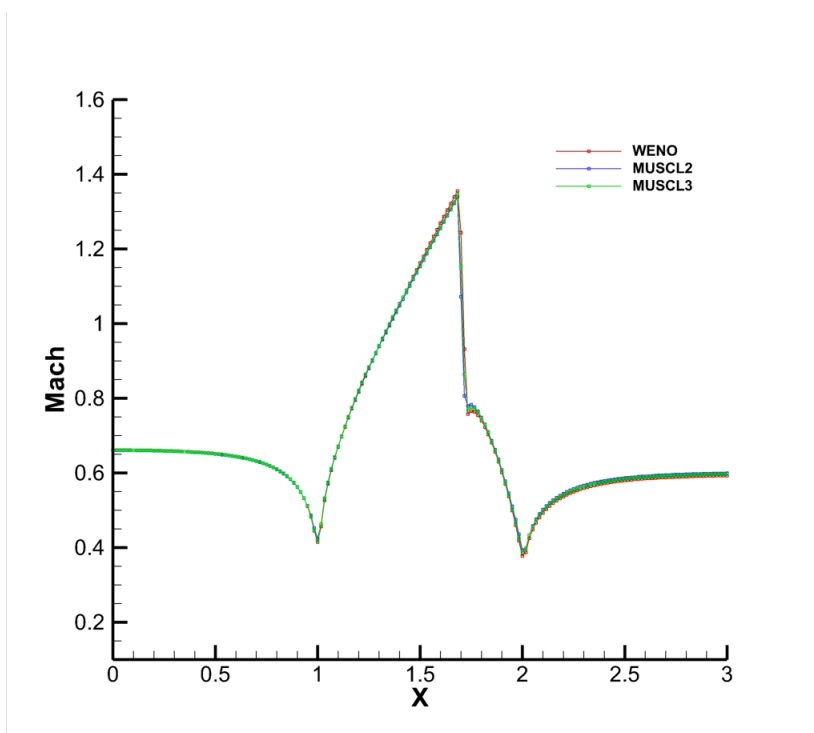
Obrázek 5.2: Rozložení Machova čísla ve formě izočar, WENO schéma.



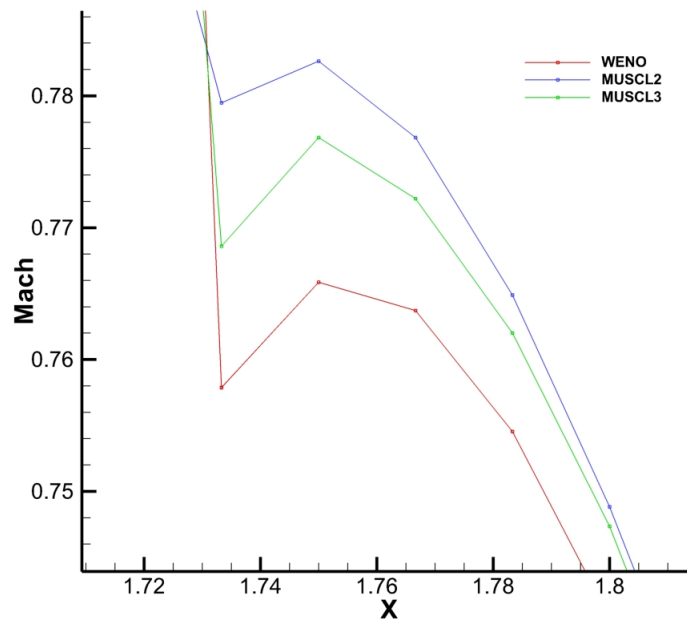
Obrázek 5.3: Rozložení Machova čísla ve formě izočar, MUSCL2 schéma.



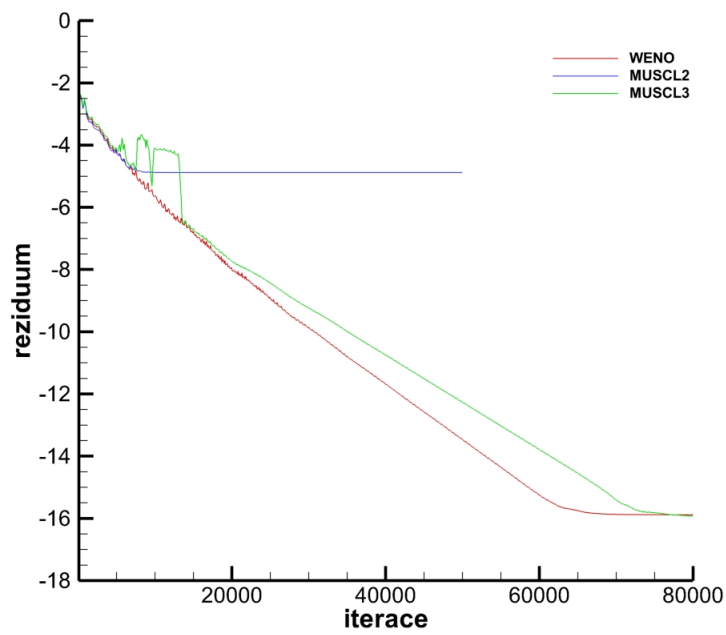
Obrázek 5.4: Rozložení Machova čísla ve formě izočar, MUSCL3 schéma.



Obrázek 5.5: Rozložení Machova čísla na dolní stěně kanálu.



Obrázek 5.6: Detail Zierepovy singularity.



Obrázek 5.7: Historie konvergence použitých schémat.

Extrémy Machova čísla			
schéma	MUSCL2	MUSCL3	WENO
M_{min}	0.39354	0.38734	0.37776
M_{max}	1.33941	1.34696	1.35508

Tabulka 5.1: Maxima a minima Machova čísla v GAMM kanále získaná různými schématy.

Nevazké proudění GAMM kanálem se často používá k testování numerických metod. Z numerických experimentů je dobře známo, že ve výše popsaném transsonickém režimu by mělo být dosaženo maxima Machova čísla na spodní stěně kanálu ve druhé polovině profilu (v rozšiřující se části), přičemž maximum se pohybuje v rozmezí $M_{max} = 1.34 - 1.40$. Dále za rázovou vlnou vzniká další lokální maximum Machova čísla, tzv. Zierepova singularita, viz [4]. Hodnota maxima Machova čísla společně s rozlišením rázové vlny a Zierepovy singularity slouží jako hlavní kritéria pro posouzení kvality numerického řešení.

Rozšířený GAMM kanál byl řešen numerickými metodami, které jsou založeny na schématu HLLC s různými rekonstrukcemi. První metoda používá WENO rekonstrukci. Tato metoda je označena jako WENO. Druhá metoda používá MUSCL rekonstrukci s parametrem $\vartheta = -1$ (protiproudé schéma druhého řádu) a minmod limiter. Tuto metodu označujeme jako MUSCL2. Poslední metoda je založena na MUSCL rekonstrukci s parametrem $\vartheta = 1/3$ (protiproudé schéma třetího řádu) a Korenovým limiterem. Tuto metodu označujeme jako MUSCL3. Metody WENO a MUSCL2 používají pro časovou integraci dvoukrokovou TVD Runge-Kuttovu metodu, zatímco metoda MUSCL3 používá tříkrokovou variantu. Všechny metody dále využívají lokální časový krok k urychlení konvergence.

Z obrázků 5.2, 5.3, 5.4 a 5.5 je vidět velmi dobrá shoda mezi jednotlivými metodami. Na obrázku 5.6 je vidět zachycení Zierepovy singularity. Metody MUSCL3 a WENO dosahují mírně lepšího rozlišení než metoda MUSCL2. Z tabulky 5.1 je vidět, že nejvyšší hodnotu maxima Machova čísla dosahuje WENO schéma. Na obrázku 5.7 vidíme konvergenci jednotlivých metod ke stacionárnímu řešení. Reziduum je dáno logaritmem L_2 normy derivace hustoty, tzn.

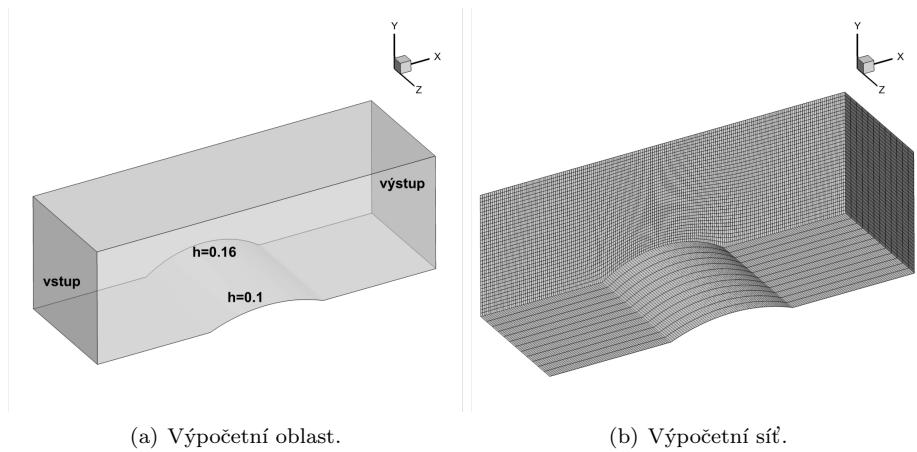
$$\text{reziduum} := \log_{10} \left(\frac{\sum_i \left(\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} \right)^2 |D_i|}{\sum_i |D_i|} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.1)$$

Metody MUSCL3 a WENO konvergují na úroveň strojové nuly, zatímco metoda MUSCL2 pouze k hodnotě -4.88 .

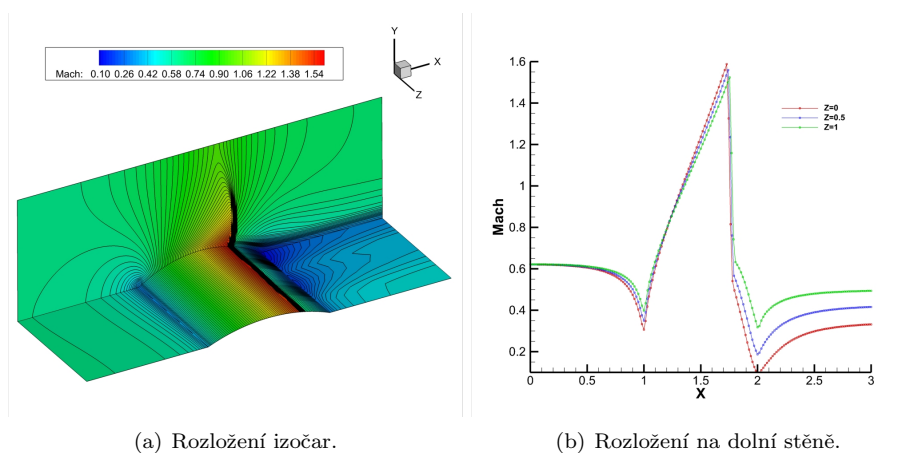
Z dosažených výsledků vyplývá, že všechny uvedené metody lze pro tento případ proudění použít. Nejlepší numerické řešení bylo dosaženo pomocí WENO schématu, které je ale mnohem náročnější na výpočetní čas. Schémata MUSCL2 a MUSCL3 jsou srovnatelně náročná na výpočetní čas, přičemž MUSCL3 schéma poskytuje výrazně lepší výsledky.

V následujících dvou kapitolách (kapitola 5.1.2, resp. kapitola 5.1.3) jsou řešeny ostatní varianty geometrie GAMM kanálu pomocí schémat WENO a MUSCL3. Z dosažených výsledků je zřejmé, že pomocí obou metod bylo dosaženo srovnatelných výsledků, které jsou v dobré shodě s výpočty ostatních autorů, viz např. [36].

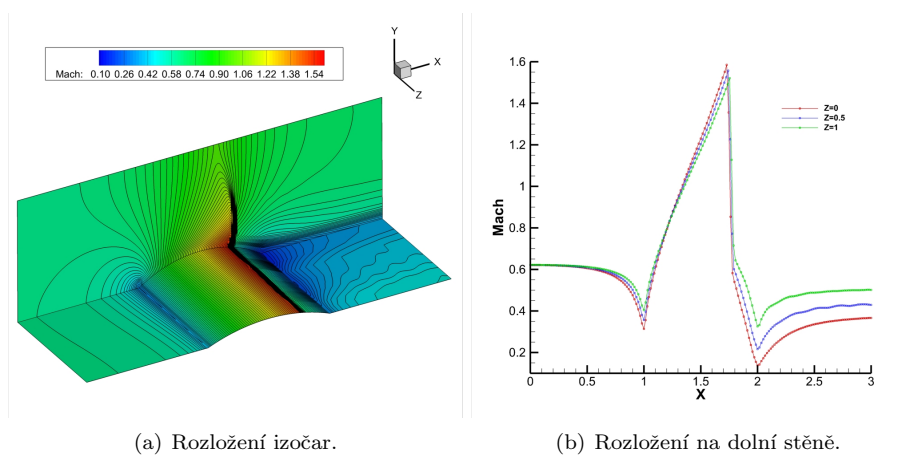
5.1.2 Proudění GAMM kanálem s proměnnou výškou profilu



Obrázek 5.8: GAMM kanál s proměnnou výškou profilu.

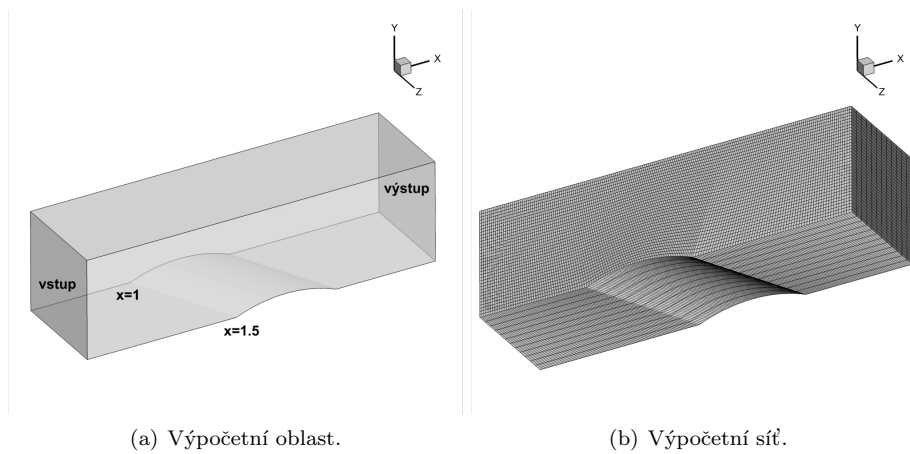


Obrázek 5.9: Rozložení Machova čísla, WENO schéma.

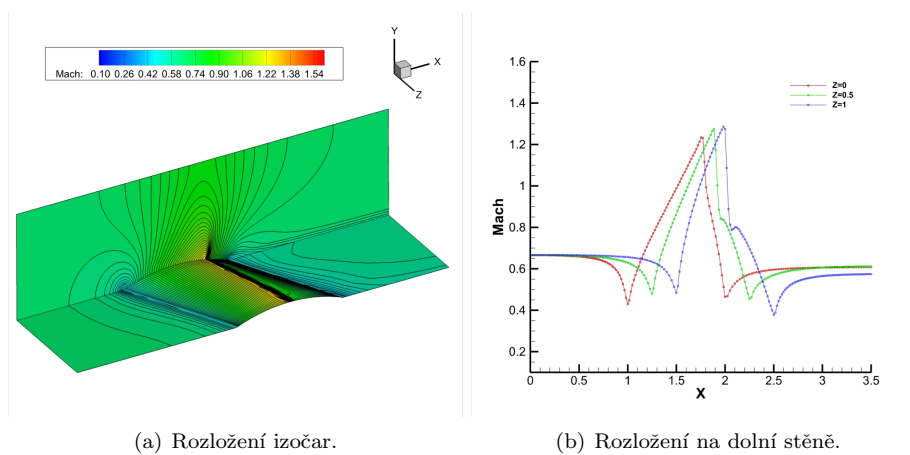


Obrázek 5.10: Rozložení Machova čísla, MUSCL3 schéma.

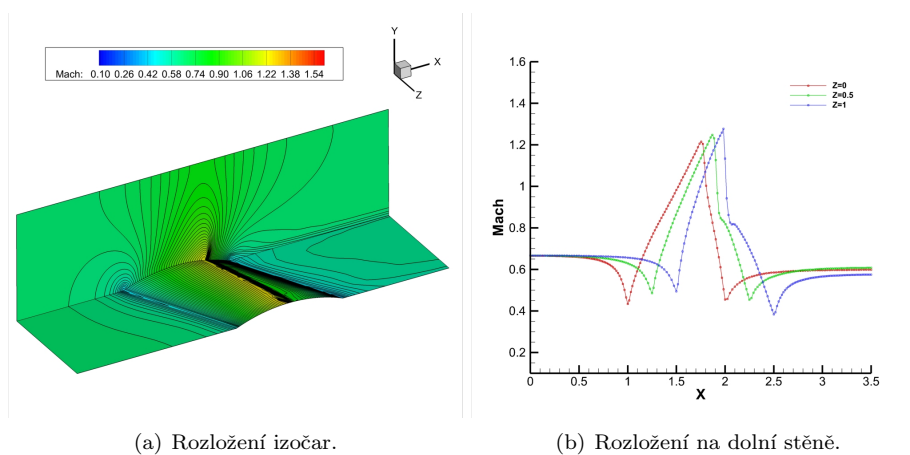
5.1.3 Proudění GAMM kanálem s šikmým profilem



Obrázek 5.11: GAMM kanál s šikmým profilem.



Obrázek 5.12: Rozložení Machova čísla, WENO schéma.



Obrázek 5.13: Rozložení Machova čísla, MUSCL3 schéma.

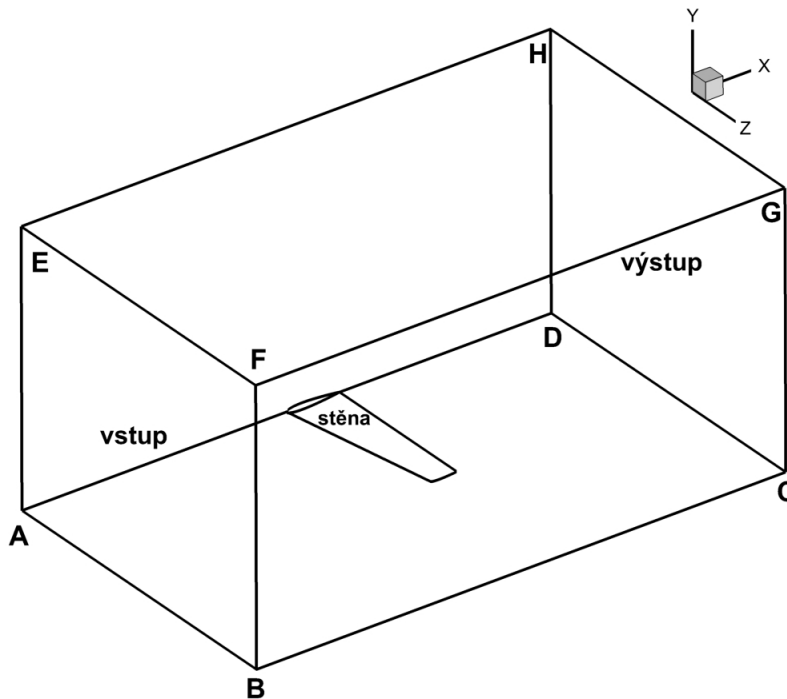
5.2 Transsonické obtékání křídla NACA0012

Dalším řešeným případem je transsonické obtékání křídla NACA0012. Řešený případ je charakterizován Machovým číslem $M_\infty = 0.85$ a nulovým úhlem náběhu, resp. odklonu. Vzhledem k nulovému úhlu náběhu a symetrii křídla stačí řešit pouze jednu polovinu skutečné výpočetní oblasti. Okrajové podmínky jsou následující:

- Vstupní hranice ABEF - $p_0 = 1$, $\rho_0 = 1$, $\alpha_\infty = 0^\circ$ a $\varphi_\infty = 0^\circ$.
- Výstupní hranice CDGH - $p_2 = 0.623512$ (odpovídá $M_\infty = 0.85$).
- Hranice ABCD (kromě části představující křídlo, viz obrázek 5.14), EFGH a BCFG - podmínka symetrie.
- Hranice ADEH a část hranice ABCD (část, která představuje křídlo) - pevná stěna.

Numerická realizace okrajové podmínky symetrie je v ne vazkém proudění stejná, jako v případě podmínky modelující pevnou stěnu.

Pro numerické řešení byla použita strukturovaná H-síť, která se skládá z $100 \times 50 \times 25$ hexahedrálních buněk. Numerické řešení je získáno schématem HLLC s MUSCL rekonstrukcí ($\vartheta = -1$, minmod limiter) a pro časovou integraci je použita dvoukroková TVD Runge-Kuttova metoda s lokálním časovým krokem.

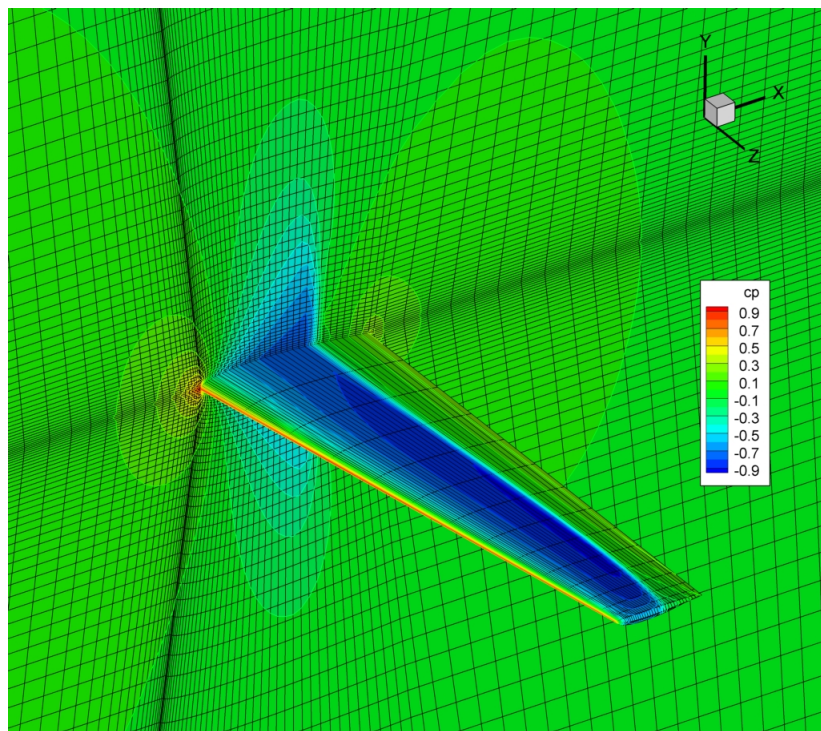


Obrázek 5.14: Výpočetní oblast pro obtékání křídla NACA0012.

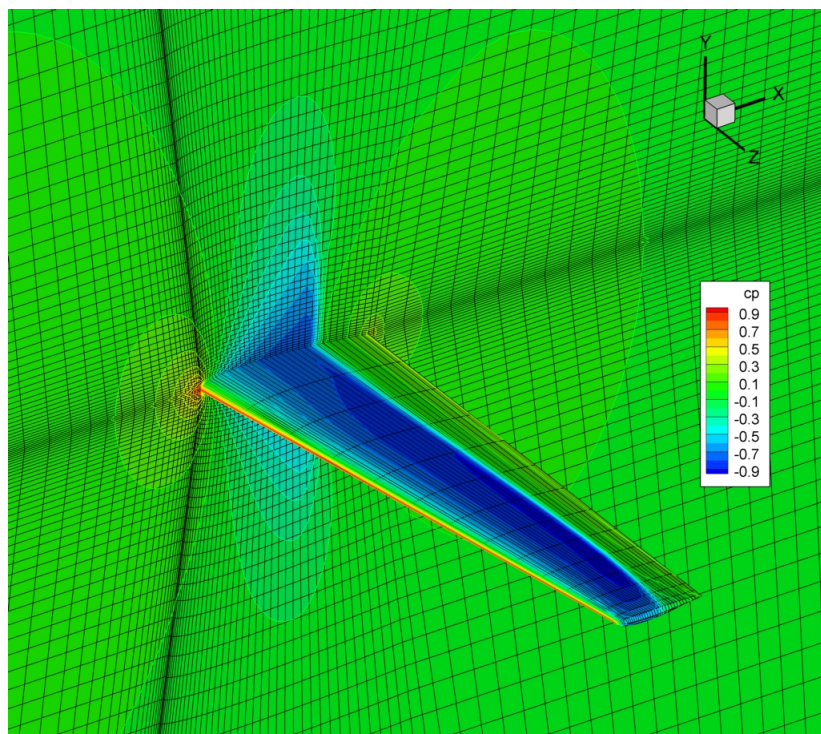
Na obrázcích 5.15, 5.16 a 5.17 je srovnání s numerickou metodou doc. Ing. Jiřího Fürsta, Ph.D., která je založena na schématu AUSM s po částech lineární WLSQR rekonstrukcí a implicitní Eulerově metodě časové diskretizace, viz [39], nebo [40]. Srovnáváme rozložení izočar, resp. průběhy tlakového koeficientu, který je definován jako

$$c_P = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty |\vec{u}_\infty|^2}. \quad (5.2)$$

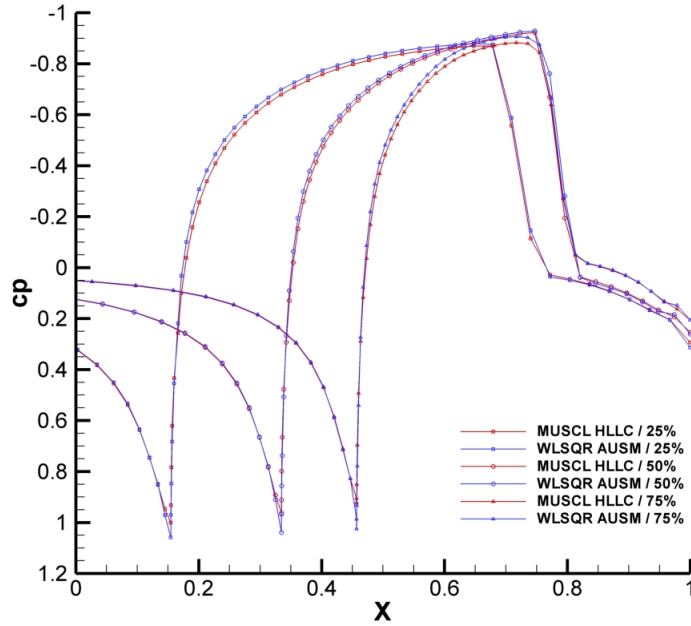
Z porovnání je vidět velmi dobrá shoda dvou zcela odlišných numerických metod.



Obrázek 5.15: Rozložení tlakového koeficientu ve formě izočar, MUSCL HLLC.



Obrázek 5.16: Rozložení tlakového koeficientu ve formě izočar, WLSQR AUSM (výsledek získaný doc. Ing. Jiřím Fürstem, Ph.D.).



Obrázek 5.17: Průběhy tlakového koeficientu ve třech řezech (25% délky, 50% délky a 75% délky křídla).

5.3 Transsonické proudění statorovou mříží Škoda

Posledním řešeným případem nevazkého proudění je transsonické proudění statorovou mříží. Tato mříž se skládá ze 44 lopatek, přičemž úhel mezi dvěma sousedními lopatkami lze vyjádřit jako $\theta = 2\pi/44$. V tomto případě řešíme pouze jednu periodu (tzn. jeden mezilopátkový kanál, viz obrázek 5.18). Okrajové podmínky byly zadány následovně:

- Vstupní hranice AEA'E' - $p_0(\varrho) = 0.38274$, $\rho_0(\varrho) = 1$, $\alpha_1(\varrho) = 0$ a $\varphi_1(\varrho)$, který je zadán tabulkou 5.2. Zadané veličiny jsou obecně závislé na poloměru $\varrho = \sqrt{y^2 + z^2}$. Vstupní úhly α_1 a φ_1 jsou dány směrovými kosíny

$$\cos \alpha_1 = \frac{(0, y, z) \cdot (u, v, w)}{\sqrt{y^2 + z^2} \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \quad (5.3)$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{(0, -z, y) \cdot (u, v, w)}{\sqrt{y^2 + z^2} \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}. \quad (5.4)$$

- Výstupní hranice DHD'H' - $p_2(\varrho)$, který je zadán tabulkou 5.3.
- Hranice ABCDEFGH (náboj), A'B'C'D'E'F'G'H' (vnější plášť), BCB'C' a FGF'G' (lopatky) - podmínky pro pevnou stěnu.
- Periodické podmínky na hranicích ABA'B' → EFE'F' a CDC'D' → GHG'H':

$$W_{ABA'B'} = B(\theta)W_{EFE'F'}, \quad (5.5)$$

$$W_{CDC'D'} = B(\theta)W_{GHG'H'}, \quad (5.6)$$

kde transformační matice $B(\theta)$ je

$$B(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

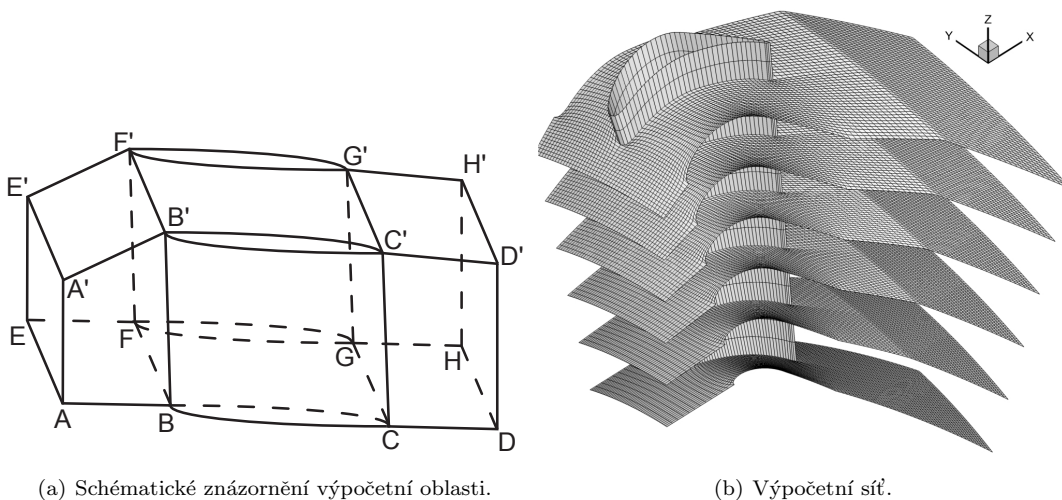
ϱ	$\varphi_1(\varrho)$
0.885000	0.00000
0.994898	0.11656
1.099969	0.23313
1.200522	0.34969
1.296843	0.46626
1.389195	0.58282
1.477817	0.69939
1.562930	0.81595
1.644740	0.93251

Tabulka 5.2: Vstupní úhel $\varphi_1(\varrho)$.

ϱ	$p_2(\varrho)$
0.885000	0.1063995
1.031892	0.1421418
1.173505	0.1726315
1.308353	0.1973660
1.435612	0.2170711
1.555010	0.2327506
1.667156	0.2454083
1.772690	0.2557621
1.872000	0.2643191

Tabulka 5.3: Výstupní tlak $p_2(\varrho)$.

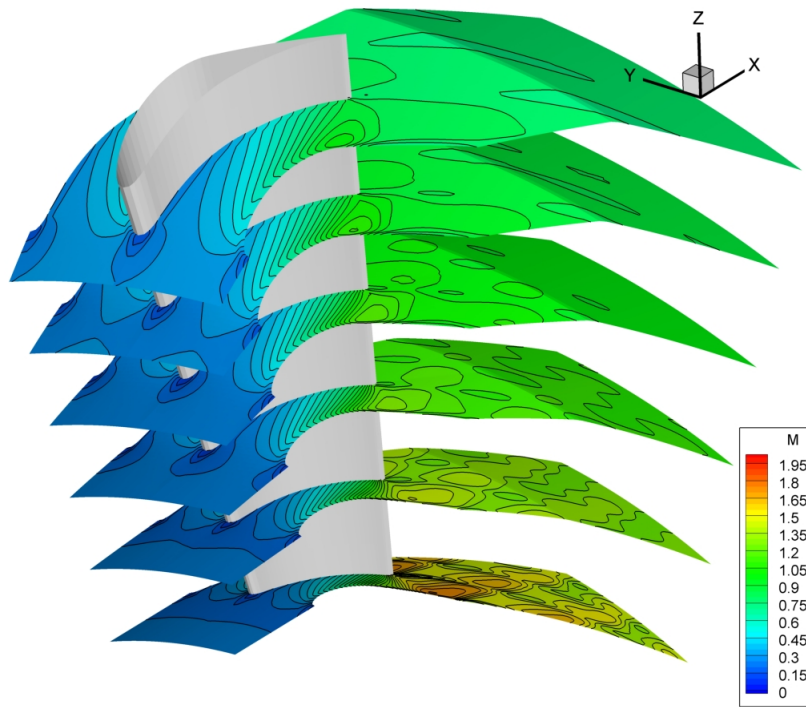
Pro numerické řešení byla použita strukturovaná H-síť, která se skládá z $90 \times 24 \times 17$ hexahedrálních buněk, viz obrázek 5.18. Numerické řešení bylo získáno dvěma různými metodami. Obě metody jsou založeny na schématu HLLC a dvoukrokové TVD Runge-Kuttově metodě s lokálním časovým krokem. V první metodě je pro zvýšení řádu v prostoru použita MUSCL rekonstrukce ($\vartheta = -1$, minmod limiter), zatímco druhá metoda používá WENO rekonstrukci.



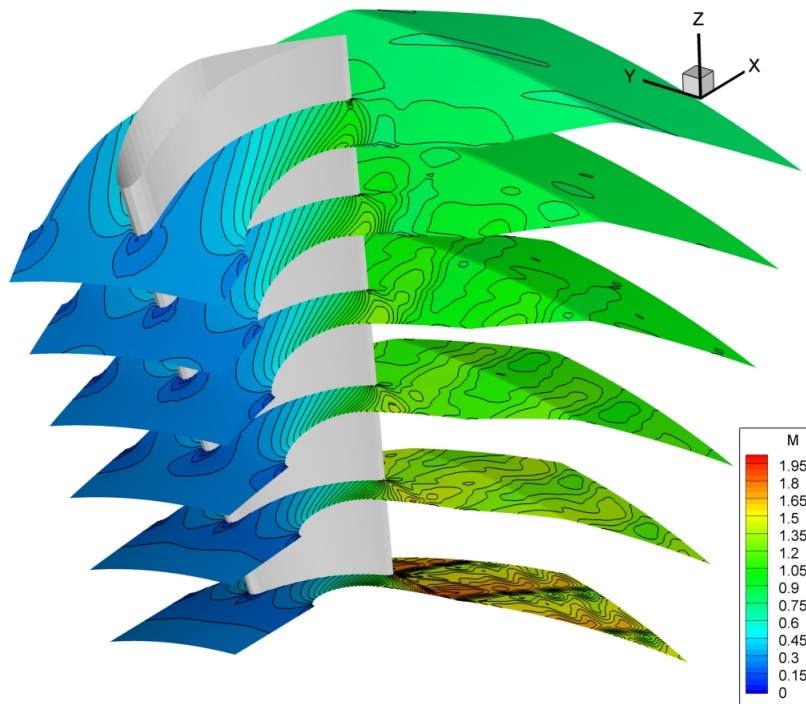
(a) Schématické znázornění výpočetní oblasti.

(b) Výpočetní síť.

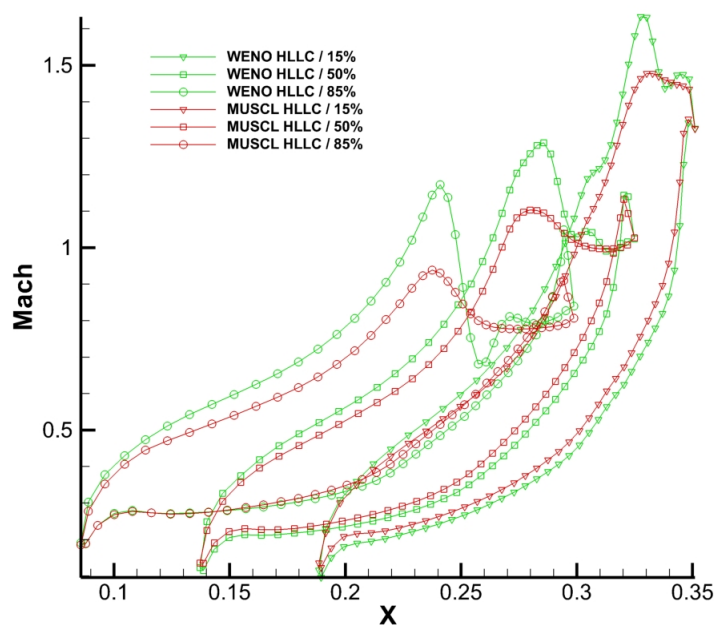
Obrázek 5.18: Výpočetní oblast a síť pro proudění statorovou mříží.



Obrázek 5.19: Rozložení Machova čísla ve formě izočar, MUSCL HLLC.



Obrázek 5.20: Rozložení Machova čísla ve formě izočar, WENO HLLC.



Obrázek 5.21: Průběhy Machova čísla ve třech řezech (15% délky, 50% délky a 85% výšky lopatky).

Z obrázků 5.19 a 5.20 je patrné, že pomocí metody používající WENO rekonstrukci jsme dostali výrazně kvalitnější numerické řešení. Rázové vlny jsou zachyceny mnohem lépe než v případě metody, která využívá MUSCL rekonstrukci. Na obrázku 5.21 vidíme srovnání průběhů Machova čísla ve třech řezech po výšce lopatky. Obě metody poskytují kvalitativně podobné výsledky. Metoda používající WENO rekonstrukci dosahuje vyšších hodnot Machova čísla obdobně jako v případě proudění GAMM kanálem. Dosažené výsledky jsou srovnatelné s výpočty jiných autorů, viz např. [36]. Výsledky, které byly popsány v této kapitole byly publikovány v [46].

Kapitola 6

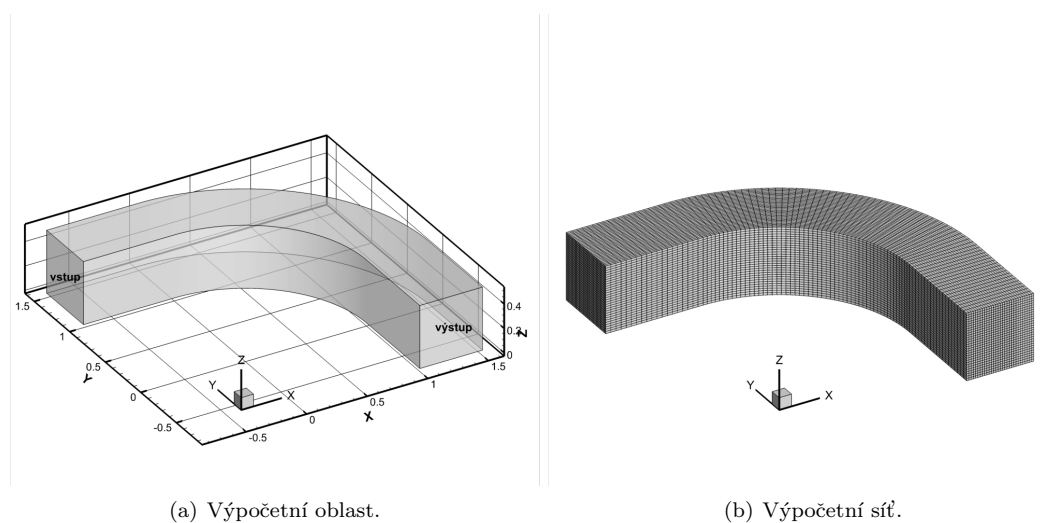
Numerické řešení prostorového laminárního proudění

V této kapitole bude řešen případ subsonického laminárního proudění zahnutým kanálem. Laminární proudění je modelováno soustavou Navierových-Stokesových rovnic a úloha laminárního proudění zahnutým kanálem nám poslouží pro ověření správnosti implementace diskretizace vazkých toků. Dosažené výsledky budou srovnány s numerickým řešením doc. Ing. Jiřího Fürsta, Ph.D., které bylo získáno Causonovým TVD MacCormackovým schématem pro aproximaci nevazkých toků a centrálním schématem pro aproximaci vazkých toků, viz [36].

Okrajové podmínky pro tuto úlohu jsou následující:

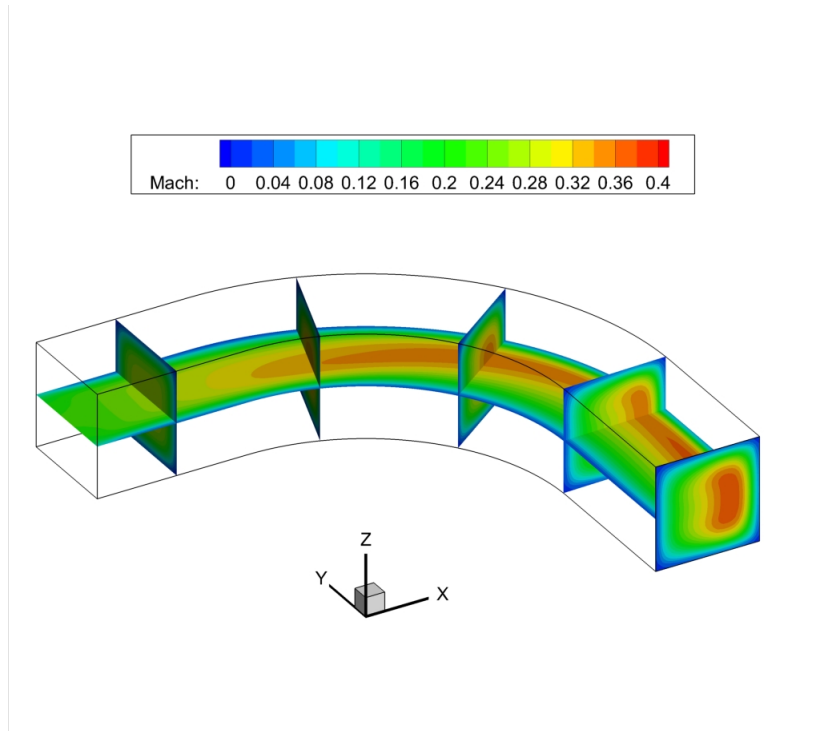
- Vstupní hranice - $p_0 = 1$, $\rho_0 = 1$, $\alpha_\infty = 0^\circ$ a $\varphi_\infty = 0^\circ$.
- Výstupní hranice - $p_2 = 0.84$.
- Ostatní hranice - adiabatická stěna.

Dynamická vazkost byla zadána jako $\mu_\infty = 0.001$. To odpovídá Reynoldsově číslu $Re = 200$. K výpočtu byla použita strukturovaná H-sít¹, která se skládá z $90 \times 30 \times 30$ hexahedrálních buněk. Numerické řešení bylo získáno metodami¹ MUSCL3 a WENO s centrální diskretizací vazkých toků.

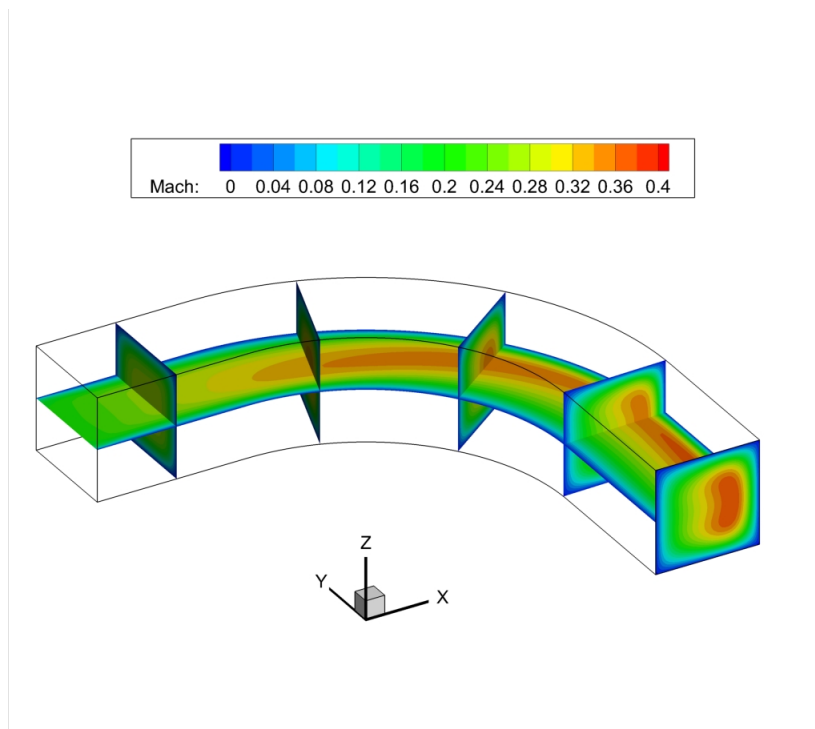


Obrázek 6.1: Výpočetní oblast a síť pro proudění zahnutým kanálem.

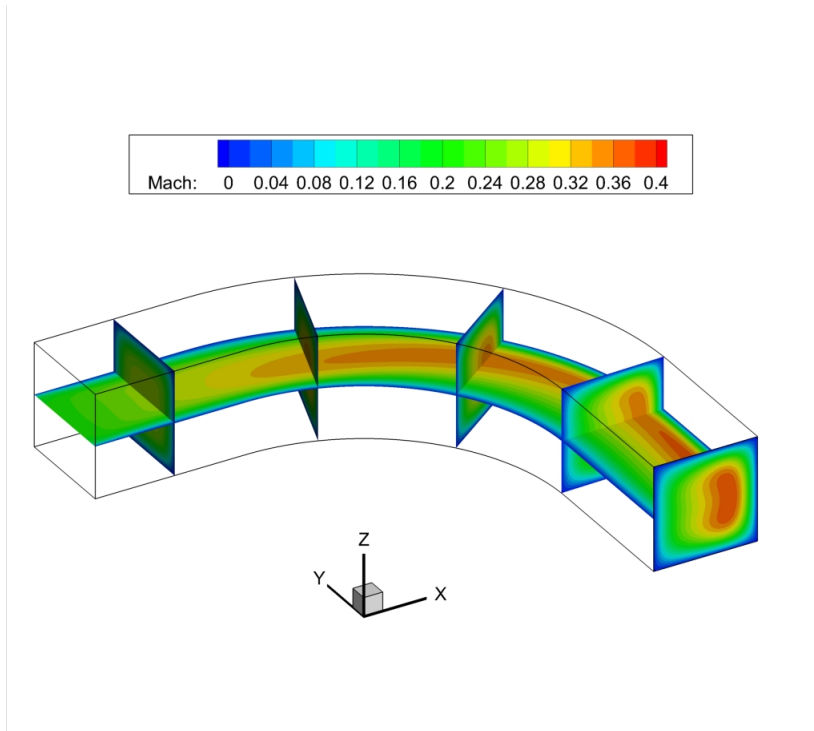
¹Které jsou popsány v kapitole 5.1.1.



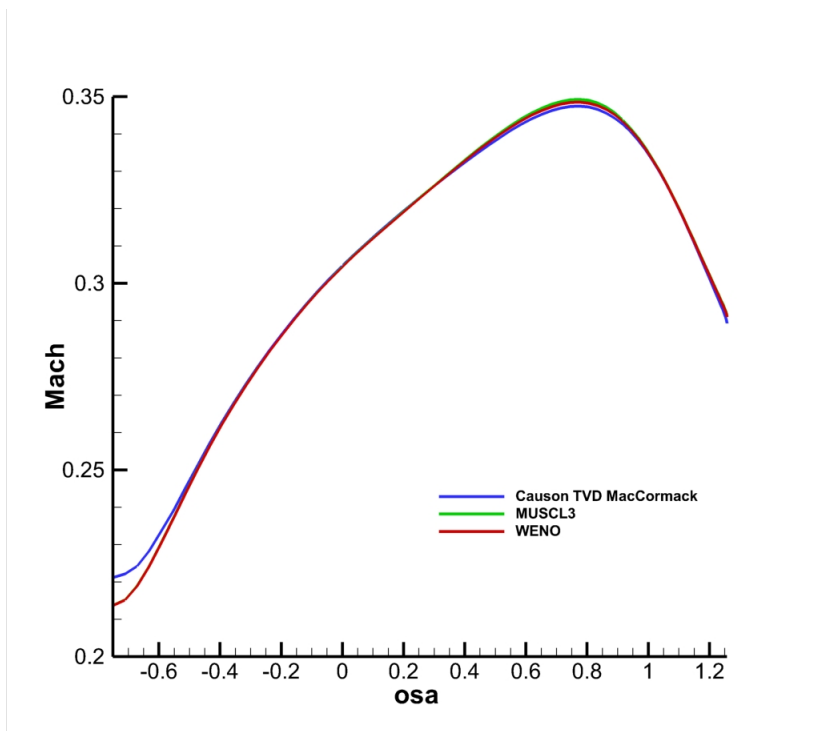
Obrázek 6.2: Rozložení Machova čísla, Causionovo TVD MacCormackovo schéma (výsledek získaný doc. Ing. Jířím Fürstem, Ph.D.).



Obrázek 6.3: Rozložení Machova čísla, MUSCL3 schéma.



Obrázek 6.4: Rozložení Machova čísla, WENO schéma.



Obrázek 6.5: Průběhy Machova čísla v ose kanálu.

Z obrázků 6.2 až 6.5 je vidět velmi dobrá shoda schémat MUSCL3 a WENO s výše popsanou numerickou metodou doc. Ing. Jiřího Fürsta, Ph.D.

Případ výše uvedeného laminárního subsonického proudění zahnutým kanálem je ryze testovací, a proto výsledky, které byly popsány v této kapitole, nebyly publikovány.

Kapitola 7

Numerické řešení rovinného turbulentního proudění

Rovinné turbulentní proudění lze modelovat pomocí soustavy středovaných Navierových-Stokesových rovnic, kde předpokládáme, že všechny derivace podle z a rychlost ve směru osy z jsou nulové. Tuto soustavu lze zapsat společně s transportními rovnicemi pro turbulentní veličiny ve vektorovém tvaru pro středované konzervativní proměnné $W = (\bar{\rho}, \bar{\rho}\tilde{u}, \bar{\rho}\tilde{v}, \bar{\rho}\tilde{E}, \bar{\rho}k, \bar{\rho}\omega)^T$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F_1(W)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(W)}{\partial y} = \frac{\partial R_1(W, \nabla W)}{\partial x} + \frac{\partial R_2(W, \nabla W)}{\partial y} + Q(W, \nabla W), \quad (7.1)$$

kde F_1 a F_2 , jsou nevazké toky

$$F_1(W) = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} \\ (\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{p})\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}k \\ \bar{\rho}\tilde{u}\omega \end{bmatrix}, \quad F_2(W,) = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{v}^2 + \bar{p} \\ (\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{p})\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{v}k \\ \bar{\rho}\tilde{v}\omega \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

a R_1 a R_2 , jsou vazké toky, které lze vyjádřit jako

$$R_1(W, \nabla W) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx}^{tot} \\ \tau_{xy}^{tot} \\ \tilde{u}\tau_{xx}^{tot} + \tilde{v}\tau_{xy}^{tot} - q_x^{tot} \\ (\bar{\mu} + \sigma^*\mu_t)\frac{\partial k}{\partial x} \\ (\bar{\mu} + \sigma\mu_t)\frac{\partial \omega}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad R_2(W, \nabla W) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy}^{tot} \\ \tau_{yy}^{tot} \\ \tilde{u}\tau_{xy}^{tot} + \tilde{v}\tau_{yy}^{tot} - q_y^{tot} \\ (\bar{\mu} + \sigma^*\mu_t)\frac{\partial k}{\partial y} \\ (\bar{\mu} + \sigma\mu_t)\frac{\partial \omega}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

kde jednotlivé složky tenzoru celkového napětí $\tau_{ij}^{tot} = \tau_{ij} + \tau_{ij}^t$ jsou

$$\tau_{xx}^{tot} = (\bar{\mu} + \mu_t) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho}k - \bar{\rho}ka_{xx}^{(ex)}, \quad \tau_{xy}^{tot} = (\bar{\mu} + \mu_t) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) - \bar{\rho}ka_{xy}^{(ex)},$$

$$\tau_{yy}^{tot} = (\bar{\mu} + \mu_t) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho}k - \bar{\rho}ka_{yy}^{(ex)} \quad (7.4)$$

a složky vektoru celkového tepelného toku $q_j^{tot} = q_j + q_j^t$ jsou

$$q_x^{tot} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\bar{\mu}}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right), \quad q_y^{tot} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\bar{\mu}}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right), \quad (7.5)$$

příčměž dynamická vazkost $\bar{\mu}$ je dána vztahem

$$\bar{\mu} = \mu_{ref} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right)^{\frac{3}{4}} \quad (7.6)$$

a turbulentní vazkost μ_t a složky přídatné anizotropie $a_{ij}^{(ex)}$ jsou dány volbou modelu turbulence¹. Vektor Q obsahuje zdrojové členy modelu turbulence a je dán jako

$$Q(W, \nabla W) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P - \beta^* \bar{\rho} k \omega \\ \alpha \frac{\omega}{k} P - \beta \bar{\rho} \omega^2 + C_d \end{bmatrix}, \quad (7.7)$$

kde produkční člen P je dán vztahem (3.24) a příčná difuze C_d je dána vztahem

$$C_d = \sigma_d \frac{\bar{\rho}}{\omega} \max \left(\frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y}, 0 \right). \quad (7.8)$$

Hodnota konstant $\alpha, \beta, \beta^*, \sigma, \sigma^*$ a σ_d opět závisí na volbě modelu turbulence. Celou soustavu rovnic uzavírá stavová rovnice ideálního plynu ve tvaru

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \left[\bar{\rho} \tilde{E} - \frac{1}{2} \bar{\rho} (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) - \bar{\rho} k \right]. \quad (7.9)$$

7.1 Subsonické proudění kolem desky

Prvním řešeným případem rovinného turbulentního proudění je subsonické proudění kolem desky, které slouží k validaci numerické metody a implementace matematického modelu. Úloha je řešena na obdelníkové oblasti $[-1, 16.667] \times [0, 3]$, viz obrázek 7.1. Okrajové podmínky jsou následující:

- Vstupní hranice $[x = -1, y = 0 \text{ až } y = 3]$ - $\rho_\infty = 1.4, u_\infty = 0.2, v_\infty = 0, k_\infty = 2.9 \cdot 10^{-10}$ a $\omega_\infty = 1.05 \cdot 10^{-2}$.
- Výstupní hranice $[x = 16.667, y = 0 \text{ až } y = 3]$ - $p_2 = 1$ (odpovídá $M_\infty = 0.2$).
- Hranice $[x = -1 \text{ až } x = 0, y = 0]$ a $[x = -1 \text{ až } x = 16.667, y = 3]$ - podmínky symetrie.
- Hranice $[x = 0 \text{ až } x = 16.667, y = 0]$ - adiabatická stěna.

Dynamická vazkost pro tento případ má hodnotu $\mu_\infty = 3.5 \cdot 10^{-7}$ a specifická rychlost disipace na stěně je zadána jako $\omega_w = 10^6$.

K výpočtu byla použita strukturovaná H-síť, která se skládá ze 110×80 buněk. První buňka ve směru osy y má velikost $\Delta y_1 = 10^{-5}$. Těžiště první buňky má tedy odpovídající normovanou souřadnici $y^+ \approx 1$, přičemž y^+ je definována jako

$$y^+ = \frac{y u_\tau \rho}{\mu}. \quad (7.10)$$

Numerické řešení bylo získáno schématem HLLC s WENO rekonstrukcí pro aproximaci nevazkých toků a centrálním schématem pro aproximaci vazkých toků. Pro časovou integraci byla použita dvoukroková TVD Runge-Kuttova metoda s lokálním časovým krokem, přičemž zdrojové členy jsou diskretizovány pomocí bodové implicitní metody (4.114).

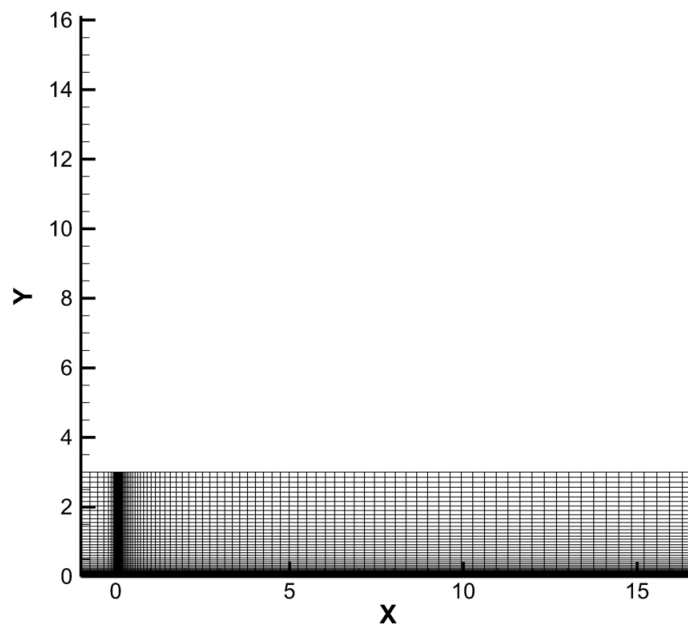
Pro modelování turbulence byly použity tři modely. První je dvourovnicový TNT $k - \omega$ model. U tohoto modelu jsme provedli modifikaci produkčního členu podle Wallina ([15]), který ve své disertační práci ukazuje, že tento člen ve standardní podobě způsobuje neadekvátní nárůst turbulentních veličin pro případ rázové vlny a dále, že i pro případ subsonického proudění může dojít k nefyzikálnímu nárůstu vlivem malých poruch v proudovém poli. Proto je produkční člen (3.24) nahrazen limitovaným produkčním členem

$$P^{(lim)} = \min \left(P, \bar{\rho} k \sqrt{P / \mu_t} \right). \quad (7.11)$$

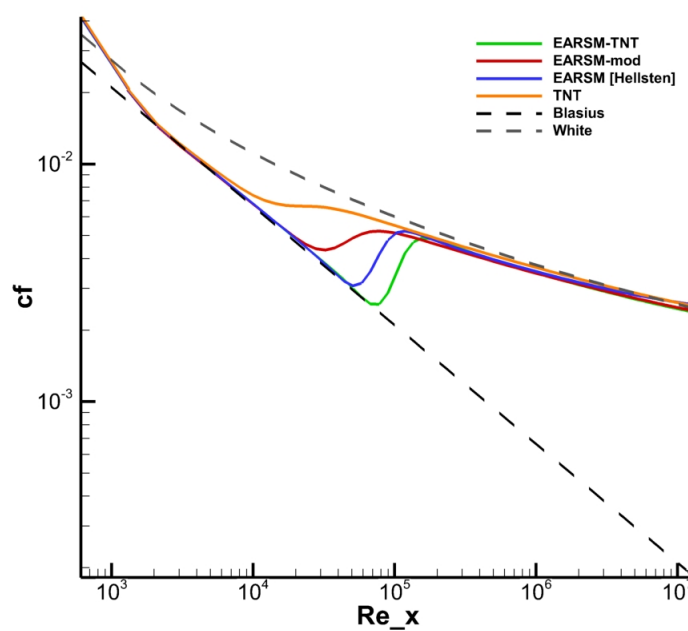
Dále jsme testovali originální EARSM model, který je založen na transportních rovnicích TNT modelu s původními konstantami (označený jako EARSM-TNT) a EARSM model s překalibrovanými

¹V našem případě TNT $k - \omega$, nebo EARSM model.

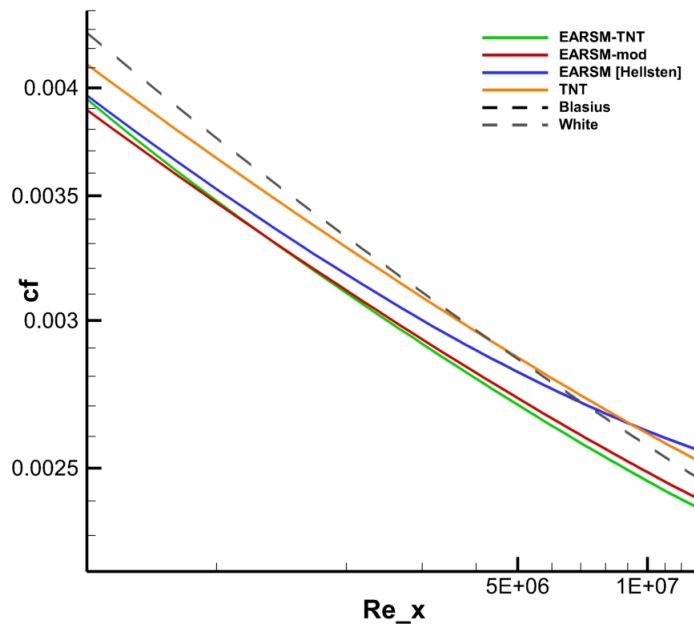
konstantami (označený jako EARSM-mod). Pro srovnání jsme dále provedli výpočet s Hellstenovým modelem, viz [16], který byl vyvinut přímo pro EARSM model.



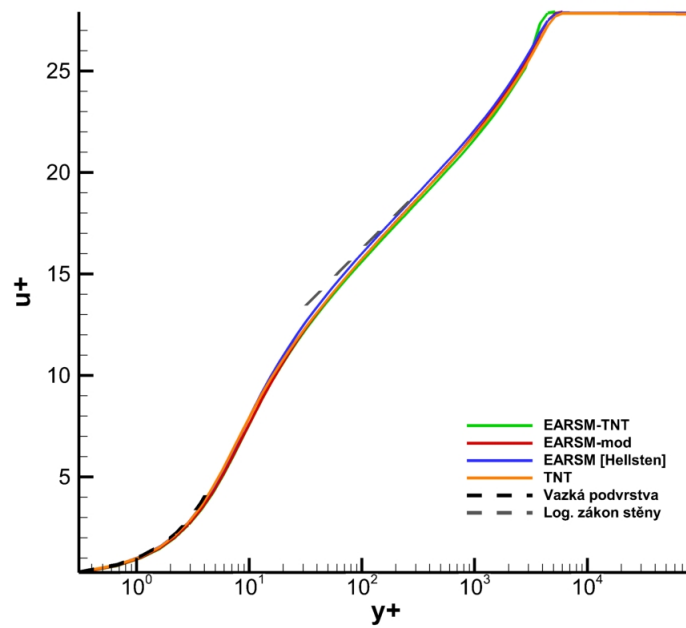
Obrázek 7.1: Výpočetní oblast a síť pro proudění kolem desky.



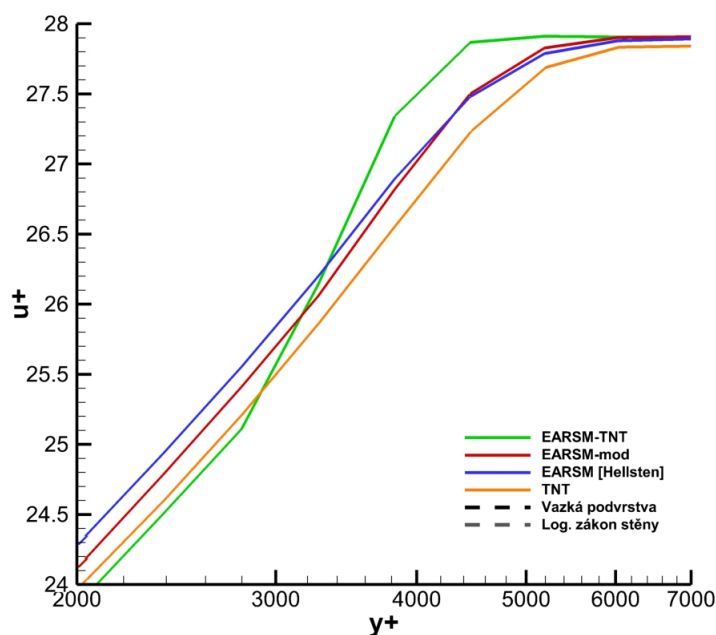
Obrázek 7.2: Rozložení třecího koeficientu na desce (v log. souřadnicích).



Obrázek 7.3: Detail rozložení třecího koeficientu na desce (v log. souřadnicích).



Obrázek 7.4: Rychlostní profily na desce pro $Re_x = 10^7$ (y^+ v log. stupnici).



Obrázek 7.5: Detail rychlostních profilů na desce pro $Re_x = 10^7$ (y^+ v log. stupnici).

Na obrázku 7.2 je vidět rozložení třecího koeficientu

$$c_f = \frac{\mu \frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{1}{2} \rho_\infty |\vec{u}_\infty|^2} \quad (7.12)$$

v závislosti na Reynoldsově čísle Re_x , které je definováno jako

$$Re_x = \frac{\rho_\infty |\vec{u}_\infty| x}{\mu_\infty}. \quad (7.13)$$

Průběhy rozložení třecího koeficientu, které byly dosaženy pomocí různých modelů turbulence jsou srovnány s řešením laminárního proudění podle Blasia [52]

$$c_f^B = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}, \quad (7.14)$$

resp. vztahem pro turbulentní proudění (White, [52])

$$c_f^W = \frac{0.455}{\ln^2(0.06 Re_x)}. \quad (7.15)$$

Z dosažených výsledků je patrné, že s pomocí všech testovaných modelů turbulence bylo dosaženo uspokojivých výsledků. Modely založené na EARSM konstitutivních vztazích zachycují lépe přechod z laminárního do turbulentního režimu proudění, ačkoliv ani u jednoho modelu není dosaženo správné polohy přechodu. K tomuto účelu je pravděpodobně nutné zahrnout do matematického popisu model přechodu, který je ovšem nad rámec této práce. Na obrázku 7.3 je detailnější srovnání průběhů třecího koeficientu v turbulentní části mezní vrstvy. Nejlepší výsledek byl dosažen Kokovým TNT $k - \omega$ modelem. Pomocí EARSM modelu s překalibrovanými konstantami jsem dosáhly mírného zlepšení oproti původnímu EARSM modelu. Na obrázku 7.4 je porovnání rychlostních profilů pro $Re_x = 10^7$, tzn. v zadní části desky, kde je již plně vyvinutá turbulentní mezní vrstva. Normovaná rychlost u^+ je definována jako

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad (7.16)$$

a souřadnice y^+ je dána vztahem (7.10). Z průběhů rychlostních profilů je vidět dobrá shoda všech testovaných modelů v oblasti vazké podvrstvy, kde platí $u^+ \approx y^+$ i v oblasti zákona stěny, kde platí

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + konst. \quad (7.17)$$

Na obrázku 7.5 je detail průběhů rychlostních profilů v oblasti vnější hranice mezní vrstvy. Zde vidíme, že za pomoci původního EARSM modelu dostáváme kvalitativně špatný průběh. Překalibrovaný EARSM model tento problém odstraňuje a lze pozorovat velmi dobrou shodu s Hellstenovým modelem.

7.2 Transsonické obtékání profilu křídla RAE 2822

Dalším řešeným případem je transsonické obtékání profilu RAE 2822, které lze již považovat za reálný problém vnější aerodynamiky. Uvažujeme zde případ 10 (viz [41]), kde dochází k interakci rázové vlny s mezní vrstvou, která způsobuje lokální odtržení mezní vrstvy v oblasti za rázovou vlnou. Tento případ je charakterizován vstupním Machovým číslem $M_\infty = 0.754$, úhlem náběhu $\alpha_\infty = 2.57^\circ$ a Reynoldsovým číslem $Re = 6.2 \cdot 10^6$. Okrajové podmínky jsou následující:

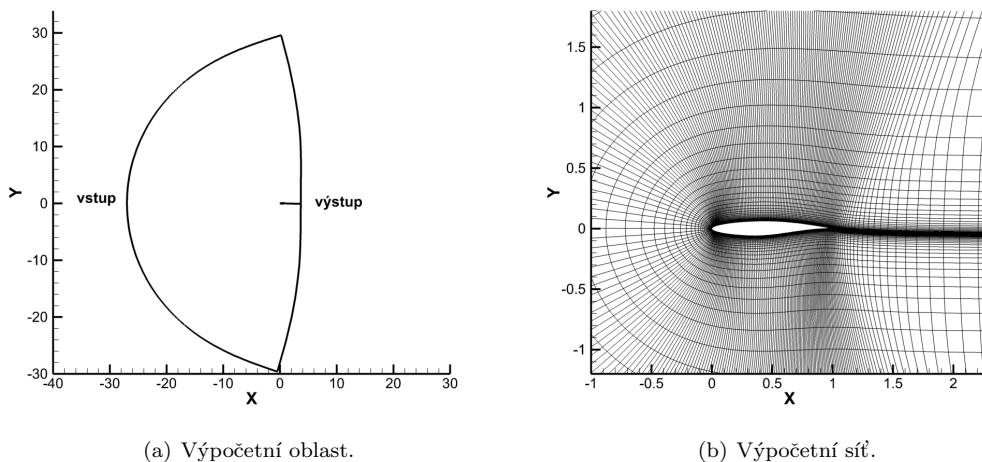
- Vstupní hranice - $\rho_0 = 1$, $p_0 = 1$, $\alpha_\infty = 2.57^\circ$, $k_\infty = 7.056 \cdot 10^{-7}$ a $\omega_\infty = 5.175 \cdot 10^2$.
- Výstupní hranice - $p_2 = 0.686$.
- Hranice profilu - adiabatická stěna.

Specifická rychlost disipace na stěně je zadána jako $\omega_w = 10^8$.

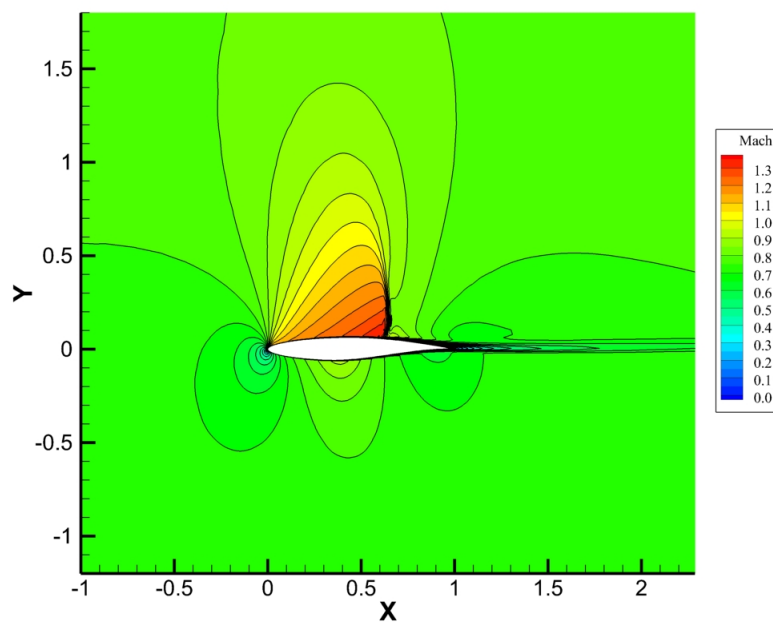
K výpočtu byla použita strukturovaná, hyperbolicky generovaná C-síť, která se skládá ze 300×70 buněk, viz obrázek 7.6.

Numerické řešení je získáno metodou, která je založena na schématu HLLC s WENO rekonstrukcí, centrální aproximací vazkých členů a dvoukrokové TVD Runge-Kuttově metodě s lokálním časovým krokem a bodovou implicitní diskretizací zdrojových členů.

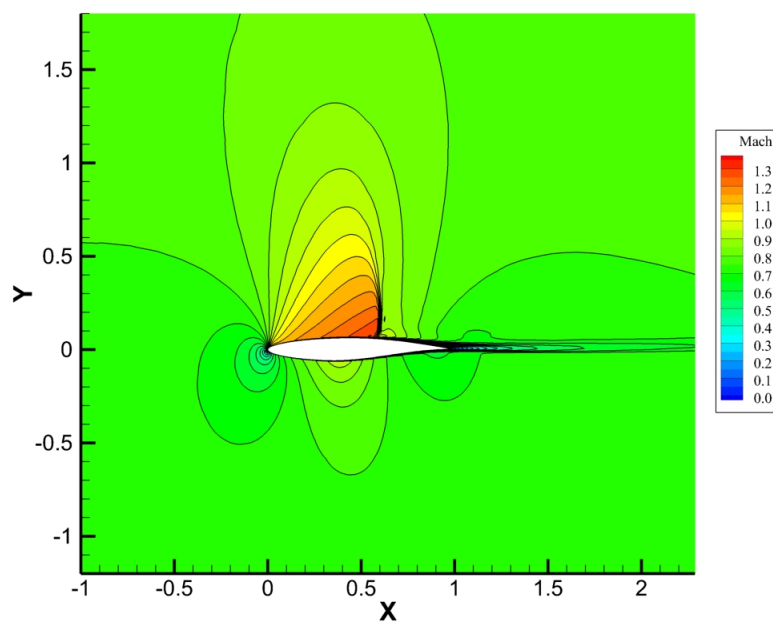
Podobně jako v kapitole 7.1 jsme pro modelování turbulence použili TNT model s modifikací produkčního členu (7.11), originální EARSM (EARSM-TNT) a překalibrovaný EARSM (EARSM-mod) model turbulence.



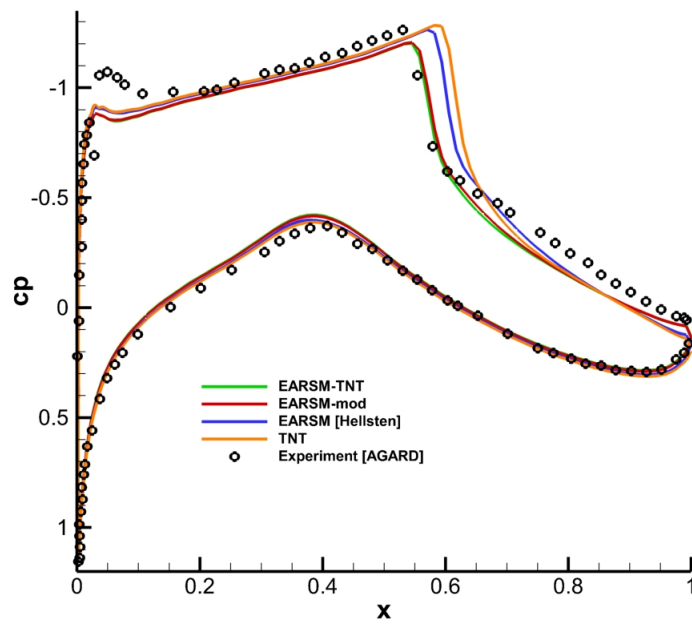
Obrázek 7.6: Výpočetní oblast a síť pro obtékání profilu RAE 2822.



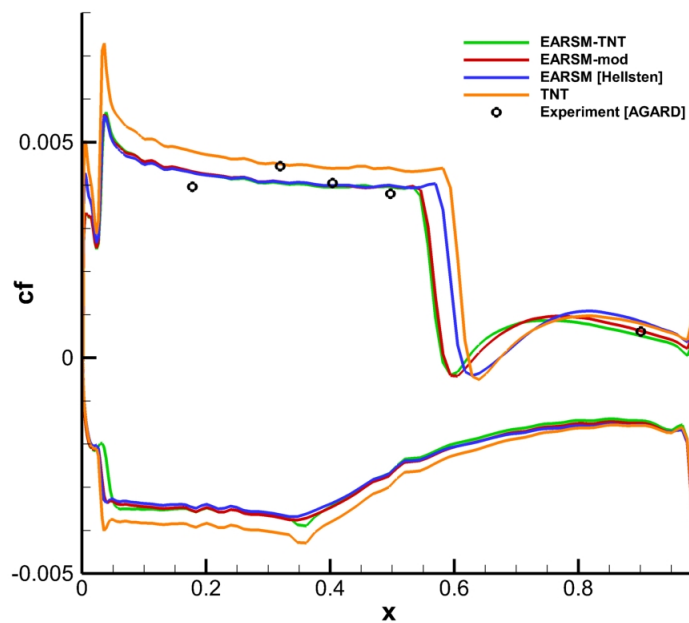
Obrázek 7.7: Rozložení Machova čísla ve formě izočar, TNT model.



Obrázek 7.8: Rozložení Machova čísla ve formě izočar, recalibrovaný EARSM model.



Obrázek 7.9: Průběhy tlakového koeficientu podél profilu RAE 2822.



Obrázek 7.10: Průběhy třecího koeficientu podél profilu RAE 2822.

Pro tento případ je dále použit jednoduchý model přechodu ve tvaru

$$\gamma(\vec{x}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x - x_t}{\frac{\Delta x_t}{200} + |x - x_t|} \right), \quad (7.18)$$

kde $x_t = 0.03L$ je pozice přechodu a $\Delta x_t = 0.005L$ je šířka přechodové oblasti. Volba pozice a šířky přechodu odpovídá experimentu, viz [41]. Tento jednoduchý model samozřejmě plně nevystihuje problematiku přechodu do turbulence a jeho použitelnost je omezena na případy, kdy předem známe polohu přechodu. Funkcí $\gamma(\vec{x})$ jsou násobeny produkční členy v modelu turbulence.

Na obrázcích 7.7 a 7.8 je rozložení Machova čísla ve formě izochar, které bylo získáno pomocí TNT modelu, resp. rekalibrovaného EARSM modelu. Z porovnání je vidět, že oba modely poskytují kvalitativně podobné výsledky. Na obrázku 7.9 je srovnání průběhů tlakového koeficientu podél profilu. Můžeme pozorovat, že TNT model nezachytil správnou polohu rázové vlny. Pomocí Hellstenova EARSM modelu lze dosáhnout mírného zlepšení. Nejlepší výsledky byly dosaženy pomocí originálního a rekalibrovaného EARSM modelu. U těchto modelů poloha rázové vlny souhlasí s experimentem. Na obrázku 7.10 je srovnání průběhů třecího koeficientu podél profilu. Poloha rázové vlny zde má stejný trend jako v případě průběhů tlakového koeficientu. Modely, které jsou založeny na EARSM vztazích jsou v lepší shodě s experimentem než lineární TNT $k - \omega$ model.

7.3 Transsonické proudění mříží SE 1050

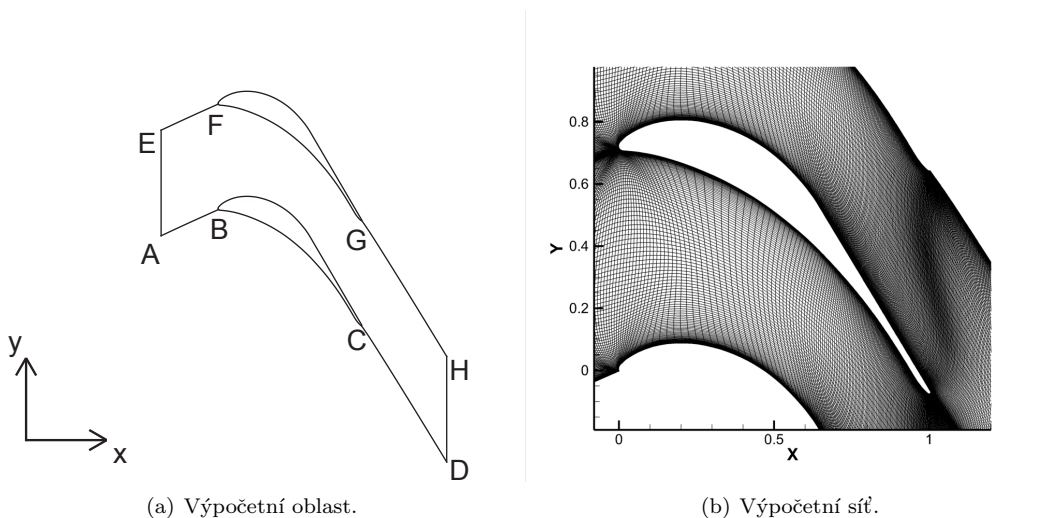
Posledním řešeným případem rovinného turbulentního proudění je transsonické proudění turbínovou mříží SE 1050, kde uvažujeme návrhový režim, který je charakterizován výstupním izoentropickým Machovým číslem $M_{2is} = 1.198$, úhlem náběhu $\alpha_\infty = 19.3^\circ$ a Reynoldsovým číslem $Re = 1.5 \cdot 10^6$. Okrajové podmínky jsou následující:

- Vstupní hranice AE - $\rho_0 = 1$, $p_0 = 1$, $\alpha_\infty = 19.3^\circ$, $k_\infty = 10^{-4}$ a $\omega_\infty = 10$.
- Výstupní hranice DH - $p_2 = 0.413$ (odpovídá $M_{2is} = 1.198$).
- Sací strana (BC) a tlaková strana (FG) lopatky - adiabatická stěna.
- Periodické podmínky na hranicích AB→EF a CD→GH:

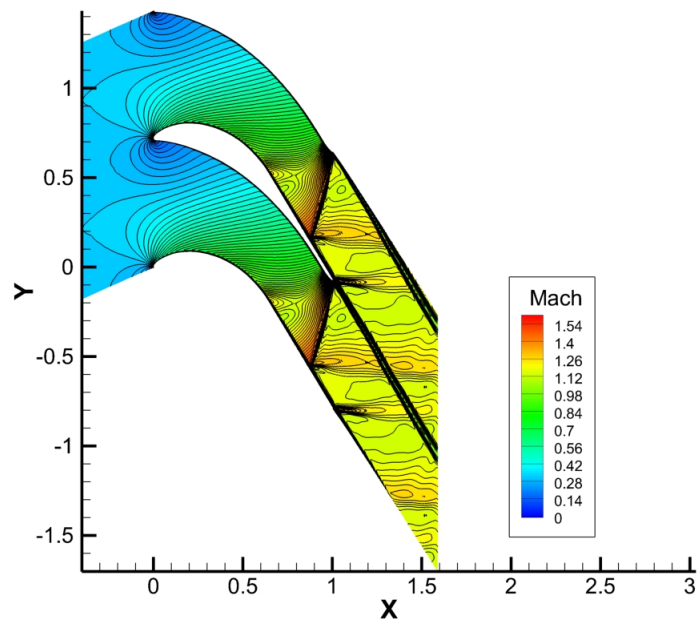
$$W_{AB} = W_{EF}, \quad (7.19)$$

$$W_{CD} = W_{GH}. \quad (7.20)$$

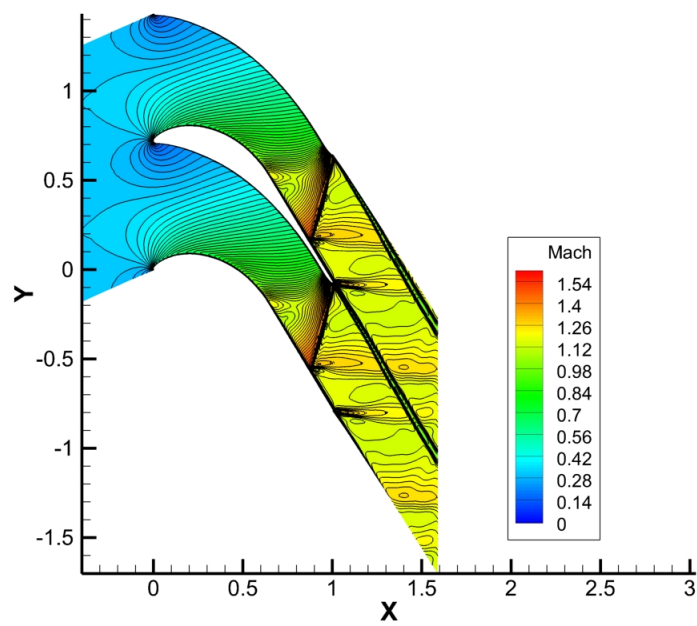
Specifická rychlost disipace na stěně je zadána jako $\omega_w = 10^5$.



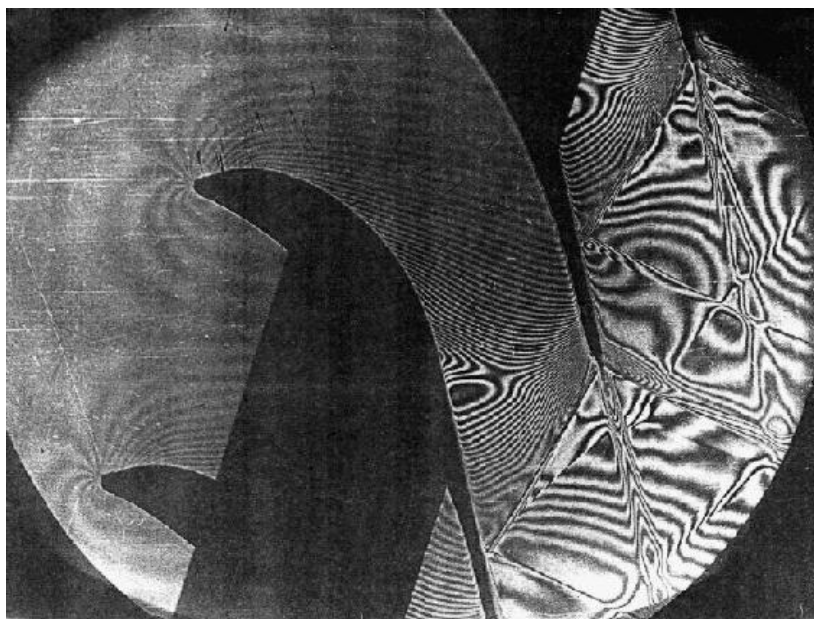
Obrázek 7.11: Výpočetní oblast a síť pro proudění mříží SE 1050.



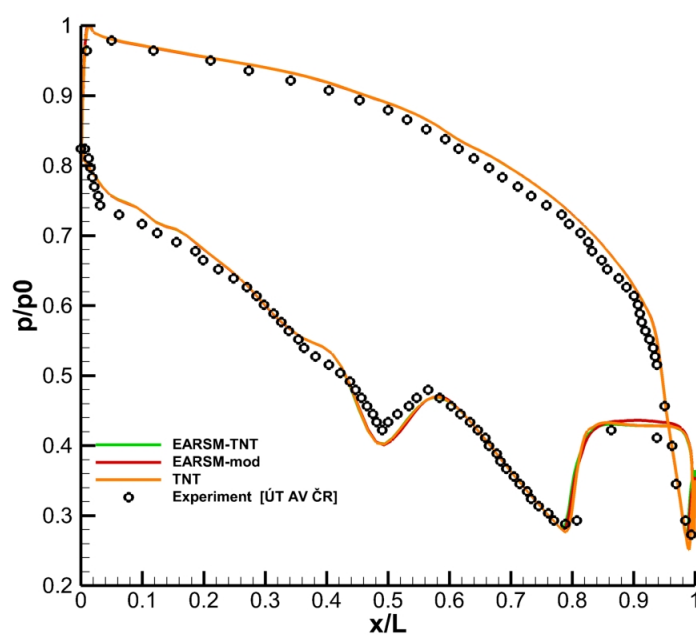
Obrázek 7.12: Rozložení Machova čísla ve formě izočar, TNT model.



Obrázek 7.13: Rozložení Machova čísla ve formě izočar, recalibrovaný EARS model.



Obrázek 7.14: Proudění v turbínové mříži SE 1050, interferogram [42].



Obrázek 7.15: Průběhy tlaku podél lopatky.

V případě transsonického proudění turbínovou mříží může nastat situace, ve které se mohou na výstupu z výpočetní oblasti vyskytovat rázové vlny. V takovém případě nebude rozložení tlaku na výstupu konstantní. Proto použijeme modifikaci výstupní okrajové podmínky, kde na místo konstantní hodnoty tlaku zadáme střední hodnotu. Implementace této modifikace, která je popsána v [36], je následující:

- Extrapolujeme tlak z poslední řady buněk před výstupní hranicí do fiktivních buněk, tzn. $(p_g)_j := (p_M)_j$.
- Z rozložení tlaku ve fiktivních buňkách za výstupní hranicí vypočítáme střední hodnotu \bar{p}_g .
- Tlak ve fiktivních buňkách za výstupní hranicí potom dostaneme jako

$$(p_g)_j = \begin{cases} (p_M)_j [p_2 / \bar{p}_g] & \text{pro } p_2 < \bar{p}_g \\ (p_M)_j + (p_2 - \bar{p}_g) & \text{pro } p_2 > \bar{p}_g. \end{cases} \quad (7.21)$$

K výpočtu byla použita strukturovaná, elipticky generovaná H-síť, která se skládá ze 285×119 buněk, viz obrázek 7.11.

Numerické řešení bylo získáno metodou, která je založena na schématu HLLC s WENO rekonstrukcí, centrální aproximací vazkých členů a dvoukrokové TVD Runge-Kuttově metodě s lokálním časovým krokem a bodovou implicitní diskretizací zdrojových členů.

Pro modelování turbulence jsme opět použili TNT model s modifikací produkčního členu (7.11), originální EARSM (EARSM-TNT) a překalibrovaný EARSM (EARSM-mod) model turbulence.

Na obrázcích 7.12 a 7.13 je rozložení Machova čísla ve formě izočar, které bylo získáno pomocí TNT modelu, resp. rekalibrovaného EARSM modelu. Z porovnání je vidět, že oba modely velmi dobře zachytily důležité atributy proudového pole jako např. rekompresní zónu, rázové vlny a jejich odrazy, úplav apod. Oba výsledky jsou kvalitativně ve velmi dobré shodě s experimentem [42], viz obrázek 7.14. Na obrázku 7.15 je srovnání průběhů tlaku podél lopatky. Můžeme pozorovat, že všechny použité modely turbulence dosahly kvantitativně shodných výsledků, které navíc dobře odpovídají experimentu.

V tabulce 7.1 je vyhodnocení energetických ztrát, které bylo provedeno metodou redukce dat, viz [43].

Energetické ztráty pro transsonické proudění s $M_{2is} = 1.198$					
Metoda	TNT	EARSM-TNT	EARSM-mod	WLSQR/TNT	Experiment ÚT AV ČR
Ztráty [%]	2.91	2.79	2.76	3.16	4.6

Tabulka 7.1: Vyhodnocení energetických ztrát pro proudění mříží SE 1050.

Hodnoty ztrát získané pomocí všech modelů turbulence se značně odlišují od experimentu. To je pravděpodobně dáno tím, že rovinný výpočet nezahrnuje vliv stěn aerodynamického tunelu, ve kterém byl experiment proveden. Vypočtené hodnoty ztrát poměrně dobře korespondují s výsledkem rovinného výpočtu Doc. Ing. Jiřího Fürsta, Ph.D., který byl proveden numerickou metodou AUSM s WLSQR rekonstrukcí, implicitní Eulerovou metodou časové integrace a s použitím TNT $k-\omega$ modelu turbulence i s výsledky jiných autorů, viz [5].

Výsledky, které byly popsány v této kapitole byly publikovány v [47] a [49].

Kapitola 8

Numerické řešení prostorového turbulentního proudění

Tato kapitola je věnována řešení plně trojrozměrného turbulentního proudění, přičemž uvažujeme případy stacionární i nestacionární. Stacionární proudění je modelováno pomocí středované soustavy Navierových-Stokesových rovnic (viz kapitola 3.1). Nestacionární proudění lze modelovat pomocí nestacionární středované soustavy Navierových-Stokesových rovnic (URANS), nebo pomocí X-LES metody (viz kapitola 3.4.1).

8.1 Transsonické proudění turbínovou mříží SE 1050

Prvním řešeným případem prostorového turbulentního proudění je transsonické proudění turbínovou mříží SE 1050, kde podobně jako v rovinném případě uvažujeme návrhový režim, který je charakterizován výstupním izentropickým Machovým číslem $M_{2is} = 1.198$, úhlem náběhu $\alpha_\infty = 19.3^\circ$, úhlem odklonu $\varphi_\infty = 0^\circ$ a Reynoldsovým číslem $Re = 1.5 \cdot 10^6$. Okrajové podmínky jsou následující:

- Vstupní hranice AA'EE' - $\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $p_0 = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $\alpha_\infty = 19.3^\circ$, $\varphi_\infty = 0^\circ$, $Tu = 2\%$ a $\omega_\infty = 1.04 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$.
- Výstupní hranice DD'HH' - $p_2/p_0 = 0.413$ (odpovídá $M_{2is} = 1.198$).
- Sací strana lopatky (BB'CC') a tlaková strana lopatky (FF'GG') a hranice ABCDEFGH - adiabatická stěna.
- Periodické podmínky na hranicích AA'BB' → EE'FF' a CC'DD' → GG'HH':

$$W_{AA'BB'} = W_{EE'FF'}, \quad (8.1)$$

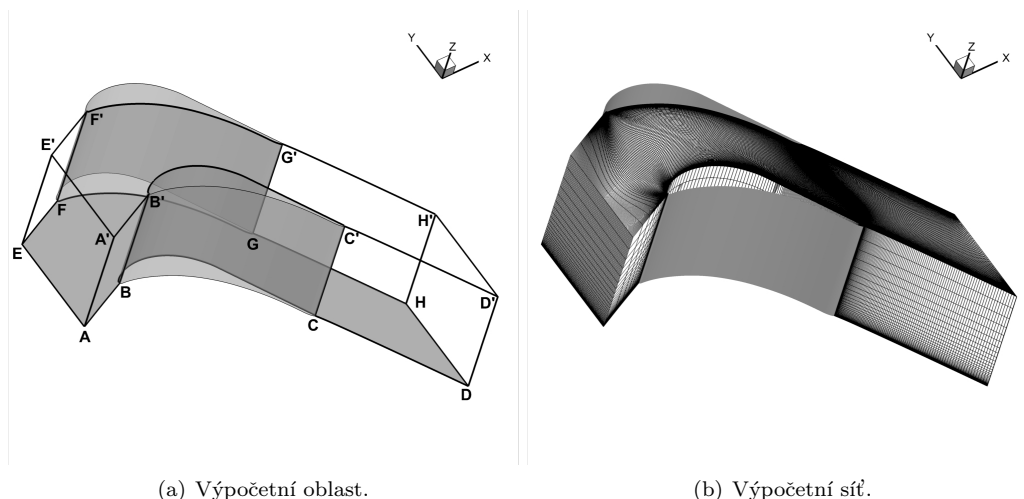
$$W_{CC'DD'} = W_{GG'HH'}. \quad (8.2)$$

- Hranice A'B'C'D'E'F'G'H' - podmínka symetrie.

Specifická rychlost disipace na stěně je zadána jako $\omega_w = 4.8 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$. Podobně jako v případě rovinného výpočtu zadáváme na výstupu střední hodnotu tlaku na místo konstantní hodnoty.

K výpočtu byla použita strukturovaná H-síť z rovinného výpočtu, která byla rozšířena pro prostorový případ. Tato síť se skládá ze $285 \times 119 \times 50$ buněk, viz obrázek 8.1. Protože úloha je symetrická, budeme řešit pouze jednu polovinu skutečné výpočetní oblasti.

Pro numerické řešení použijeme metodu, která je založena na schématu HLLC s WENO rekonstrukcí, centrální aproximací vazkých členů a dvoukrokové TVD Runge-Kuttově metodě s lokálním časovým krokem a bodovou implicitní diskretizací zdrojových členů. Pro modelování turbulence jsme zvolili překalibrovaný EARSMod (EARSMod-mod) model turbulence.



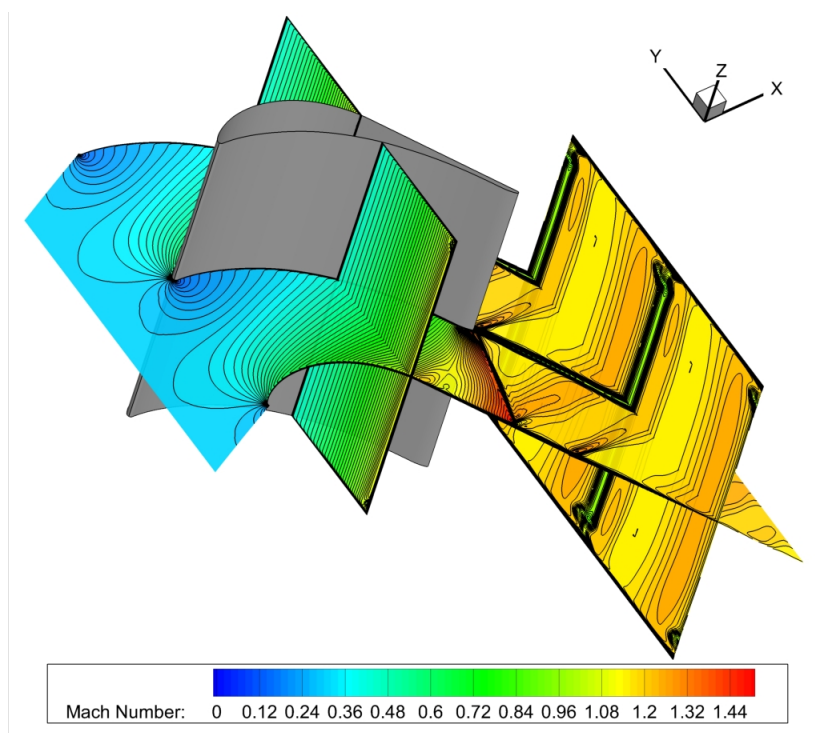
Obrázek 8.1: Výpočetní oblast a síť pro prostorové proudění mříží SE 1050.

Na obrázku 8.2 vidíme rozložení Machova čísla. Rozložení v polovině výšky lopatky (rovina $x - y$, $z = 0.08\text{m}$) velmi dobře odpovídá rovinnému výpočtu z kapitoly 7.3. Druhý řez v rovině $y - z$ pro $x = 0.11\text{ m}$ představuje tzv. traverzovací rovinu, ve které jsou dále vyhodnoceny energetické ztráty. Na obrázku 8.3 je lokální rozložení ztrátového koeficientu ζ , který je definován jako

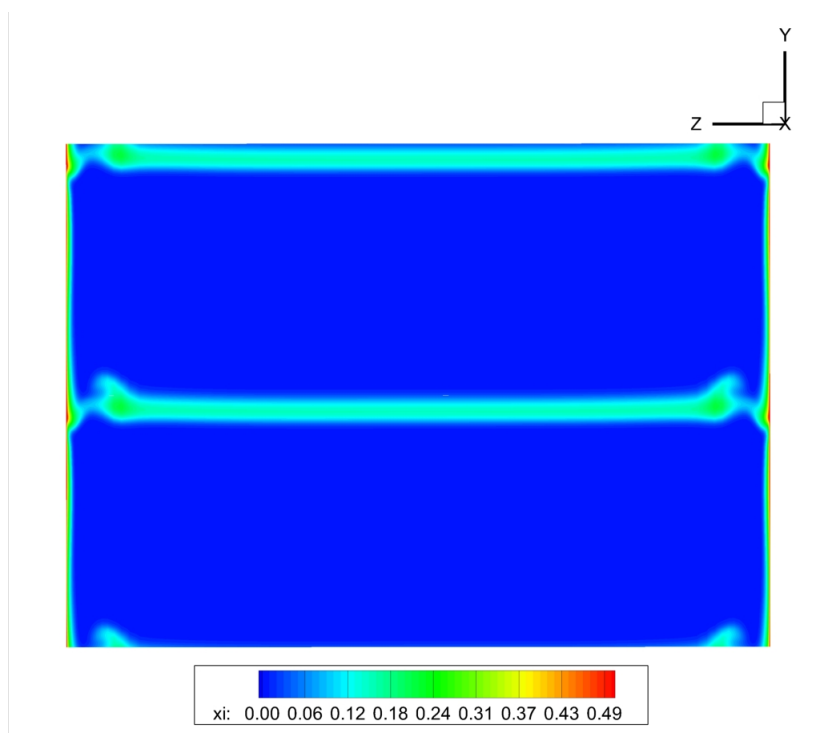
$$\zeta = 1 - \frac{\lambda^{*2}}{\lambda_i^{*2}}, \quad (8.3)$$

kde

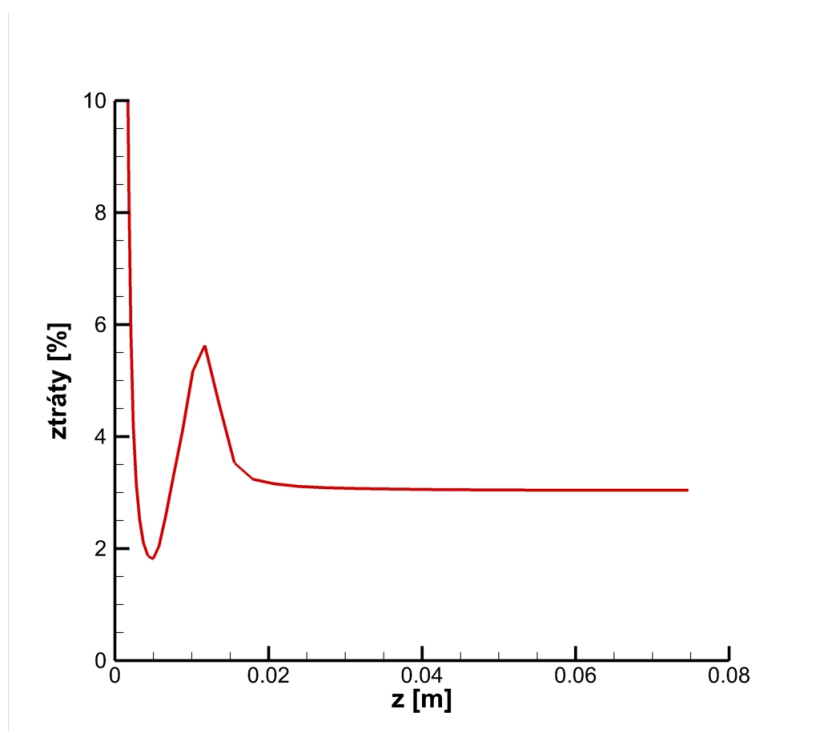
$$\lambda^* = \sqrt{\frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}} \quad \text{a} \quad \lambda_i^* = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}}. \quad (8.4)$$



Obrázek 8.2: Rozložení Machova čísla ve formě izočar.



Obrázek 8.3: Lokální rozložení ztrátového koeficientu v traverzovací rovině.



Obrázek 8.4: Průběh energetických ztrát po výšce lopatky.

Z lokálního rozložení ztrátového koeficientu v traverzovací rovině je vidět, že ztráty jsou koncentrovány v blízkosti stěn a dále v úplavu. Lokální maxima ztrát, která se nachází přibližně 10 mm

od stěny jsou zapříčiněna účinky sekundárního proudění. V blízkosti stěn má tedy proudové pole složitý prostorový charakter, zatímco uprostřed lopatky je v podstatě dvourozměrné. Na obrázku 8.4 je rozložení energetických ztrát po výšce lopatky (ve směru osy z), které bylo vyhodnoceno pomocí metody redukce dat [43].

V této úloze není provedeno srovnání s experimentem, neboť rozložení ztrát je výrazně ovlivněno vstupní okrajovou podmínkou. V [50], nebo v [51] je ukázáno, že v případě konstantního rozložení celkového tlaku na vstupu jsou lokální maxima ztrát posunuta blíže ke stěnám a dosahují nižších hodnot než v experimentu. Nými dosažené výsledky nicméně velmi dobře korespondují s výpočtem pro případ konstantního rozložení celkového tlaku na vstupu v [51].

8.2 Nestacionární subsonické proudění kolem válce

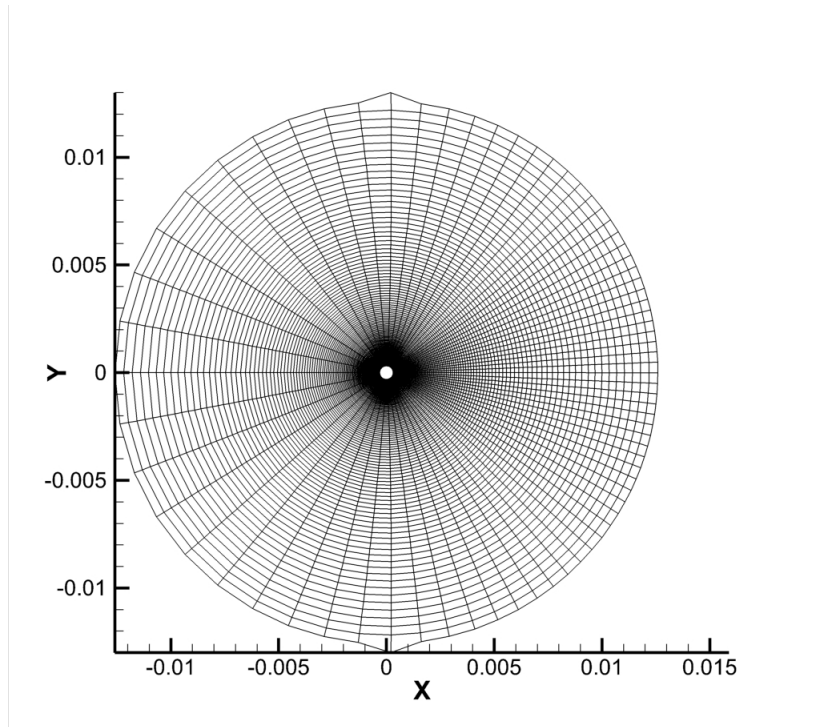
Druhým řešeným případem prostorového turbulentního proudění je nestacionární subsonické proudění kolem válce, které slouží primárně jako testovací případ, ale může být také považováno za modelování proudění kolem jednoho komponentu turbulizační mříže. Výpočetní oblast prstencového tvaru se skládá z vnitřní válcové stěny o průměru $d = 6.18 \cdot 10^{-4}$ m a vnější válcové stěny o průměru $40 \times d$, viz obrázek 8.5. Výška oblasti (ve směru osy z) je $2 \times d$.

Úloha je charakterizována vstupním Machovým číslem $M_\infty = 0.3$, nulovými úhly náběhu, resp. odklonu proudu a Reynoldsovým číslem $Re = 3.9 \cdot 10^3$. Okrajové podmínky jsou následující:

- Vstupní hranice [$x \leq 2 \cdot 10^{-4}$, $\varrho = 20d$, $z \in (0, 2d)$] - $\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $p_0 = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $\alpha_\infty = 0^\circ$, $\varphi_\infty = 0^\circ$, $k_\infty = 50.4 \text{ m}^2/\text{s}^2$ a $\omega_\infty = 1.64 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$.
- Výstupní hranice [$x > 2 \cdot 10^{-4}$, $\varrho = 20d$, $z \in (0, 2d)$] - $p_2 = 0.952 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ (odpovídá $M_\infty = 0.3$).
- Vnitřní válcová stěna - adiabatická stěna.
- Periodické podmínky na hranicích $z = 0$ a $z = 2d$, tzn. $W|_{z=0} = W|_{z=2d}$.

Specifická rychlost disipace na stěně je zadána jako $\omega_w = 5.65 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$.

K výpočtu byla použita dvourozměrná, hyperbolicky generovaná O-síť, která byla algebraicky rozšířena do třetí dimenze. Tato síť se skládá ze $72 \times 168 \times 24$ buněk, viz obrázek 8.5.



Obrázek 8.5: Výpočetní oblast a síť pro prostorové proudění kolem válce.

Pro numerické řešení použijeme metodu, která je založena na schématu HLLC s MUSCL rekonstrukcí ($\vartheta = 1/3$, Koreňův limiter), centrální aproximací vazkých členů a tříkrokové TVD Runge-Kuttově metodě s konstantním časovým krokem $\Delta t = 1.5 \cdot 10^{-9}$ s.

Turbulentní proudění je modelováno pomocí soustavy středovaných Navierových-Stokesových rovnic, která je uzavřena TNT $k - \omega$ modelem ve standardním tvaru, nebo rekalibrovaným EARSM modelem. Další variantou modelování turbulentního proudění je metoda X-LES, která kombinuje soustavu středovaných Navierových-Stokesových rovnic se simulací velkých vírů. V této metodě dále použijeme modifikaci podle Koka, který ve své práci [26] navrhuje vylepšení v podobě zahrnutí stochastické veličiny do subgridní části X-LES modelu. Ta přispívá k destabilizaci smykových vrstev a tím k rychlejšímu vyvinutí plně trojrozměrné turbulence. Jedinou změnou proti X-LES modelu z kapitoly 3.4.1 je odlišná formulace pro turbulentní vazkost ve tvaru

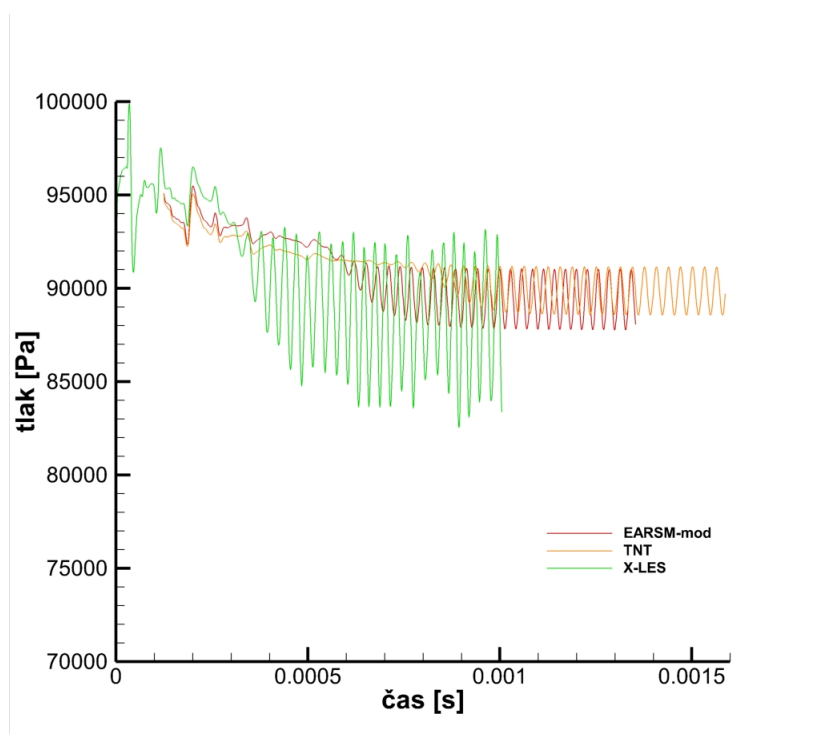
$$\mu_T = \begin{cases} \bar{\rho}k/\omega & \text{pro } \sqrt{k}/\omega \leq C_1\Delta \\ b^2C_1\Delta\bar{\rho}\sqrt{k} & \text{pro } \sqrt{k}/\omega > C_1\Delta, \end{cases} \quad (8.5)$$

kde $b = N(0, 1)$ je stochastická veličina se standardním normálním rozdělením.

Na obrázku 8.6 je vývoj tlaku v závislosti na čase v bodě $P_s = [1.5 \cdot 10^{-3}, 0, 6.18 \cdot 10^{-4}]$, tzn. přibližně ve vzdálenosti dvou průměrů za válcem v x-ovém směru. Z obrázku je vidět, že v případě X-LES metody se mnohem rychleji vyvinul periodický průběh tlaku, který odpovídá vytvoření von Kármánovy vírové stezky v oblasti za válcem. Amplituda průběhu se výrazně liší od modelů turbulence založených na středované soustavě Navierových-Stokesových rovnic. Tyto modely poskytují srovnatelné průběhy, přičemž u EARSM modelu lze pozorovat mírně vyšší amplitudu. To je pravděpodobně způsobeno jeho nižší difuzivitou. V tabulce 8.1 je vyhodnoceno Strouhalovo číslo, které je definováno vztahem

$$St = \frac{f_v L}{|\bar{u}|}, \quad (8.6)$$

kde f_v je frekvence uvolňování vírů. Strouhalovo číslo získané pomocí X-LES modelu a EARSM modelu velmi dobře odpovídá experimentu.

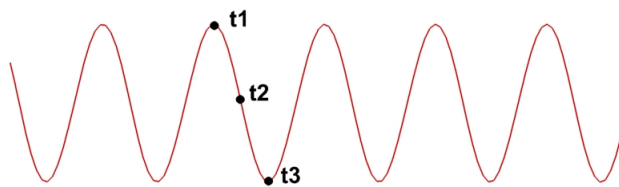


Obrázek 8.6: Průběhy tlaku v závislosti na čase v bodě P_s .

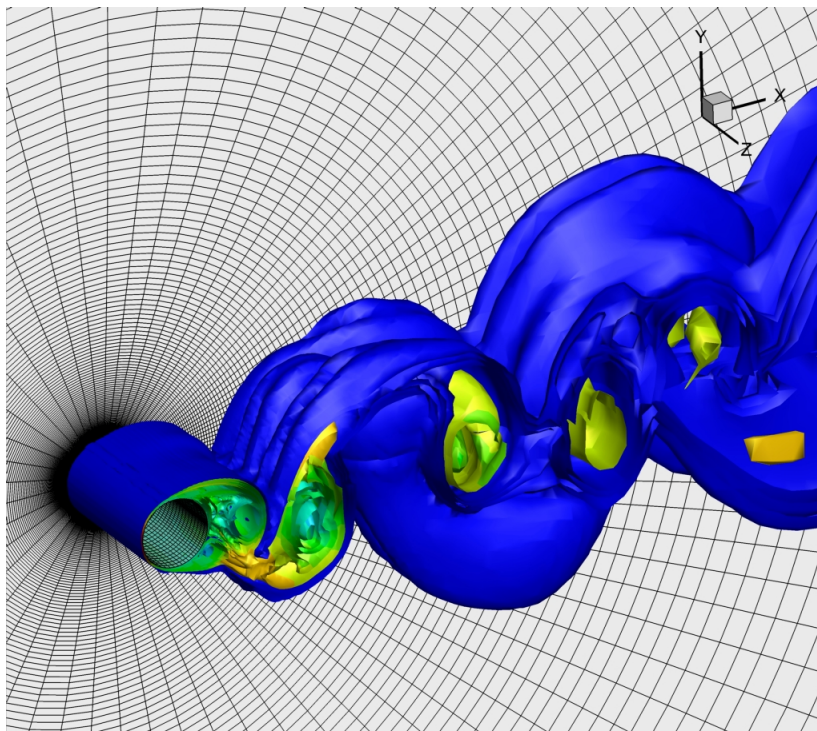
Model	URANS TNT	URANS EARSM-mod	X-LES	Experiment
St	0.197	0.215	0.212	0.215 ± 0.005

Tabulka 8.1: Vyhodnocení Strouhalova čísla pro proudění kolem válce.

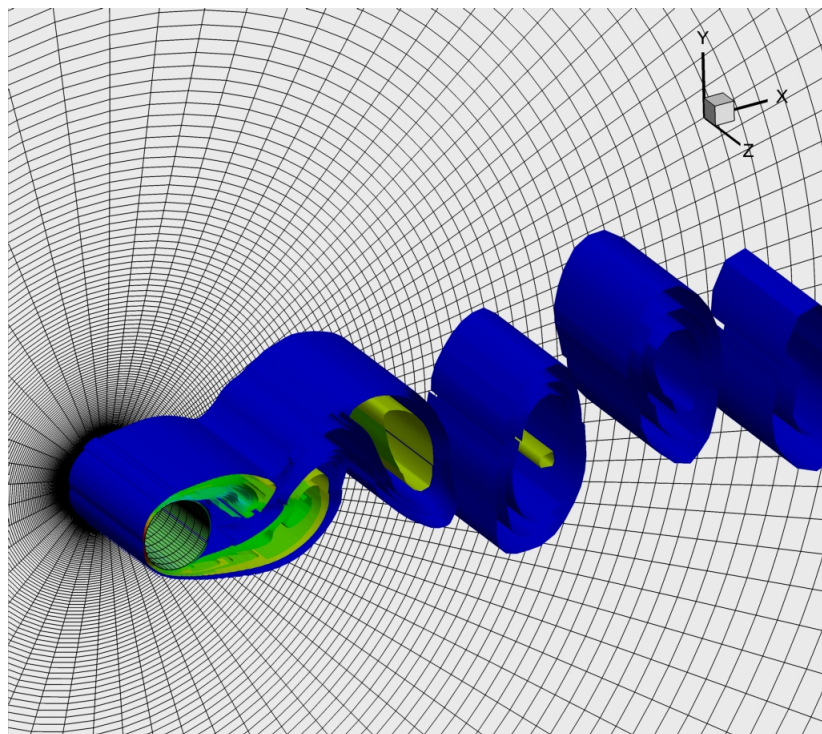
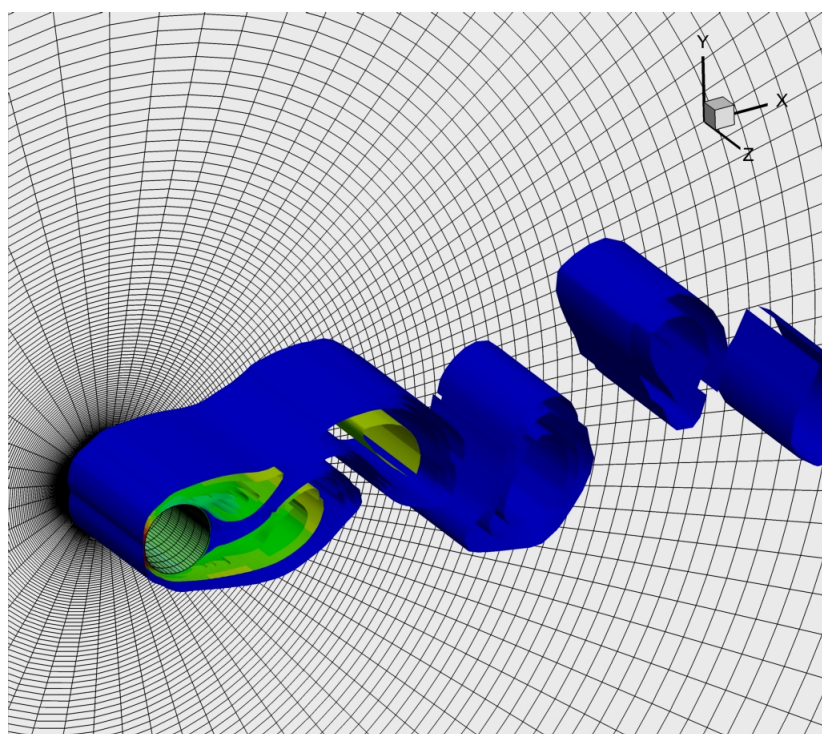
Na obrázcích 8.8, 8.9 a 8.10 jsou zobrazeny izoplochy okamžité velikosti vířivosti v čase $t = 0.001$ s. Je zřejmé, že X-LES model poskytuje oproti URANS metodám výrazně podrobnější, plně trojrozměrnou strukturu proudového pole. Sada obrázků 8.11 až 8.19 zobrazuje nestacionární charakter proudění ve třech časových okamžicích pro jednotlivé modely turbulence. Volba časových okamžiků je naznačena na obrázku 8.7. Zobrazeny jsou izočáry velikosti rychlosti v řezu $z = d$. U všech modelů lze pozorovat zachycení von Kármánovy vírové stezky, přičemž X-LES model opět poskytuje výrazně podrobnější obraz proudového pole než ostatní modely. Některé výsledky, které byly popsány v této kapitole byly publikovány v [48].

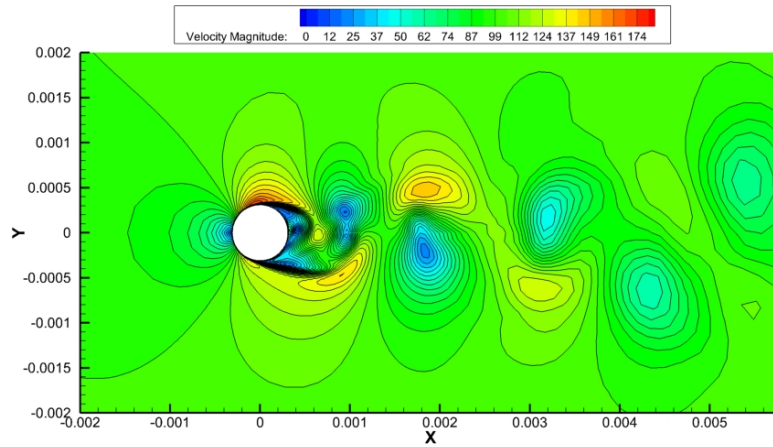


Obrázek 8.7: Znázornění vybraných časových okamžiků.

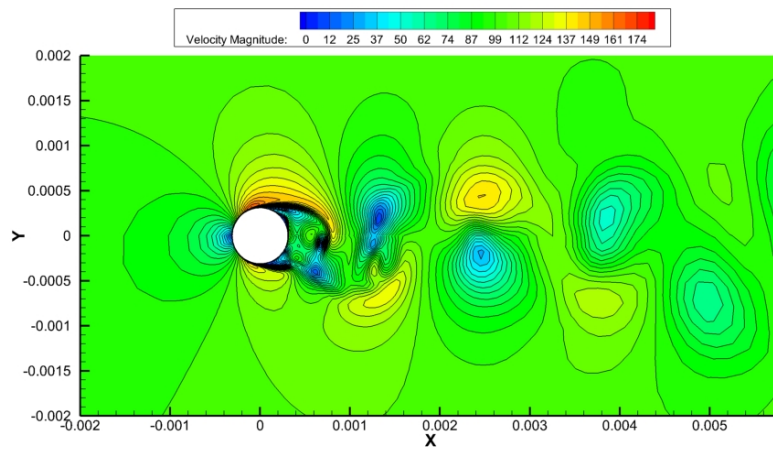


Obrázek 8.8: Izoplochy velikosti vířivosti v čase $t = 0.001$ s, X-LES model.

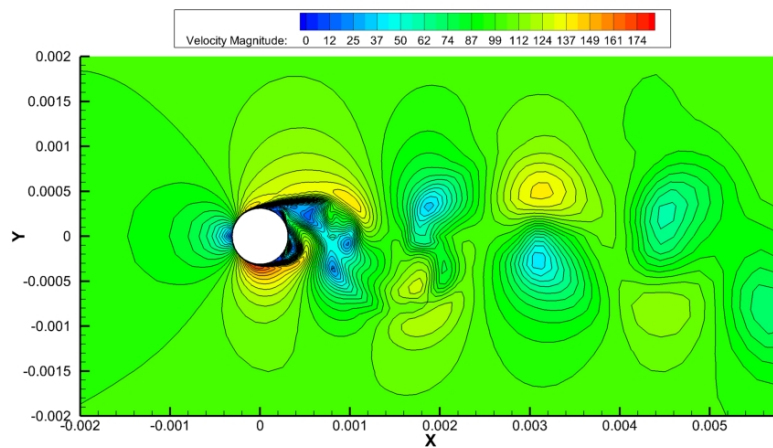
Obrázek 8.9: Izoplochy velikosti vířivosti v čase $t = 0.001s$, EARS model.Obrázek 8.10: Izoplochy velikosti vířivosti v čase $t = 0.001s$, TNT model.



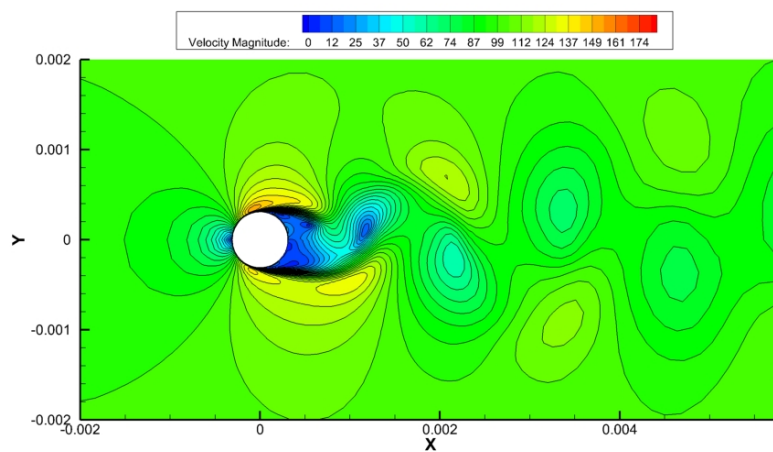
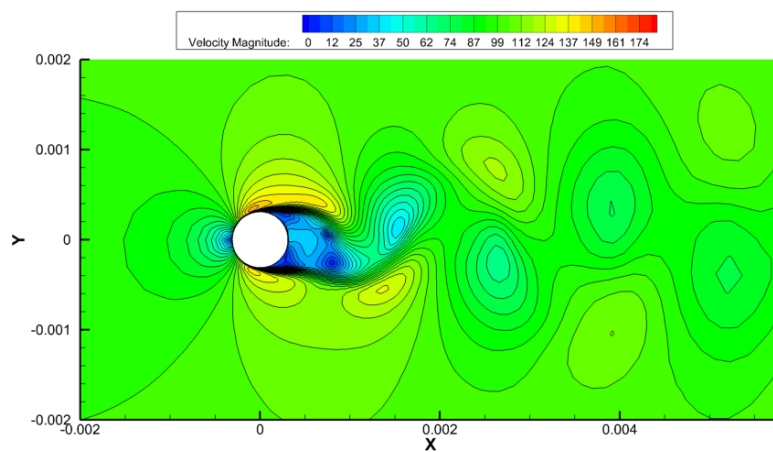
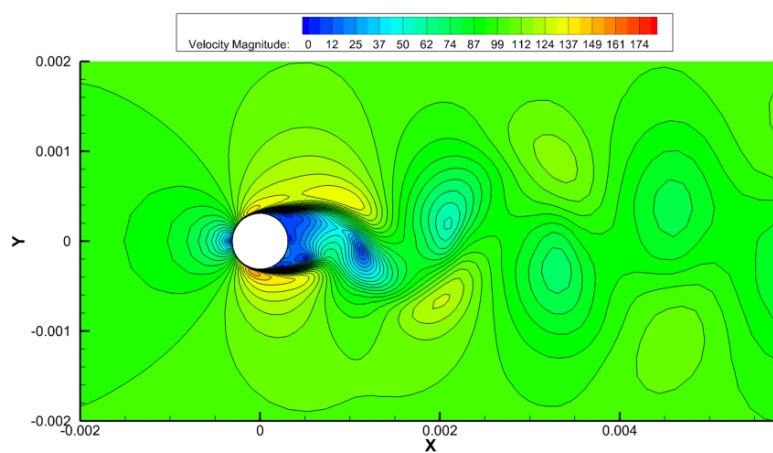
Obrázek 8.11: Rozložení velikosti rychlosti ve formě izočar v čase $t_1 = 0.000962s$, X-LES model.

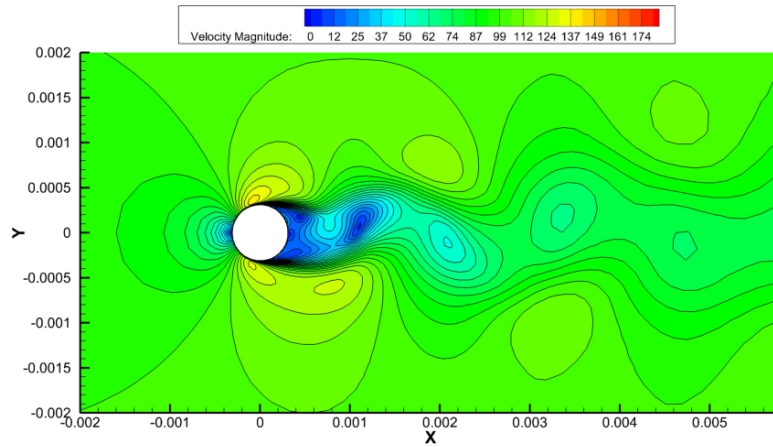


Obrázek 8.12: Rozložení velikosti rychlosti ve formě izočar v čase $t_2 = 0.0009695s$, X-LES model.

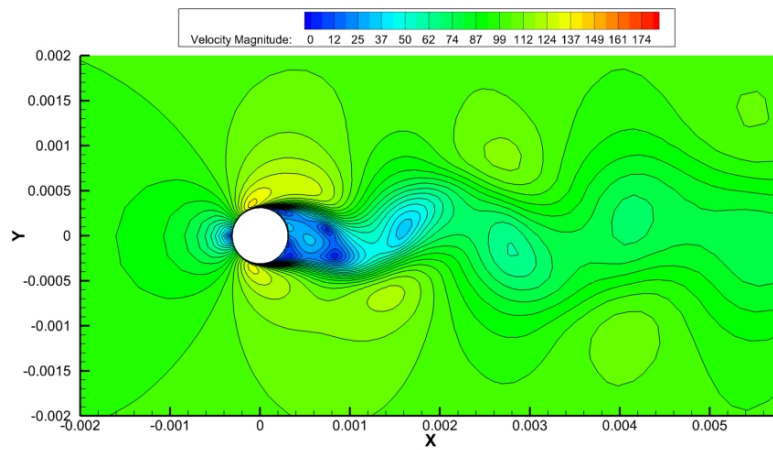


Obrázek 8.13: Rozložení velikosti rychlosti ve formě izočar v čase $t_3 = 0.000977s$, X-LES model.

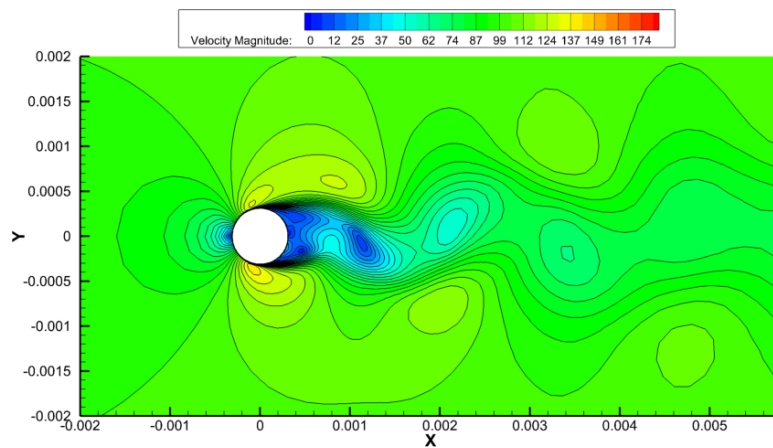
Obrázek 8.14: Rozložení velikosti rychlosti ve formě izočar v čase $t_1 = 0.000971s$, EARSM model.Obrázek 8.15: Rozložení velikosti rychlosti ve formě izočar v čase $t_2 = 0.000977s$, EARSM model.Obrázek 8.16: Rozložení velikosti rychlosti ve formě izočar v čase $t_3 = 0.0009845s$, EARSM model.



Obrázek 8.17: Rozložení velikosti rychlosti ve formě izočar v čase $t_1 = 0.000968s$, TNT model.



Obrázek 8.18: Rozložení velikosti rychlosti ve formě izočar v čase $t_2 = 0.000977s$, TNT model.



Obrázek 8.19: Rozložení velikosti rychlosti ve formě izočar v čase $t_3 = 0.0009845s$, TNT model.

Kapitola 9

Závěr

Hlavní cíl disertační práce, tedy vývoj metod pro numerické řešení turbulentního proudění stlačitelné tekutiny byl splněn. Splnění tohoto cíle bylo dosaženo v několika krocích.

Nejprve byly definovány základní matematické modely proudění stlačitelných tekutin, tzn. soustava Eulerových rovnic pro ideální (nevazké) proudění, resp. soustava Navierových-Stokesových rovnic pro reálné (vazké) proudění. Řešení stlačitelného turbulentního proudění popsaného pomocí soustavy Navierových-Stokesových rovnic nelze získat analyticky ani numericky¹. Proto jsme se v další části zabývali výběrem vhodných modelů turbulence. Pro úlohy aerodynamiky s vysokým Reynoldsovým číslem se jako optimální varianta jeví středovaná soustava Navierových-Stokesových rovnic uzavřená dvourovnicovým TNT $k - \omega$ modelem a jeho modifikacemi.

První modifikací standardního modelu je úprava produkčního členu podle Wallina, která odstraňuje neadekvátní nárůst turbulentních veličin v případech subsonického a transsonického proudění.

Další modifikací je kombinace TNT modelu s nelineárními konstitutivními vztahy EARSMM modelu Wallina a Johanssona pro vylepšení prediktivních vlastností pro komplexnější případy proudění. Hellsten ovšem ukázal, že ne každý dvourovnicový model turbulence lze pro takovou kombinaci použít. Pomocí jeho nelineární analýzy pro difuzní modelové konstanty jsme odvodili nové hodnoty modelových konstant, které jsou vhodnější pro spojení s EARSMM modelem.

Poslední modifikace TNT modelu již přesahuje model středované soustavy Navierových-Stokesových rovnic. Jedná se o Kokův X-LES model, který je hybridní metodou středované soustavy Navierových-Stokesových rovnic a simulace velkých vírů a skládá se z TNT $k - \omega$ modelu v RANS režimu a jednorovnicového SGS modelu v LES režimu. Tento model je vhodný zejména pro nestacionární úlohy. Dále jsme se zabývali volbou vhodné numerické metody. Ta je založena na metodě konečných objemů, resp. HLLC schématu pro diskretizaci nevazkých členů, které je vhodné pro numerické řešení nevazkého i vazkého proudění. Toto schéma je pouze prvního řádu přesnosti, a proto bylo použito v kombinaci s MUSCL rekonstrukcí v obecném tvaru a dále s WENO rekonstrukcí. Vazké členy byly diskretizovány pomocí centrální aproximace s pomocí duální sítě. Časovou diskretizaci jsme provedli pomocí explicitních TVD Runge-Kuttových metod.

Zvolené metody, resp. jejich implementace, byly dále otestovány na řadě případů. Nejprve byly testovány numerické metody pro nevazké proudění na dobře známém případě transsonického proudění GAMM kanálem, který byl rozšířen z dvourozměrného případu na trojrozměrný a dále na jeho dalších variantách (kanál se šikmým profilem a kanál s nekonstantní výškou profilu). Testovali jsme tři odlišné numerické metody, které jsou založeny na HLLC schématu s rekonstrukcemi MUSCL 2. řádu (značená jako MUSCL2), MUSCL 3. řádu (značená jako MUSCL3) a WENO 2. řádu (značená jako WENO). Nej kvalitnější výsledky byly dosaženy pomocí WENO metody. Pomocí MUSCL3 metody jsme dosáhli srovnatelných výsledků jako v případě metody s WENO rekonstrukcí, přičemž je tato metoda méně náročná na výpočetní čas. Uspokojující výsledky byly dosaženy i pomocí MUSCL2 metody, která byla dále použita pro řešení transsonického obtékání křídla NACA 0012, kde bylo dosaženo velmi dobrých výsledků, které jsou ve shodě s metodou WLSQR (modifikace WENO rekonstrukce) Doc. Ing. Jiřího Fůrsta, Ph.D. Posledním řešeným případem nevazkého proudění bylo transsonické proudění satorovou mříží. Plně vícerozměrná WENO rekonstrukce v tomto případě poskytuje výrazně lepší výsledky, protože výpočetní síť je silně zakřivená a jednorozměrná implementace MUSCL rekonstrukce

¹Pro vysoká Reynoldsova čísla.

již pro tyto případy není optimální.

Dále jsme testovali numerické metody pro vazké laminární proudění na úloze subsonického proudění testovacím kanálem. Obě testované metody (MUSCL3 a WENO) byly rozšířeny o centrální aproximaci vazkých členů a dosáhly výsledků, které jsou ve velmi dobré shodě se zcela odlišnou numerickou metodou, které je založena na Causonově modifikaci TVD MacCormackova schématu.

Dalším krokem bylo testování modelů turbulence na úlohách rovinného turbulentního proudění. Prvním řešeným případem bylo subsonické proudění kolem desky, kde jsme ukázaly, že použití EARSMM modelu ve standardní verzi, tzn. v kombinaci s TNT modelem, způsobuje kvalitativně odlišné průběhy rychlostních profilů v oblasti hranice mezní vrstvy. Pomocí rekalibrovaného EARSMM modelu se podařilo tento problém odstranit, přičemž výsledky jsou ve shodě s Hellstenovým modelem, který byl navržen přímo pro spojení s EARSMM vztahy. Dalším případem bylo transsonické obtékání profilu křídla RAE 2822 kde bylo pomocí rekalibrovaného EARSMM modelu dosaženo výsledků, které jsou ve velmi dobré shodě s experimentem a navíc je proti Hellstenově variantě zachycena správná pozice rázové vlny. Posledním rovinným případem bylo transsonické proudění turbínovou mříží SE 1050, kde bylo pomocí rekalibrovaného EARSMM modelu dosaženo obdobných výsledků jako se standardní verzí. Tyto výsledky jsou opět v dobré shodě s experimentem.

Nakonec byly řešeny úlohy prostorového turbulentního proudění. První úlohou byla trojrozměrná varianta transsonického proudění turbínovou mříží SE 1050, která byla řešena pomocí metody WENO a rekalibrovaného EARSMM modelu turbulence. Dosažené výsledky velmi dobře odpovídají numerickému řešení, které bylo provedeno Doc. Ing. Jiřím Fürstem, Ph.D. ve volně dostupném software OpenFOAM. Druhou řešenou úlohou bylo subsonické proudění kolem válce, které sloužilo k otestování modelů turbulence pro případ nestacionárního proudění. Testovali jsme dva URANS modely (standardní TNT model a rekalibrovaný EARSMM model) a dále hybridní X-LES model. Numerické řešení bylo získáno pomocí MUSCL3 metody. Ze získaných výsledků vyplývá, že pomocí X-LES modelu i rekalibrovaného EARSMM modelu byla dosažena velmi dobrá shoda s experimentem, ale X-LES model navíc poskytuje výrazně podrobnější, plně trojrozměrný obraz proudového pole.

Hlavní přínos této práce spočívá ve vývoji modifikací Kokova TNT modelu turbulence. Nejdůležitější je rekalibrace modelových konstant TNT modelu pro spojení s EARSMM modelem, díky které se podařilo odstranit nedostatky původní verze Wallina a Johanssona. Rekalibrovaný model dosahuje (alespoň ve vybraných případech proudění) podobných výsledků jako Hellstenův model, který byl vyvinut přímo pro spojení s EARSMM vztahy. V případě transsonického obtékání profilu křídla RAE 2822 navíc poskytuje lepší výsledky v podobě predikce správné polohy rázové vlny. Další výhodou proti Hellstenovu modelu je jeho jednoduchost, neboť neobsahuje žádné tlumící funkce, ani informaci o vzdálenosti od stěny. V současné době rekalibrovaný TNT model představuje jeden z mála dostupných dvourovňových modelů, které jsou vhodné pro spojení s EARSMM vztahy. Další důležitou modifikací TNT modelu je hybridní X-LES model, který kombinuje výhody RANS a LES přístupu k modelování turbulence a lze jej použít i na současných počítačích. V budoucnu připadá v úvahu vývoj modifikace X-LES modelu, který by v RANS regionech používal rekalibrovaný EARSMM model, čímž by se dále zlepšil jeho prediktivní potenciál.

Závěrem poznamenejme, že všechny popisované modely a numerické metody byly implementovány v podobě autorem vyvinutých programů v programovacím jazyce C++.

Literatura

- [1] Dvořák, R., Kozel, K.: Matematické modelování v aerodynamice, skriptum ČVUT FS, 1996.
- [2] Ferziger, J. H., Peric, M.: Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer, 1999.
- [3] Kozel, K.: Numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic, skriptum ČVUT FS, 2000.
- [4] Kozel, K., Fürst, J.: Numerické řešení problémů proudění I, skriptum ČVUT FS, 2001.
- [5] Fořt, J., Kozel, K., Fürst, J., Halama, J., Dobeš, J.: Numerická simulace proudění I, skriptum ČVUT FS, 2005.
- [6] Kozel, K., Louda, P., Bodnár, B., Beneš, L., Sládek, I.: Numerická simulace proudění II, skriptum ČVUT FS, 2004.
- [7] Brož, V.: Aerodynamika vysokých rychlostí, skriptum ČVUT FS, 2001.
- [8] Rektorys, K. a spolupracovníci: Přehled užití matematiky, Praha, 1973.
- [9] Holman, J.: Numerické řešení stlačitelného turbulentního proudění ve vnější a vnitřní aerodynamice, diplomová práce ČVUT FS, 2007.
- [10] Feistauer, M., Felcman, J., Straškraba, I.: Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow, Oxford University Press, 2003
- [11] Příhoda, J., Louda, P.: Matematické modelování turbulentního proudění, skriptum ČVUT FS, 2006.
- [12] Wilcox, D. C.: Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries, Inc. La Canada, California, 1994.
- [13] Kok, J. C.: Resolving the Dependence on Freestream Values for $k - \omega$ Turbulence Model, AIAA Journal, Vol. 38, No. 7, 2000.
- [14] Larsson, J.: Numerical simulation of turbulent flows for turbine blade heat transfer applications, Ph.D. these, Chalmers University of Technology, 1998.
- [15] Wallin, S.: Engineering turbulence modeling for CFD with focus on explicit algebraic Reynolds stress models, disertační práce, Royal Institute of Technology, 2000.
- [16] Hellsten, A.: New two-equation turbulence model for aerodynamics applications, Report A-21, Helsinki University of Technology, 2004.
- [17] Volavý, J.: Řešení turbulentního dvoufázového proudění metodou large eddy simulation, disertační práce VUT v Brně, 2013.
- [18] Garnier, E., Adams, N., Sagaut, P.: Large Eddy Simulation for Compressible Flows, Springer, 2009.
- [19] Boersma, B. J., Lele, S. K.: Large eddy simulation of compressible turbulent jets, Center for Turbulent Research, Annual Research Briefs, 1999.
- [20] Martin, M. P., Piomelli, U., Candler, G. V.: Subgrid-Scale Models for Compressible Large-Eddy Simulations, Theoretical and Computational Fluid Dynamics (2000), 13: 361-376.

- [21] Lesieur, M., Métais, O., Comte, P.: Large-Eddy Simulations of Turbulence, Cambridge University Press, 2005.
- [22] Galperin, B., Orszag, S. A.: Large Eddy Simulation of Complex Engineering and Geophysical Flows, Cambridge University Press, 1993.
- [23] Berselli, L. C., Iliescu, T., Layton, W. J.: Mathematics of Large Eddy Simulation of Turbulent Flows, Springer, 2010.
- [24] Davidson, L.: Fluid mechanics, turbulent flow and turbulence modeling, Chalmers University of Technology, 2014
- [25] Peng, S.-H., Haase, W.: Advances in Hybrid RANS-LES Modelling, Notes on numerical fluid mechanics and multidisciplinary design - Volume 97, Springer, 2007.
- [26] Kok, J., van der Ven, H.: Destabilizing free shear layers in X-LES using a stochastic subgrid-scale model, report no. NLR-TP-2009-327, National Aerospace Laboratory NLR, 2009.
- [27] Godlewski, E., Raviart, P. A.: Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws, New York, 1996.
- [28] LeVeque, R. J.: Numerical Methods for Conservation Laws, Basel, 1990.
- [29] LeVeque, R. J.: Finite Difference Methods for Differential Equations, University of Washington, 2005.
- [30] Batten, P., Clarke, N., Lambert, C., Causon, D. M.: On the choice of wavespeeds for the HLLC Riemann solver, SIAM J. Sci. Comput. Vol. 18, 1997.
- [31] Batten, P., Leschziner, M. A., Goldberg, U. C.: Average-State Jacobians and Implicit Methods for Compressible Viscous and Turbulent Flows, Journal of computational physics 137, 1997.
- [32] Liou, M. S.: A sequel to AUSM, Part II: AUSM⁺-up for all speeds, Journal of computational physics 214, 2006.
- [33] Liou, M. S.: Ten Years in the Making-AUSM-family, NASA/TM-2001-210977, 2001.
- [34] Fürst, J.: Moderní diferenční schémata pro řešení systému Eulerových rovnic, Diplomová práce ČVUT FJFI, 1994.
- [35] Fürst, J.: Numerické řešení transonického proudění užitím TVD a ENO schémat, Disertační práce ČVUT FS, 2000.
- [36] Fürst, J.: Numerical Solution of Compressible Flows Using TVD and ENO Finite Volume Methods, Habilitační práce ČVUT FS, 2004.
- [37] Deconinck, H., Dick E.: Computational Fluid Dynamics 2006, Springer, 2006.
- [38] Friedrich, O.: Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for the Interpolation of Mean Values on Unstructured Grids, Journal of computational physics 144, 1998.
- [39] Fürst, J.: A Finite Volume Scheme with Weighted Least Square Reconstruction, Finite volumes for complex applications IV, 2005.
- [40] Fürst, J., Kozel, K.: Second and Third Order Weighted ENO Scheme on Unstructured Meshes, Finite volumes for complex applications, 2002.
- [41] Cook, P. H., McDonald, M. A., Firmin, M. C. P.: Aerofoil RAE 2822 - pressure distributions and boundary layer and wake measurements, AGARD AR-138, 1979.
- [42] Šťastný, M., Šafařík, P.: Experimental analysis data on the transonic flow past a plane turbine cascade, ASME paper, 1990.
- [43] Šafařík, P.: Proudění vícesložkových směsí v průtočných částech strojů, Habilitační práce ČVUT FS, 1999.

-
- [44] Holman, J., Fürst, J.: Comparison of flux splitting schemes for compressible viscous flows, *Topical Problems of Fluid Dynamics* 2006, strana 67 - 70.
- [45] Holman, J., Fürst, J.: Numerical Solution of Compressible Turbulent Flows Using EARSM model, *Colloquium Fluid Dynamics* 2007, strana 27 - 28.
- [46] Holman, J., Fürst, J.: Comparison of High Order Methods for Transonic Inviscid Flows, *Colloquium Fluid Dynamics* 2008, strana 11 - 12.
- [47] Holman, J., Fürst, J.: Recalibration of TNT model for conjunction with EARSM model of turbulence, *Topical Problems of Fluid Dynamics* 2012, strana 43 - 46.
- [48] Holman, J., Fürst, J.: Numerical simulation of flow past circular cylinder using hybrid RANS-LES modelling, *Topical Problems of Fluid Dynamics* 2013, strana 27 - 28.
- [49] Holman, J., Fürst, J.: Numerical Simulation of Compressible Turbulent Flows Using Modified EARSM model, *ENUMATH 2013, Lausanne, 2013*, akceptováno pro publikaci v *Numerical Mathematics and Advanced Applications - ENUMATH 2013*, Springer, 2014.
- [50] Šimurda, D., Fürst, J., Luxa, M.: 3D Flow Past Transonic Turbine Cascade SE 1050 - Experiment and Numerical Simulations, *Journal of Thermal Science* Vol.22, No.4, 2013.
- [51] Fürst, J., Luxa, M., Šimurda, D.: The influence of the Inlet Velocity Profile of the Flow Through Prismatic Turbine Cascade, *Topical Problems of Fluid Dynamics* 2013.
- [52] White, F. M.: *Viscous fluid flow*, Second edition, McGraw-Hill, Inc., 1991.