

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STROJNÍ

DISERTAČNÍ PRÁCE



ING. ELIŠKA CÉZOVÁ

Ekonomicko-statistická optimalizace regulačních
diagramů

Ústav technické matematiky

Školitel: prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.
Předmět studia: Aplikovaná matematika

Ráda bych poděkovala svému školiteli prof. RNDr. Gejzovi Dohnalovi, CSc. za jeho pomoc a vedení při tvorbě této práce.

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně s využitím uvedených citací.
Souhlasím s použitím této práce pro studijní účely.

V Praze 20. září 2012

Ing. Eliška Cézová

Název: Ekonomicko-statistická optimalizace regulačních diagramů

Autorka: Ing. Eliška Cézová

Ústav: Ústav technické matematiky

Školitel: prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

Anotace: Hlavním cílem této práce je studium postupů a algoritmů vhodných pro ekonomicko-statistickou optimalizaci regulačních diagramů. Je zde navržen a podrobně rozebrán návrh nového typu zónového regulačního diagramu. Vedle toho se práce soustřeďuje na otázku výběru vhodného regulačního diagramu v praxi nejenom na základě jeho matematicko-statistických vlastností, ale též s přihlédnutím k ekonomické stránce jeho nasazení v praxi. Pozornost je též věnována metodám numerického řešení problémů ekonomicko-statistické optimalizace regulačních diagramů.

Klíčová slova: regulační diagram, optimalizace, ekonomicko-statistická optimalizace, SPC, ARL, CUSUM, EWMA, Shewhartův regulační diagram, zónový regulační diagram, ekonomicko-statistický model s údržbou, ekonomicko-statistický model bez údržby, scénář.

Annotation: The main objective of this thesis is the study of methods and algorithms suitable for optimizing economic and statistical control chart. New type of zone control chart is designed and its properties analyzed. Moreover, the work focuses on the issue of selecting the appropriate control chart in practice, which is based not only on its mathematical and statistical characteristics, but also take into account the economics of deployment. Attention is also paid to the numerical methods of solving the problems of economical and statistical optimization of control charts.

Keywords: control chart, optimization, optimization of economics statistics, SPC, ARL, CUSUM, EWMA, Shewhart of control chart, control chart zone, economics statistics model with maintenance, economics statistics model without maintenance, scenario.

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Vymezení cílů disertace	2
2	Současný stav studované problematiky	4
2.1	Základní pojmy	5
2.2	Návrh regulačního diagramu	10
2.3	Statistická regulace procesu	12
2.4	Regulační diagramy	14
3	Ekonomicko-statistická optimalizace regulačních diagramů	30
3.1	Statistický přístup	31
3.2	Ekonomický přístup	48
3.3	Ekonomicko-statistické modely bez údržby	50
3.4	Ekonomicko-statistické modely s údržbou	60
4	Návrh a analýza vlastností nového zónového regulačního diagramu	72
4.1	Pravidlo <i>I</i> pro nově navržený zónový regulační diagram	74
4.2	Pravidlo <i>II</i> pro nově navržený zónový regulační diagram	82
4.3	Srovnání účinnosti různých typů regulačních diagramů	84

4.4	Ekonomicko-statistická optimalizace různých typů regulačních diagramů bez modelu údržby	86
4.5	Návrh nového typu zónového regulačního diagramu s proměnlivým skóre podle pravidla I	88
Závěr		91
5.1	Přínos a využitelnost navržených metod	91
5.2	Splnění cílů disertační práce	92
5.3	Možnosti směřování dalšího rozvoje	92
Přílohy		93
	Příloha 1. Náhodná procházka	93
	Příloha 2. Náhodné procesy	96
	Příloha 3. Testování statistických hypotéz	99
	Příloha 4. Věrohodnostní poměr sekvenčního testování	102
	Příloha 5. Aproximace $E_0\tau$ a $E_1\tau$ pro metodu CUSUM	106
	Příloha 6. Kódy programů v jazyce Matlab a R	107
Literatura		148
	Seznam publikací autorky	148
	Seznam použité literatury	149

Seznam zkratek

SQC (Statistical Quality Control) - statistické řízení kvality

QC (Quality Control) - řízení kvality

ASQ (American Society for Quality) - Americká společnost pro kvalitu

SPC (Statistical Process Control) - statistické řízení procesů

ARL (Average Run Length) - průměrná délka běhu procesu

ARL_0 - střední počet inspekci, je-li proces ve stavu pod statistickou kontrolou

ARL_δ - střední počet inspekci, je-li proces ve stavu mimo statistickou kontrolu

ATS (Average Time to Signal) - průměrná doba do vyslání signálu

ADEL (Average DELay) - průměrné zpoždění detekce (průměrný počet inspekci od vzniku poruchy do vyslání signálu)

MDEL (Median DELay) - medián zpoždění detekce

MTBFR - střední doba mezi falešnými signály

RD - regulační diagram

EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) - regulační diagram exponenciálně vážených klouzavých průměrů

CUSUM (CUmulative SUM) - regulační diagram založený na kumulativních součtech

CL (Central Line) - centrální příčka

UCL (Upper Control Limit) - horní regulační mez

LCL (Lower Control Limit) - dolní regulační mez

UWL (Upper Warning Limit) - horní výstražná mez

LWL (Lower Warning Limit) - dolní výstražná mez

$X(\omega, t)$ - náhodný proces v čase t (zkrácený zápis $X(t)$)

ω - náhodný vliv

δ_0 - velikost cílové hodnoty

δ - velikost posunu střední hodnoty procesu (od cílové úrovně)

$\tilde{\delta}$ - velikost posunu omezeného růstu střední hodnoty procesu

τ - okamžik detekování zjistitelné příčiny regulačním diagramem

H_S - rozhodovací hranice (mez) pro metodu Shewhart

H_C - rozhodovací hranice (mez) pro metodu CUSUM

H_E - rozhodovací hranice (mez) pro metodu EWMA

κ - referenční hodnota (dovolená odchylka) pro metodu CUSUM

$C(s, t)$ - kovarianční funkce

$R(s, t)$ - korelační funkce

$Var(X(t))$ - rozptyl v procesu $X(t)$

E - jednotková matice

$\vec{\pi}^0$ - vektor počátečního rozdělení markovského řetězce

\vec{e} - vektor samých jedniček

p - pravděpodobnost, že sledovaná veličina bude v oblasti mezi varovnými mezemi

q - pravděpodobnost, že sledovaná veličina bude v oblasti mezi varovnými a regulačními mezemi

H_0 - nulová hypotéza

H_1 - alternativní hypotéza

$f_0(x)$ - hustota za nulové hypotézy

$f_1(x)$ - hustota za alternativní hypotézy

$P(n)$ - matice pravděpodobností přechodů

$p_{ij}(n)$ - pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j

C_n - kumulovaný součet pozorování pro metodu lineární CUSUM

C_n^+ - kumulovaný součet pozorování pro metodu lineární CUSUM v případě stoupajícího posunu

C_n^- - kumulovaný součet pozorování pro metodu lineární CUSUM v případě klesajícího posunu

C_0 - startovací hodnota pro metodu lineární CUSUM

A, B - rozhodovací konstanty (meze) pro Waldův sekvenční postup

A^*, B^* - aproximace rozhodovacích konstant (mezí) pro Waldův sekvenční postup

c_α - rozhodovací konstanta (mez) pro Neymanův-Pearsonův test

- P_0 - pravděpodobnostní míra rozdělení pravděpodobnosti s hustotou f_0 pro Waldův sekvenční postup
- P_1 - pravděpodobnostní míra rozdělení pravděpodobnosti s hustotou f_1 pro Waldův sekvenční postup
- B_1 - konstanta určující polohu regulační meze pro Shewhartův postup
- B_2 - konstanta určující polohu varovné meze pro Shewhartův postup
- Φ - distribuční funkce standardního normálního rozdělení ($X \sim N(0, 1)P(X \leq x) = \Phi(x)$)
- $\Phi^{-1}(t)$ - kvantilová funkce standardního normálního rozdělení ($\Phi^{-1}(t) = \inf\{x | \Phi(x) \geq t\}$) $f^{Tr}(t; m_p)$ - hustota useknutého rozdělení doby do poruchy na intervalu $\langle 0, m_p h \rangle$ [-]
- p_i^I - pravděpodobnost, že délka běhu pod statistickou kontrolou je rovna i [-]
- p_i^O - pravděpodobnost, že délka běhu mimo statistickou kontrolu je rovna i [-]
- $F(t)$ - distribuční funkce doby do poruchy [-]
- $f(t)$ - hustota rozdělení pravděpodobnosti doby do poruchy [-]
- [-] - bezrozměrná hodnota
- iid* - nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny
- x_1, x_2, \dots respektive w_1, w_2, \dots - napozorované (naměřené, regulované, sledované) hodnoty
- $x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,m}$ - několik měření při jedné inspekci
- m_i - střední doba do absorpce ve stavu i
- S_i - stavy procesu
- σ - směrodatná odchylka (parametr variability) [-]
- k - šířka regulačních mezí (v násobcích směrodatné odchylky) [-]
- h - doba mezi inspekcemi (inspekční interval, doba mezi inspekcemi) [h]
- m - rozsah výběru vzorku při jedné inspekci (počet měření v rámci jedné inspekce) [-]
- λ - intenzita poruch za jednotku času [h^{-1}]
- ν - okamžik, kdy nastane zjizitelná příčina (doba mezi výskytem zjizitelné příčiny a předchozím vzorkem před zjizitelnou příčinou) [h]
- s - předpokládaný počet inspekci do výskytu zjizitelné příčiny [-]

L - celková ztrátová funkce (celkové náklady za jednotku času) [Kč/h]
 m_p - počet vzorků před plánovanou údržbou (počet odběrů do plánované údržby, která se provede v $(m_p + 1)$ -ním intervalu [ks]
 T - celková doba jednoho cyklu procesu obnovy [h]
 T_{In} - doba procesu pod statistickou kontrolou [h]
 T_{Out} - doba procesu mimo statistickou kontrolu [h]
 T_O - relativní doba setrvání procesu mimo statistickou kontrolu [h]
 T_I - relativní doba setrvání procesu pod statistickou kontrolou [h]
 T_g - doba potřebná k zakreslení a výpočtu standardních testů jednoho výsledku při inspekci, je-li proces mimo statistickou kontrolu [h]
 T_{gn} - doba potřebná k zakreslení a výpočtu standardních testů m vzorků, je-li proces mimo statistickou kontrolu [h]
 T_d - doba od s -té inspekce do m -té inspekce při níž dochází k posunu [h]
 T_C - doba na určení a provedení náhradní údržby [h]
 T_P - doba na určení a provedení plánované údržby [h]
 T_R - doba na určení a provedení reaktivní údržby [h]
 T_f - doba na vyhledání falešného signálu [h]
 T_z - doba na vyhledání zjistitelné příčiny [h]
 T_r - doba na odstranění zjistitelné příčiny [h]
 C - celkové očekávané náklady za jeden cyklus procesu obnovy [Kč]
 C_I - náklady na kvalitu za hodinu procesu ve stavu pod statistickou kontrolou [Kč]
 C_O - náklady na kvalitu za hodinu procesu ve stavu mimo statistickou kontrolu [Kč]
 C_F - fixní náklady spojené s odběrem vzorků a zaznamenání dat do RD, které nezávisí na rozsahu výběru [Kč]
 C_V - variabilní náklady spojené s odběrem vzorků a zaznamenání dat do RD, které závisí na rozsahu výběru vzorku [Kč]
 C_s - náklady na jednu inspekci [Kč]
 C_f - náklady na vyhledání falešného signálu [Kč]
 C_z - náklady na vyhledání zjistitelné příčiny (poruchy v procesu) [Kč]
 C_r - náklady na odstranění zjistitelné příčiny [Kč]

C_{zr} - náklady na vyhledání a odstranění zjistitelné příčiny [Kč]

C_Q - očekávané náklady na kvalitu za cyklus [Kč]

C_S - očekávané náklady na odběr vzorků za cyklus [Kč]

C_D - očekávané náklady na detekci a odstranění zjistitelné příčiny [Kč]

$\gamma_r = 1$, jestliže proces pokračuje během opravy v ostatních případech 0 [-]

$\gamma_z = 1$, jestliže proces pokračuje během vyhledání zjistitelné příčiny v ostatních případech 0 [-]

$\gamma_R = 1$, jestliže proces pokračuje během reaktivní údržby v ostatních případech 0 [-]

$\gamma_P = 1$, jestliže proces pokračuje během plánované údržby v ostatních případech 0 [-]

$\gamma_C = 1$, jestliže proces pokračuje během náhradní údržby v ostatních případech 0 [-]

Seznam obrázků

- Obr. 2.1: Systém zajištění kvality, statistické řízení procesů SPC.
- Obr. 2.2: Regulační cyklus procesu.
- Obr. 2.3: Rozdělení regulačních diagramů.
- Obr. 2.4: Shewhartův regulační diagram pro $CL \equiv \delta_0 = 50$ a $\sigma = 0.5$.
- Obr. 2.5: Shewhartův regulační diagram rozšířený o výstražné meze pro $B_1 = 3$ a $B_2 = 2$.
- Obr. 2.6: Hustota normálního rozdělení pro Shewhartův regulační diagram rozšířený o výstražné meze pro $B_1 = 3$ a $B_2 = 2$.
- Obr. 2.7: Stavby Shewhartova regulačního diagramu.
- Obr. 2.8: Regulační diagram CUSUM (pomocí V-masky).
- Obr. 2.9: Regulační diagram CUSUM.
- Obr. 2.10: Regulační diagram EWMA.
- Obr. 2.11: Zónový regulační diagram.
- Obr. 2.12: Graf pravděpodobností přechodů mezi vybranými stavy markovského řetězce odpovídajícího zónovému regulačnímu diagramu. Zobrazeny jsou přechody odpovídající prvním pěti řádkům matice z Tab. 2.2.
- Obr. 3.1: Funkce $ARL_{\delta+}$ zobrazuje jednostrannou metodu Shewhartova diagramu, kde detekujeme pozitivní posun ve střední hodnotě normálního rozdělení, kde $b = 3\sigma$.
- Obr. 3.2: Funkce ARL_{δ} oboustranného Shewhartova regulačního diagramu detekujícího libovolný posun ve střední hodnotě normálního rozdělení, kde jsme zvolili $b = 3\sigma$.
- Obr. 3.3: Příklad chování posloupností \tilde{S}_n .
- Obr. 3.4: Příklad chování posloupností \tilde{g}_n .
- Obr. 3.5: V-masky regulačního diagramu CUSUM.
- Obr. 3.6: Nastavení parametrů pro metodu CUSUM s pravděpodobnostmi chyb α a β .
- Obr. 3.7: Celková délka cyklu procesu.
- Obr. 3.8: Délka cyklu procesu pro základní ekonomicko-statistický model bez údržby.
- Obr. 3.9: Průběh ztrátové funkce základního ekonomicko-statistického modelu bez údržby pro různé hodnoty rozsahu výběru $m = 4$, $m = 5$ a $m = 6$.
- Obr. 3.10: Délka cyklu procesu pro rozšířený ekonomicko-statistický model bez údržby.

- Obr. 3.11: Průběh ztrátové funkce v rozšířeném ekonomicko-statistickém modelu bez údržby pro hodnotu rozsahu výběru $m = 5$.
- Obr. 3.12: Základní ekonomicko-statistický model s údržbou.
- Obr. 3.13: Scénář (S_1) (detekování procesu mimo kontrolu).
- Obr. 3.14: Scénář (S_2) (nedetekování procesu mimo kontrolu).
- Obr. 3.15: Scénář (S_3) (proces pod kontrolou před plánovanou údržbou).
- Obr. 3.16: Průběh ztrátové funkce pro základní ekonomicko-statistický model s údržbou pro hodnotu rozsahu výběru $m = 5$.
- Obr. 3.17: Průběh ztrátové funkce pro základní ekonomicko-statistický model s údržbou pro hodnotu šířky regulačních mezí $k = 3.024$.
- Obr. 3.18: Rozšířený ekonomicko-statistický model s údržbou.
- Obr. 3.19: Průběh ztrátové funkce pro rozšířený ekonomicko-statistický model pro hodnotu rozsahu výběru $m = 5$.
- Obr. 4.1: Návrh nového zónového regulačního diagramu se skóry 0, 1, 2, 4.
- Obr. 4.2: Zónový regulační diagram pro pravidlo I a II .
- Obr. 4.3: Srovnání různých typů regulačních diagramů pomocí ARL_δ s nově navrženým zónovým regulačním diagramem.
- Obr. 4.4: Detail srovnání různých typů regulačních diagramů pomocí ARL_δ v rozmezí δ (2, 4).
- Obr. 4.5: Ekonomicko-statistická optimalizace různých typů regulačních diagramů podle rozšířeného ekonomicko-statistického modelu bez údržby.
- Obr. 4.6: Histogram času do absorpce, který byl tvořen z 1000 simulací.
- Obr. 4.7: Simulace vývoje skóre pro čas z intervalu (0, 2000).
- Obr. 4.8: Simulace do času absorpce z Obr. 4.7.

Seznam tabulek

- Tab. 2.1: Matice pravděpodobností přechodů Shewhartova regulačního diagramu s vavrovými mezemi
- Tab. 2.2: Výřez matice pravděpodobností přechodů pro přechodné stavy zónového regulačního diagramu
- Tab. 2.3: Označení pravděpodobností zón zónového regulačního diagramu
- Tab. 2.4: Výřez matice, která reprezentuje graf přechodů mezi přechodovými stavy markovského řetězce popisující zónový regulační diagram
- Tab. 3.1: Hodnoty $ARL_{\delta+}$ pro jednostranný Shewhartův regulační diagram detekující pozitivní (kladný) posun ve střední hodnotě normálního rozdělení, kde $b = 3\sigma$.
- Tab. 3.2: Hodnoty ARL pro oboustranný Shewhartův regulační diagram detekující posun ve střední hodnotě normálního rozdělení, kde volíme $b = 3\sigma$.
- Tab. 3.3: Hodnoty funkce ARL jednostranné metody CUSUM pro detekování pozitivního posunu je ve střední hodnotě normálního rozdělení s rozptylem $\sigma^2 = 1$ pro vybrané hodnoty parametrů κ, H_C .
- Tab. 3.4: Hodnoty funkce ARL oboustranné metody CUSUM pro detekování libovolného posunu ve střední hodnotě normálního rozdělení s rozptylem $\sigma^2 = 1$ pro vybrané parametry κ, H_C .
- Tab. 3.5: Hodnoty funkce ARL oboustranné metody EWMA pro detekování libovolného posunu ve střední hodnotě normálního rozdělení s rozptylem $\sigma^2 = 1$ pro vybrané hodnoty V, λ, δ (převzato z Crowder (1987)).
- Tab. 3.6: Minimalizovaná ztrátová funkce (L) za hodinu procesu při optimalizovaných proměnných mezi něž patří rozsah výběru m , doba mezi jednotlivými inspekcemi h a šířka regulačních mezí k pro základní ekonomicko-statistický model bez údržby.
- Tab. 3.7: Minimalizovaná ztrátová funkce (L) za hodinu procesu při optimalizovaných proměnných mezi něž patří rozsah výběru m , doba mezi jednotlivými inspekcemi h a šířka regulačních mezí k pro rozšířený ekonomicko-statistický model bez údržby, viz [53].
- Tab. 4.1: Označení pravděpodobností zón nového zónového regulačního diagramu.
- Tab. 4.2: Výřez matice pravděpodobností přechodů návrhu nového zónového regulačního diagramu pro hodnoty skóru 0, 1, 2, 3, kterou označíme P_I .
- Tab. 4.3: Výřez matice pravděpodobností přechodů návrhu nového zónového regulačního diagramu pro hodnoty skóru 0, 1, 2, 3, kterou označíme P_{II} .
- Tab. 4.4: Výřez matice pravděpodobností přechodů návrhu nového zónového regulačního diagramu pro hodnoty skóru 0, 1, 2, 4, kterou označíme P_{III} .

- Tab. 4.5: Výřez matice pravděpodobností přechodů návrhu nového zónového regulačního diagramu pro hodnoty skóru 0, 1, 2, 3, kterou označíme P_{IV} .
- Tab. 4.6: Srovnání nově navrženého zónového regulačního diagramu s různými hodnotami skóru při pevném nastavení regulačních mezí.
- Tab. 4.7: Srovnání nově navrženého zónového regulačního diagramu s různými hodnotami skóru při počátečním nastavení $ARL_0 = 370$.
- Tab. 4.8: Výřez matice pravděpodobností přechodů návrhu nového zónového regulačního diagramu pro hodnoty skóru 0, 1, 2, 4, kterou označíme P_V .
- Tab. 4.9: Výřez matice pravděpodobností přechodů návrhu nového zónového regulačního diagramu pro hodnoty skóru 0, 1, 2, 4, kterou označíme P_{VI} .
- Tab. 4.10: Nově navržený zónový regulační diagram se skóry 0, 1, 2, 4 při počátečním nastavení $ARL_0 = 370$ pro pravidlo I .
- Tab. 4.11: Srovnání nově navrženého zónového regulačního diagramu s různými typy regulačních diagramů při počátečním nastavení $ARL_0 = 370$ pro hodnoty ARL_δ .
- Tab. 4.12: Ekonomicko-statistická optimalizace různých typů regulačních diagramů podle rozšířeného ekonomicko-statistického modelu bez údržby.

Kapitola 1

Úvod

Statistická regulace procesu je významným nástrojem pro zlepšování kvality výrobků a služeb. Základní kameny statistické regulace procesu byly položeny Walterem Shewhartem ve 20. a 30. letech dvacátého století. Postupem času došlo k mnoha vylepšením regulačních diagramů, byly zavedeny nové regulační diagramy jako je CUSUM a EWMA, které umožňovaly včasnější detekci využitím více než jednoho pozorování. Byly zavedeny pomocné varovné meze. Dalším vylepšením ve statistické regulaci procesu bylo zavedení výpočetní techniky. Dříve se kontrolní vzorky odebíraly v relativně dlouhých časových intervalech a bylo velice obtížné získat kvalitní data, natož je efektivně analyzovat. V současné době se zkrátil časový interval v odebrání vzorků na minutu či dokonce i sekundu. To však klade zcela jiné nároky na analýzu měření a časovou náročnost prováděných výpočtů a jejich vyhodnocení.

Stabilita výrobního procesu je zajišťována průběžným sledováním procesu, vyhodnocováním naměřených hodnot sledovaných parametrů, včasnou nápravou objevených neshod a zejména účinnou preventivní údržbou. Stabilní proces, který realizuje produkt, či službu v požadované kvalitě má významný vliv na důvěru zákazníka a image firmy. Ztráta důvěry zákazníka, může vést až k zastavení výroby daného produktu. Proto se ve své práci budu zabývat metodami, které při svém uplatnění mají vliv na kontinuální zlepšování sledovaného procesu (metody SPC) a zvyšování konkurenceschopnosti produktu (ekonomicko-statistická optimalizace SPC).

U některých firem je i v dnešní době problém prosadit statistické metody do výroby, protože ne každá firma má dostatek volných peněžních zdrojů, aby si mohla pořídit drahý statistický software. Kvůli finanční situaci se výrobní společnosti dostanou pouze k základním statistickým metodám, při jejichž aplikaci se často používá obecný, ne statisticky zaměřený software (například MS Excel), který může být pro dané účely nevhodný. Vhodnější software jako je například Statistica, Minitab, QC Expert, Statgraphics a jiné je však finančně nákladnější a vyžaduje speciální znalosti obsluhy. Významnou bariérou pro statistické vyhodnocování je tedy nejen software, ale i nedostatečně vyškolení zaměstnanci bez hlubších znalostí statistiky, kteří neumí vyhodnocovat naměřené údaje. Jsou to pro ně pouhá čísla (naměřené hodnoty), „nutné zlo“ s kterým musí pracovat.

Takoví pracovníci neshledávají závažný problém v neshodách typu: špatně vyplněný či nečitelný nebo i vymyšlený záznam, špatný odečet z měřidla, měření s nedostatečnou přesností, nedodržování časových harmonogramů stanovených pro měření, použití nekalibrovaných měřidel, nesprávné použití statistických metod a nesprávné interpretace výsledků, viz [2]. U regulačních diagramů snadno dojde ke zkreslení výsledku kvůli odlehklým hodnotám. V tomto případě je vhodnější používat interval spolehlivosti, v němž skutečná hodnota leží s velkou pravděpodobností s předem danou spolehlivostí, než pouze bodový odhad. Nejobtížnějším krokem v zavádění statistických metod do výroby je nutnost přesvědčit vedení, že investice do statistických metod je rentabilní. Provádí-li se kontrola kvality výrobků až po jejich vyrobění a není-li výrobek vyhovující, jsou náklady na výrobu vynaloženy zbytečně. Prevencí k předcházení vynakládání zbytečných prostředků může být například i to, že neustále získáváme informace o chování výrobního procesu, a snažíme se působit na výrobní proces tak, aby výrobky měly požadované vlastnosti. Preventivním nástrojem řízení kvality je statistická regulace procesu, která včas odhaluje významné odchylky od stanovené úrovně vybraného znaku a udržuje proces dlouhodobě na požadované a stabilní úrovni. Pomocí regulačních diagramů sledujeme kvalitu výrobního procesu.

1.1 Vymezení cílů disertace

Aplikace regulačního diagramu má své nesporné výhody ve snižování nákladů, ale v současné praxi se používá spíše s rozpaky, neboť efektivita zaváděných metod často nespĺňuje představy vedení firem. Cílem této práce bylo rozvinout a najít nové metody pro ekonomicko-statistickou optimalizaci regulačních diagramů, která by měla zajistit, že náklady na SPC budou minimální.

Cílem disertační práce byla ekonomicko-statistická optimalizace jak stávajících základních typů regulačních diagramů mezi něž patří Shewhartův regulační diagram, regulační diagram CUSUM, regulační diagram EWMA a zónový regulační diagram, tak návrh nových metod pro zónový regulační diagram. Jedním z cílů byla analýza ekonomicko-statistických modelů, které byly používány od roku 1956 a v dalších letech byly rozšířeny o vliv různých typů údržby, které umožňují komplexnější ekonomicko-statistickou optimalizaci. Dalším cílem bylo nasimulovat reálný problém v praxi nejen pro různé typy regulačních diagramů, ale i pro nově navrženou metodiku zónového regulačního diagramu. Jelikož ekonomicko-statistická optimalizace nemůže být prováděna bez využití počítačů, byla tato optimalizace provedena pomocí simulace za použití programů MATLAB a R.

Používáme-li při výrobě statistické řízení procesů, sledujeme i kalkulaci všech nákladů. Tyto se snažíme optimalizovat, aby případné ztráty při výrobě byly co nejmenší. Zdroje ztrát mohou vznikat například zavedením špatného regulačního diagramu nebo též nedodržením předpokladů nasazeného regulačního diagramu v nesprávných podmínkách. Potenciální zdroj úspor lze zajistit správným výběrem typu regulačního diagramu a jeho aplikací. Vybereme-li správný typ regulačního diagramu, musíme nastavit parametry tak, aby byly optimální z hlediska výrobního procesu.

V praxi prozatím nejsou doceněny zónové regulační diagramy, které mají řadu výhod jak z hlediska aplikace v automatických systémech tak i z hlediska snadného pochopení obsluhou výrobních linek. Zónový regulační diagram, tak jak je uváděn v literatuře, je nevyhovující ve srovnání z hlediska jeho statistických vlastností spolu s ostatními typy regulačních diagramů. Jedním z cílů této práce bylo navrhnout nový typ zónového regulačního diagramu tak, aby byl srovnatelný s regulačním diagramem CUSUM či regulačním diagramem EWMA.

Kapitola 2

Současný stav studované problematiky

Statistické řízení procesů je předmětem zájmu velkého množství autorů už od třicátých let minulého století, kdy vyšly první práce W. Shewharta, viz [72], [81], ve kterých představil svůj regulační diagram. Jeho nadčasový návrh komentoval po šedesáti letech v roce 1993 W. A. Deming slovy: „*The Shewhart control charts do a good job under a wide range of conditions. No one has yet wrought improvement*“, viz [83]. Z hlediska praktických aplikací je toto dvacet let staré tvrzení stále pravdivé. Ne, že by od té doby nevznikly desítky nových typů regulačních diagramů a stovky jejich modifikací, ale v praktických aplikacích naprosto převažuje regulační diagram Shewhartova typu. Tuto situaci vystihuje další citát z práce, viz [23]: „*There are a few areas of statistical application with a wider gap between methodological development and application than is seen in statistical process control.*“

K opravdu významným krokům ve vývoji regulačních diagramů došlo až po druhé světové válce. V padesátých letech, kdy docházelo k širokému obnovení průmyslové výroby a k velkému rozmachu zbrojního průmyslu, byl stále větší důraz kladen na sledování kvality. V letech 1954 E. S. Page, viz [61] a [62] zavedl regulační diagram založený na kumulativních součtech hodnot sledované veličiny, spočtených ze všech pozorovaných hodnot od začátku procesu. To byl významný rozdíl od Shewhartova návrhu, využívajícím v každém kroku pouze aktuální pozorování. Tento takzvaný CUSUM diagram je v současnosti vedle Shewhartova regulačního diagramu druhým nejrozšířenějším diagramem v průmyslových aplikacích. V roce 1956 vydala firma Western Electric Company svůj Handbook, viz [81], který doplňuje Shewhartovo detekční schéma o takzvaná „Dodatečná pravidla“ (Supplementary run rules), reagující na možné porušení normality nikoli pouhým vybočením mimo regulační meze, ale také na základě tvaru trajektorie sledovaného procesu. Tato pravidla se později stala motivací ke vzniku zónových regulačních diagramů, které zavedl J. H. Reynolds v roce 1971, viz [67]. Všechny tyto regulační diagramy předpokládají posloupnost nezávislých pozorování v čase.

Případné závislosti by měl eliminovat další typ regulačního diagramu, diagram exponenciálně vážených průměrů (Exponentially Weighted Moving Averages, EWMA), zavedený v roce 1959 S.W. Robertsem, viz [68]. V sedmdesátých letech byly možnosti regulačních diagramů rozšířeny o celou paletu vícerozměrných verzí založených na různých mírách vzdálenosti, z nichž jmenujme alespoň Hottellingovu, viz [55] a Mahalanobisovu vzdálenost, viz [55]. Tak vznikly regulační diagramy typu T^2 , viz [42], [55], [82], MEWMA, viz [60], [63], [77], [87], MCUSUM, viz [43], [52], [77], [82] a řada dalších.

Snahy o optimalizaci regulačních diagramů se objevují již od jejich vzniku ve třicátých letech, nicméně i zde hlavní práce pocházejí z let padesátých. V oblasti ekonomicko-statistické optimalizace je nejčastěji citovaný model A. J. Duncana, viz [33] z roku 1956 a jeho zobecnění, viz [51] z roku 1986 pocházející od T. J. Lorenze a L. C. Vance.

V současné době je k dispozici řada knih o této problematice, z nichž jmenujme především knihu D. C. Montgomeryho, viz [55], která vyšla od roku 1996 už v sedmém vydání v roce 2012.

2.1 Základní pojmy

V této kapitole si uvedeme některé základní pojmy z oblasti řízení kvality, která s danou problematikou velice úzce souvisí. Mezi klíčové pojmy v tomto smyslu patří proces, kvalita, statistické řízení kvality, viz [20], [21].

Proces (z lat., postup, pochod, vývoj) je obecné označení pro postupné děje, respektive pro posloupnosti stavů nějakého systému. Označení proces se nepoužívá pro děje náhlé nebo zcela chaotické. Pojem proces má mnoho různých definic, lišících se od sebe jak dobou svého vzniku, tak i úhlem pohledu autora. V této práci budeme rozlišovat dva pohledy na proces:

- z hlediska výrobního budeme hovořit o *výrobním procesu*,
- z hlediska matematického budeme pracovat s *procesem stochastickým*.

Výrobní proces je dle normy ČSN EN ISO 9000:2006 charakterizován jako „soubor vzájemně souvisejících nebo vzájemně působících činností, které přeměňují vstupy na výstupy“. Výrobní proces tedy představuje posloupnost po sobě jdoucích činností, jejichž prostřednictvím se za pomoci lidských zdrojů, technických prostředků a technologie vytváří produkt nebo služba. Tento proces spočívá v transformaci vstupních prvků na výstupní produkty, jejichž prodejem se snažíme vytvořit zisk. Výrobní proces je možné také definovat jako činnost, při níž se uskutečňuje soubor pracovních, technologických a přírodních procesů, který mění tvar a jakost vstupního materiálu.

V literatuře se objevuje celá řada definic výrobního procesu, z nichž uvádím následující dvě:

„Proces jako soubor činností, který vyžaduje jeden nebo více druhů vstupů a tvoří výstup, který má hodnotu pro zákazníka“, takto definuje proces M. Hammer, viz [38].

„Proces jako tok práce postupující od jednoho člověka k druhému a v případě větších procesů i z jednoho oddělení do druhého, přičemž procesy lze definovat na celé řadě úrovní. Vždy však mají jasně vymezený začátek, určitý počet kroků uprostřed a jasně vymezený konec“, definují M. Robron a P. Ullah, viz [70].

V normě ČSN EN ISO 9000:2006 je „**Kvalita** definována jako stupeň splnění požadavků souborem inherentních charakteristik.“ V normě ČSN EN ISO 9000:2006 je definována „**Kontrola, inspekce** jako hodnocení shody pozorováním a posouzením, doplněné podle vhodnosti měření, zkoušením nebo srovnáváním“, viz [19].

Řízení kvality (Quality Control - QC) podle definice Japonských průmyslových standardů je „systémem prostředků k ekonomické produkci zboží nebo služeb, které uspokojí požadavky zákazníků“. V roce 1950 W. E. Deming zavedl řízení kvality. Důraz byl kladen na zdokonalování kvality výrobků uplatněním statistických nástrojů ve výrobním procesu. V roce 1954 J. M. Juran přišel s konceptem řízení kvality jako důležitým nástrojem managementu pro zdokonalování manažerských výkonů.

Statistické řízení kvality (Statistical Quality Control - SQC) je nejdůležitější analytickou metodou, která sleduje a zlepšuje kvalitu vyráběného produktu nebo dodávaných služeb. SQC v sobě kromě statistického řízení procesu zahrnuje také kontrolu vzorků.

Statistické řízení procesů (Statistical process control - SPC) „Statistické řízení procesů má sledovat důležité řídicí veličiny procesu, aby mohly být včas rozpoznány odchylky a provedeny korektury, které zabrání vzniku vadného výrobku. Kromě toho má prověřit všechna zařízení před jejich plánovaným použitím, zda budou schopna dodržet plánované tolerance“, viz [37].



Obr. 2.1: Systém zajištění kvality, statistické řízení procesu (SPC).

Primárním (on-line) nástrojem SQC jsou metody statistického řízení procesů (Statistical Process Control - SPC), které umožňují sběr, zpracování, archivaci dat a zobrazení informací týkající se kvality vyráběného produktu, viz Obr. 2.1. Vhodný systém řízení kvality zajistí, že výrobek bude vyroben napoprvé v požadované kvalitě, tím se zvýší produktivita práce a klesnou náklady na výrobu produktu. Metody SPC a SQC jsou přínosem pro hromadnou sériovou výrobu, pro velký objem výroby s malým jednicovým ziskem ¹ pro výrobu, kde je vyžadována velká přesnost (úzké toleranční pásmo). SPC je také označováno jako takzvaný „preventivní“ nástroj pro řízení kvality, který je schopen včas odhalovat významné odchylky od stanovené úrovně vybraného znaku procesu. Tyto včas realizované zásahy udrží proces dlouhodobě na požadované a stabilní úrovni. V SPC se tedy snažíme stabilizovat proces, minimalizovat jeho variabilitu a zlepšovat jeho výkonnost. To je ovlivňováno řadou faktorů, které na proces působí. Jsou to technické, ekonomické, statistické, sociální a metodické faktory. Úkolem statistických metod řízení je tyto vlivy studovat a vytvářet takové podmínky, aby variabilita procesu byla stabilní a nevybočovala ze svých přirozených mezí. Každý proces vykazuje určitou variabilitu, která způsobuje jeho neopakovatelnost.

Variabilita procesu je způsobena různými příčinami, které lze rozdělit do dvou skupin:

- **Náhodné příčiny**, kterých je velké množství a každá z nich určitou měrou přispívá k celkové variabilitě procesu. Tyto příčiny působí trvale a jejich vliv nelze zcela eliminovat. Mezi ně například patří vlhkost ovzduší, teplota, chvění stroje, nestejná kvalita materiálu, výrobní nepřesnosti stroje, chladící médium, materiál a tvar výrobku.
- **Vymežitelné příčiny** (zvláštní příčiny, někdy též „zjistitelné“) představují vlivy, které za běžných podmínek na proces nepůsobí. Ty je třeba identifikovat a poté odstranit, aby se již neopakovaly. Je jich poměrně malý počet a mají významný vliv na kvalitu. Jejich vznik je nepravidelný a nepředvídatelný a trvá tak dlouho, dokud nejsou provedena opatření k jejich odstranění. Zjistitelné příčiny jsou někdy označovány také jako poruchy. Mezi ně například patří poškození nástroje, změna nastavení stroje, vstup nesprávného materiálu. Jejich odstranění je prováděno formou opravy, seřízení či organizačního zásahu do výrobního procesu. Předcházení vzniku zjistitelných příčin lze dosáhnout pravidelnou preventivní údržbou.

Proces je považován za statisticky zvládnutý, pokud je vyloučen vliv zjistitelných příčin a jeho variabilita je vyvolána pouze působením náhodných příčin. Úkolem statistického řízení je tedy eliminovat vliv zjistitelných příčin a udržovat proces ve statisticky zvládnutém stavu.

¹jednicový zisk - zisk za jednotku vyrobeného produktu

Pravděpodobnost doby do vzniku zjistitelné příčiny² změny chování procesu je v praxi často zjednodušeně popisována pomocí exponenciálního rozdělení. Tento předpoklad odpovídá stavu, kdy se výrobní zařízení v čase neopotřebovává a kvalita se s dobou používání nemění. Reálnějších výsledků dostaneme při popisu pravděpodobnosti doby do vzniku zjistitelné příčiny pomocí některého obecnějšího rozdělení, například Weibullova rozdělení nebo logaritmicko normálního rozdělení.

Oprava je soubor činností, které zajišťují funkčnost celého procesu. V zásadě můžeme uvažovat tři druhy oprav: První typ opravy je úplná oprava (renovace), která uvede systém do stavu „jako nový“, tedy uvede výrobní proces do stavu jako na počátku sledování. Druhým typem je minimální oprava, která uvede proces do stavu „jako před poruchou“. Třetím typem je neúplná oprava, jejímž výsledkem není proces „jako nový“, ale je lepší než „jako před poruchou“. Při druhém a třetím typu opravy se v procesu projevuje vliv stárnutí (opotřebení) a intenzita opakovaných poruch se zpravidla zvyšuje. V prvním případě můžeme předpokládat, že proces pracuje v takzvaných cyklech obnovy, které začínají vždy, když je proces uveden do stavu „jako nový“. Vedle oprav také probíhají pravidelné údržby, jejichž frekvence je zpravidla stanovena výrobcem. V této práci budeme rozlišovat tři druhy údržby:

- **Reaktivní údržba** je prováděna v době, kdy se proces dostane mimo statistickou kontrolu.
- **Náhradní údržba** je prováděna v případě falešného signálu.
- **Plánovaná (preventivní) údržba** je prováděna v předem stanoveném čase.

Inspekce jsou pravidelná měření procesu v určitých časových intervalech podle zvoleného plánu. V rámci každé inspekce může být provedeno jedno nebo více opakovaných měření každé ze sledovaných veličin. Z těchto měření potom zpravidla odhadujeme hodnotu regulované charakteristiky a snažíme se co nejdříve detekovat změnu v chování procesu pomocí zvoleného detekčního algoritmu.

Regulační diagram je nástroj pro aplikaci sekvenčního detekčního algoritmu. Z pohledu statistické indukce je grafickým zobrazením posloupnosti testů statistické hypotézy o hodnotě parametru rozdělení regulované veličiny. Zároveň zobrazuje variabilitu procesu a jeho vývoj v čase. V případě, že sledovaná charakteristika vybočí mimo regulační meze, říkáme, že regulační diagram vysílá signál. Signál indikuje, že v procesu by mohla začít působit zjistitelná příčina, kterou je třeba identifikovat, odstranit a přijmout takové opatření, aby se již nemohla opakovat. Pro různé podmínky a vlastnosti regulovaného procesu byla vyvinuta řada regulačních diagramů jak pro sledování jednorozměrných charakteristik, tak i pro regulaci ve vícerozměrném případě.

²Zjistitelnou příčinou zde zpravidla chápeme poruchu jakožto jev spočívající v ukončení schopnosti objektu plnit požadovanou funkci podle technických podmínek.

Kvalitu detekčního algoritmu hodnotíme, jak z hlediska ekonomického, tak z hlediska statistického. Ekonomickým kritériem optimality detekčního algoritmu jsou náklady za jednotku času. Statistické kritérium optimality je založeno na mírách variability a charakteristikách rychlosti detekce. K tomu se používají následující charakteristiky:

- **Average Run Length (ARL)** je průměrná délka běhu procesu, často pouze průměrný počet inspekci, které proběhnou před signalizací toho, že se proces dostal do statisticky nezvládnutého stavu. Tato veličina závisí na pravděpodobnostním chování procesu. ARL by měla být maximální, je-li proces ve statisticky zvládnutém stavu.
 - ARL_0 označuje střední počet inspekci (výběrů, měření) sledované charakteristiky procesu, který je ve statisticky zvládnutém stavu. V takovém případě by k signálu teoreticky nemělo vůbec dojít, nicméně vlivem variability procesu k němu čas od času dochází.
 - Symbolem ARL_δ budeme označovat střední počet inspekci, které proběhnou od okamžiku, v němž se hodnota sledovaného parametru změnila z předepsané (cílové) úrovně δ_0 o hodnotu δ . V ideálním případě by se hodnota ARL_δ měla rovnat jedné, to znamená, že posun v chování procesu detekujeme okamžitě při první inspekci po jeho vzniku.
- **Average Time to Signal (ATS)** je střední doba do prvního výskytu signálu. Tato hodnota často nahrazuje ARL. Používá se hlavně v případě, že doby mezi inspekci nejsou stejně velké.
- **Average DELay (ADEL)** je časová prodleva mezi okamžikem vzniku poruchy a detekci poruchy. Toto zpoždění je charakterizováno průměrným počtem inspekci od vzniku poruchy do vyslání signálu. V mnoha směrech má lepší interpretaci než ARL_δ .
- **Median Run Length (MRL)** je medián doby do prvního výskytu signálu, respektive **Median DELay (MDEL)** je charakterizováno mediánem počtu inspekci. Řada autorů preferuje tyto charakteristiky založené na robustnější charakteristice polohy za vhodnější než jejich průměrové protějšky.

2.2 Návrh regulačního diagramu

Různé regulační diagramy se hodí na různé situace podle charakteru regulovaného procesu a měřených veličin. Diagram je konstruován pro detekci zjistitelných příčin změny chování procesu. Změny v procesu mohou nastávat náhle nebo pozvolna například opotřebením nástrojů, snížením hladiny paliva, které je potřebné pro výrobní proces. Důležitým kritériem pro zavedení určitého typu regulačního diagramu jsou náklady na jeho aplikaci a na provádění celé regulace, viz [25], [28], [78].

Návrh regulačního diagramu by měl projít těmito následujícími kroky.

1. **Analýza výrobního procesu.** V prvním kroku provedeme analýzu výrobního procesu, jejímž výsledkem bude určení regulované veličiny, jejíž chování budeme sledovat. Měli bychom se zaměřit na vlivy, které na ni působí, a jak ovlivňuje tento proces. Z hlediska provozního bychom měli stanovit, kdy je proces pod kontrolou a kdy mimo kontrolu. Zda je nutné zastavit proces v případě hledání zjistitelné příčiny či nikoliv, a zda výrobní proces pokračuje při údržbě nebo ne.
2. **Stochastická analýza.** V druhém kroku analyzujeme proces z hlediska jeho stochastických vlastností, to znamená, že určíme pravděpodobnostní rozdělení regulované veličiny a její dobu do poruchy. Zjistíme pravděpodobnostní rozdělení doby opravy nebo údržby. Pomocí (auto) korelační funkce v čase analyzujeme závislosti regulovaných veličin.
3. **Výběr regulačního diagramu.** Třetí krok je nejdůležitějším bodem celého návrhu, kde vybíráme nejvhodnější typ regulačního diagramu, který včas signalizuje zjistitelnou příčinu a minimalizuje výskyt falešných signálů. Jednotlivé regulační diagramy mají různou citlivost na různé typy vychýlení (změn). Tak například, Shewhartův regulační diagram je schopen velmi efektivně zachytit velký posun (náhlé změny) ve sledované hladině procesu. Naproti tomu CUSUM je mnohem vhodnější v případě, kdy změna procesu je postupná či došlo k malému posunu. Jsou použitelné v různých podmínkách, které závisí i na technickém vybavení a složitosti výpočtu jednotlivých regulačních diagramů. Regulační diagram volíme podle charakteru regulované veličiny, pokud sledujeme více charakteristik současně, volíme podle počtu regulovaných veličin. Bereme v úvahu závislostní strukturu sledovaného (stochastického) procesu. Při výběru regulačního diagramu klademe důraz nejen na jeho jednoduchost použití v provozu, ale zohledňujeme i ekonomické aspekty.

4. **Výběr optimální strategie údržby.** Ve čtvrtém kroku vybíráme optimální strategii údržby. Preventivní údržba může významně snížit náklady na výrobu a zvýšit její kvalitu. K tomu je třeba stanovit optimální intervaly a rozsahy plánované údržby. Z hlediska ekonomicko-statistického návrhu regulačního diagramu budeme nadále uvažovat úplnou údržbu, která je prováděna, buď v předem daných pravidelných intervalech nebo vždy po signalizaci regulačním diagramem.
5. **Ekonomicko-statistická optimalizace.** Ekonomicko-statistický návrh bere do úvahy jak ekonomické parametry, tak i statistické vlastnosti regulačního diagramu. Mezi statistické vlastnosti regulačního diagramu patří hodnota ARL , která je podrobněji popsána v kapitole 3 pro Shewhartův regulační diagram, CUSUM diagram, EWMA diagram. To slouží především k optimálnímu nastavení parametrů regulačního diagramu, kterými snižujeme náklady nejen na statistickou regulaci, ale i na ztrátu kvality regulovaného procesu. Mezi optimalizované parametry patří rozsah výběru vzorků, délka intervalu mezi inspekcemi v hodinách a šířka regulačních mezí, která se obvykle uvádí v násobcích směrodatné odchylky sledovaného procesu v ustáleném stavu, v němž je proces ve stavu pod statistickou kontrolou. Z hlediska ekonomického návrhu regulačního diagramu předpokládáme, že vznikají náklady na měření (inspekci), které můžeme rozložit na náklady variabilní a fixní. V neznámém okamžiku ν dojde ke zjištěné příčině, která posune proces do stavu mimo statistickou kontrolu. Pokud je proces ve stavu pod statistickou kontrolou, to znamená, že došlo k falešnému signálu počítáme pouze s náklady na vyhledání falešného signálu. Pokud je signál oprávněný, počítáme s náklady na vyhledání a odstranění zjištěné příčiny.
6. **Pravidla pro implementaci.** V posledním kroku návrhu regulačního diagramu se soustředíme na správný způsob jeho aplikace, kde nastavíme pravidla používání a zajistíme odpovídajícím způsobem jejich dodržování. Do organizačního řádu daného výrobního podniku zavedeme pravidla pro používání regulačních diagramů, kterými stanovíme podmínky měření a odběry vzorků, přidělíme pravomoce a odpovědnosti jednotlivých pracovníků za správné měření a vyhodnocení vzorků. Vyhradíme prostor pro analýzu vzorků a zajistíme včasný zásah při zjištění oprávněného signálu.

2.3 Statistická regulace procesu

„Statistickou regulaci procesu můžeme definovat jako bezprostřední a průběžnou kontrolu procesu, která je založena na matematicko-statistickém vyhodnocení jakosti produktů. Poskytuje informace pro operativní a včasné zásahy do procesu. Pro regulaci procesu je nutné znát aktuální hodnoty výstupní veličiny, které je třeba analyzovat, a na základě získaných informací vygenerovat akční zásah do procesu a jeho vstupů. Tímto dojde k úpravě procesu pro dosažení požadované úrovně výstupní veličiny.“³

Statistické řízení procesů (SPC) se zabývá z pohledu matematické-statistiky sledováním procesu vytvářející produkt nebo poskytující službu. Mějme náhodnou veličinu $X(\omega)$, kde ω je náhodný vliv, který ovlivňuje hodnotu veličiny. Příkladem náhodné veličiny je změřená hmotnost odebraného vzorku⁴, kterou nejsme schopni předem určit až po přesném měření. Naměřenou hodnotu vzorku značíme malým písmenem $X(\omega) = x$ a pro další vzorek stejné veličiny dostaneme jinou naměřenou hodnotu vzorku $X(\omega_1) = x_1$. Náhodné veličiny X měnící se v čase t tvoří náhodný proces, který označíme jako $\{X(\omega, t), t \in T\}$ zkráceně $\{X(t)\}$. Každá realizace náhodného procesu X se nazývá **trajektorie**. Budeme-li mít jedno pozorování s jedním určitým náhodným vlivem ω_0 , budou pozorované hodnoty v čase tvořit trajektorii procesu $X(\omega_0, t)$, které můžeme graficky znázornit pomocí grafu funkce jedné proměnné t , viz [1], [26], [28], [29]. Náhodná veličina $X(t)$ popisuje stav procesu v čase t .

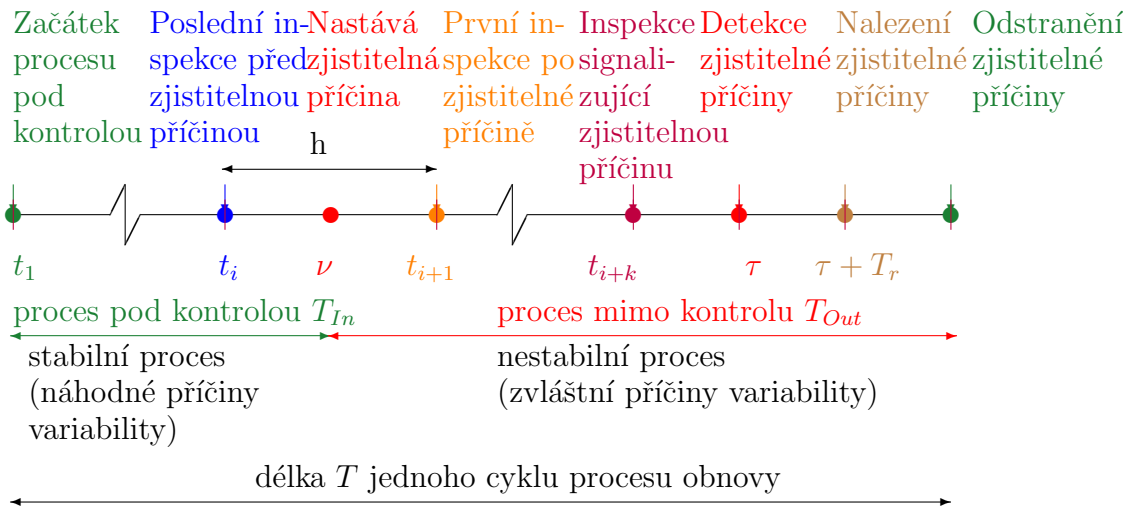
Cílem SPC je stabilizovat kolísání procesu $X(t)$ a zmenšovat jeho variabilitu tím, že co nejdříve identifikujeme nežádoucí změnu ve výrobním procesu, co nejdříve ji odstraníme a provedeme taková opatření, aby se již neopakovala. Zároveň se snažíme o to, abychom zbytečně nezastavovali proces, který je pod kontrolou. Pokud na proces působí pouze náhodné vlivy, proces je stabilizován, to znamená, že je predikovatelný. Nestabilní (nepředvídatelné) procesy zvyšují náklady na výrobu a přinášejí ztráty plynoucí z nekvalitní produkce. Aplikací metody SPC lze také indikovat změny v procesu včas, tedy dříve než se stanou nezvratnými.

K tomu, abychom identifikovali změnu ve stochastickém procesu, používáme takzvané sekvenční detekční schéma (SDS). Jeho hlavním nástrojem jsou regulační diagramy, do kterých zaznamenáváme napozorované (naměřené) hodnoty x_1, x_2, \dots, x_n z jednotlivých měření procesu. Tato měření, která nazveme inspekci, zpravidla provádíme ve stejných časových intervalech h . Většinou provádíme několik měření $(x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,m}, i = 1, 2, \dots)$ při každé inspekci a z nich vypočítáme zpravidla některou statistickou charakteristiku polohy nebo rozptýlenosti. V procesu může nastat zjistitelná příčina⁵, která způsobí posunutí sledované charakteristiky o (náhodný) násobek směrodatné odchylky procesu. Toto posunutí se promítne v regulačním diagramu, který vyše signál, že nastala zjistitelná příčina.

³Česká společnost pro jakost: <http://www.perspektivyjakosti.cz/nastroje-a-metody-a.html>

⁴Dalším příkladem může být teplota chladicí kapaliny, drsnost obráběné plochy, a jiné

⁵Tato příčina je zjistitelná, předpokládáme, že ji lze identifikovat a po jejím odstranění proces vrátit do „původního stavu“



Obr. 2.2: Regulační cyklus procesu.

Předpokládejme, že sledujeme proces produkující posloupnost (konečnou nebo nekonečnou) x_1, x_2, \dots, x_n v časech $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ a tato posloupnost je (zpočátku) **pod statistickou kontrolou**. Například na Obr. 2.2 si představme výrobu hřídelů, kdy na začátku výrobního procesu máme seřízený, nastavený soustruh a nasazený nový soustružnický nůž. Nacházíme se ve stavu pod statistickou kontrolou v předem dané toleranci výroby (ta je zpravidla určena z výrobního výkresu). V čase $\nu \in \langle t_i, t_{i+1} \rangle$ nastane zjistitelná příčina, která v reálné situaci například znamená vybočení soustružnického nože, tato změna se projeví ve výrobním procesu tím, že dojde k vychýlení rozměru hřídele od předepsané tolerance. V čase $t_{i+k} \geq \nu$ identifikuje regulační diagram proces **mimo statistickou kontrolu** a vyšle signál. V čase τ odhalíme zjistitelnou příčinu a v čase $\tau + T_r$ danou příčinu odstraníme. Nalezením a odstraněním zjistitelné příčiny navrátíme proces do stavu pod statistickou kontrolou. Za předpokladu, že zjistitelné příčiny vznikají nezávisle na sobě v čase a doby mezi nimi mají stejné rozdělení pravděpodobnosti, můžeme předpokládat, že i doby do nalezení a odstranění zjistitelné příčiny jsou nezávislé a stejně rozdělené. Tedy okamžiky „navrácení“ procesu pod statistickou kontrolu tvoří stochastický proces obnovy.

Pokud se proces chová rozumně v tom smyslu, že regulovaná veličina nemění v čase své rozdělení pravděpodobnosti, přinejmenším se nemění její střední hodnota a rozptyl, potom považujeme regulovaný proces za **stabilní**. V praxi je splnění této podmínky zpravidla nereálné, a proto se spokojíme s tím, že tyto charakteristiky nevybočí z přijatelných mezí.

2.4 Regulační diagramy

Hlavním statistickým nástrojem pro řízení procesů jsou regulační diagramy při kontrole měření nebo srovnávání, které spadají do oblasti matematicko-statistických metod. Regulační diagram je často ztotožněn s grafickým znázorněním posloupnosti výsledků sekvenčních testů o hodnotě regulované veličiny nebo jejího parametru. Oborem pro pokračování sledování procesu je pásmo vymezené mezemi LCL a UCL, zatímco oborem pro zastavení procesu jsou oblasti mimo tyto meze. Pomocí vhodně zvolených regulačních diagramů můžeme získat informaci (signál), že v procesu začala působit nějaká zjistitelná příčina variability, kterou je třeba identifikovat, odstranit a přijmout takové opatření, aby se již nemohla opakovat.

Sledovaný znak kvality v procesu obvykle sledujeme ve stanovených časových intervalech, kdy provádíme takzvané inspekce. Inspekce spočívá v jednom či několika měřeních. Z těchto měření spočteme výběrové charakteristiky, nejčastěji výběrový průměr a výběrovou směrodatnou odchylku. Tyto statistické charakteristiky nám poskytují informaci o parametrech studovaného znaku kvality procesu.

Jednotlivé hodnoty tvoří trajektorii sledovaného stochastického procesu, které zaznamenáváme do regulačního diagramu. Padne-li hodnota mimo jednu či druhou regulační mez, považujeme to za signál, že v procesu působí zjistitelná příčina variability. Nevíme, kdy začala působit a existuje riziko, že se jedná o falešný signál, a že žádná zjistitelná příčina nepůsobí. Toto riziko lze omezit na základě optimalizace. V případě klasického Shewhartova diagramu s regulačními mezemi ve vzdálenosti $\pm 3\sigma$ od centrální přímky je pravděpodobnost falešného signálu 0.00135 vzhledem ke každé z regulačních mezí. Informace o tom, kdy přesně začala zjistitelná příčina působit lze jen intuitivně odhadovat.

V případě normálního rozdělení znaku kvality sledujeme především cílovou hodnotu δ_0 a parametr variability σ . Pokud na proces působí jen náhodné vlivy (náhodné příčiny variability), jsou tyto parametry stabilní, nepodléhají změnám a proces považujeme za statisticky zvládnutý. V případě, že na proces začnou působit jiné než náhodné vlivy (vymezitelné příčiny variability), dostane se proces mimo statistickou kontrolu a přestane být statisticky zvládnutý, viz [14], [15], [16], [17], [45], [68].

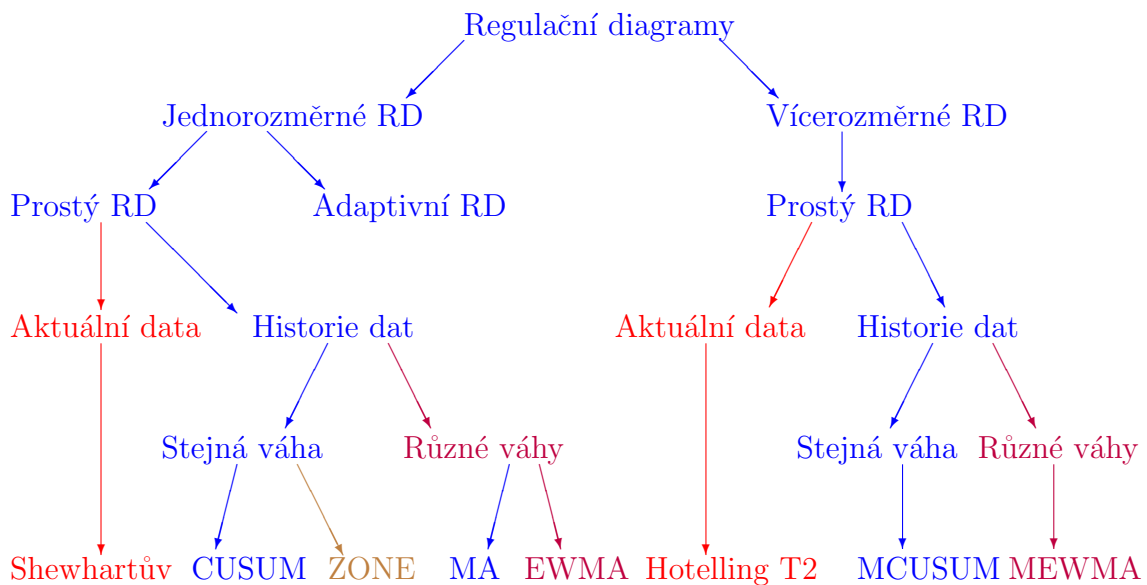
Parametr δ_0 vyjadřuje *cílovou hodnotu* (target value) a představuje v případě obrábění rozměr, na který je výrobní zařízení seřízeno. Parametr σ vyjadřuje směrodatnou odchylku a představuje *rozptýlení hodnot* kontrolovaného parametru vzhledem k cílové hodnotě a charakterizuje přesnost výrobního procesu.

Metoda regulačních diagramů pomáhá zhodnotit, zda je proces ve statisticky zvládnutém stavu, to znamená, že je stabilní. Stabilní úroveň docílíme tím, že o procesu vedeme plynulé záznamy, proces pozorně analyzujeme, a zlepšujeme úroveň procesu.

Použití regulačních diagramů má tyto důvody:

- zlepšují produktivitu práce (zabraňují neustálému zbytečnému opakování měření),
- je efektivní v prevenci chyb,
- zabraňují zbytečným adjustacím procesu (kalibrace),
- poskytují operátorovi podklad pro okamžité rozhodnutí o stavu procesu,
- poskytují informace o způsobilosti procesu.

Jednotlivé regulační diagramy můžeme rozdělit na jednorozměrné a vícerozměrné regulační diagramy. Jak je patrné z názvu, jednorozměrné regulační diagramy sledují jednu proměnnou, kterou měříme v určených časových intervalech. Vícerozměrné regulační diagramy se používají pro sledování dvou a více kvalitativních charakteristik. Jejich výhodou je, že je sledujeme jedinou statistikou. Vícerozměrné regulační diagramy dělíme podle Obr. 2.3, na Hottellingův regulační diagram, regulační diagram MCUSUM a regulační diagram MEWMA. U regulačního diagramu MCUSUM vycházíme z regulačního diagramu CUSUM. U regulačního diagramu MEWMA vycházíme z regulačního diagramu EWMA. O těchto vícerozměrných regulačních diagramech se lze dozvědět více z literatury, viz [6], [7], [52] a jejich popisem se v této práci nebudeme dále zabývat.



Obr. 2.3: Rozdělení regulačních diagramů.

2.4.1 Shewhartův regulační diagram

Walter Andrew Shewhart (18. března 1891 – 11. března 1967) byl fyzikem, inženýrem a statistikem. Stal se prvním čestným členem v ASQ. Proslavil se jako „otec v oblasti statistického řízení kvality“. V roce 1931 publikoval práci „Ekonomické řízení kvality ve výrobě“, viz [72], které bylo považováno za základ v principu řízení kvality. Psal o statistických metodách z pohledu řízení kvality. Publikoval v mnoha odborných časopisech. Od roku 1918 – 1924 pracoval Shewhart ve společnosti Western Electric. Od roku 1925 až do důchodu v roce 1956 působil v Bellových telefonních laboratořích jako člen technického personálu, viz [14], [15], [16], [17], [72], [81].

Shewhartův regulační diagram, který je na Obr. 2.4, využívá informace získané z posledních hodnot rozsahu výběru m , z nichž se v každém kroku (po každé inspekci) počítá a zakresluje hodnota sledované charakteristiky X . Hodnoty zjištěné v předchozích inspekcích již dále nepoužívá. Takovéto diagramy se nazývají diagramy bez paměti. Na Obr. 2.4 jsou znázorněny tlustými tečkami hodnoty regulované veličiny X . Uprostřed regulačního diagramu je centrální přímkou CL (Central Line), která odpovídá průměrné hodnotě sledované výběrové charakteristiky v případě, že základní hodnoty parametrů nejsou známy, případně takzvané referenční (požadované) hodnotě znázorňované charakteristiky v případě, že základní hodnoty parametrů jsou známy, respektive stanoveny. Pro základní rozhodnutí o statistické zvládnutelnosti procesu je rozhodující stanovit horní regulační mez (Upper Control Limit) UCL a dolní regulační mez (Lower Control Limit) LCL. Tyto meze navrhl Shewhart ve vzdálenosti $\pm 3\sigma$ od CL, kde σ je směrodatná odchylka sledované charakteristiky X . Překročení regulačních mezí je rozhodovacím kritériem, zda je důvod usuzovat na přítomnost zjistitelné příčiny v procesu, a zda se má provést zásah do procesu či nikoliv. V některých aplikacích se do regulačního diagramu zakreslují také varovné meze UWL (Upper Warning Limit) a LWL (Lower Warning Limit), které jsou užším pásmem než pásmo vymezený regulačními mezemi.

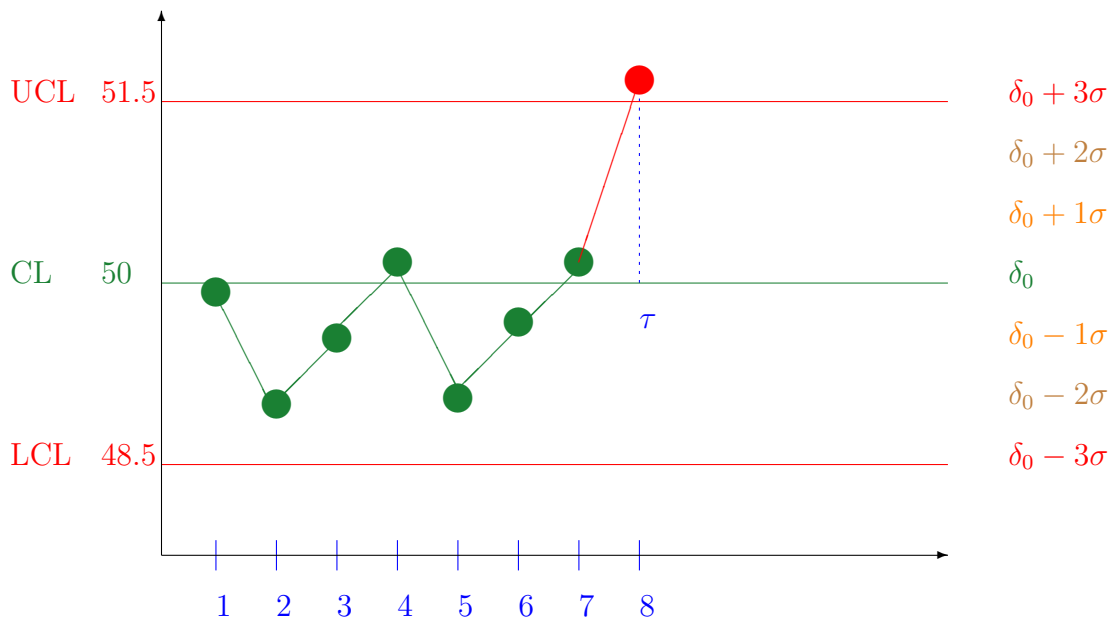
Na Obr. 2.5 je znázorněn Shewhartův regulační diagram, který je rozšířený o varovné meze, a hustotou na Obr. 2.6.

Označme B_1 , respektive B_2 konstantami, které určují polohu regulačních, respektive varovných mezí, což jsou koeficienty jimiž se násobí směrodatná odchylka σ . Tyto hodnoty jsou počítány jako výsledek optimalizace regulačního diagramu. Pro regulační diagram Shewhartova typu je $CL = \delta_0$,

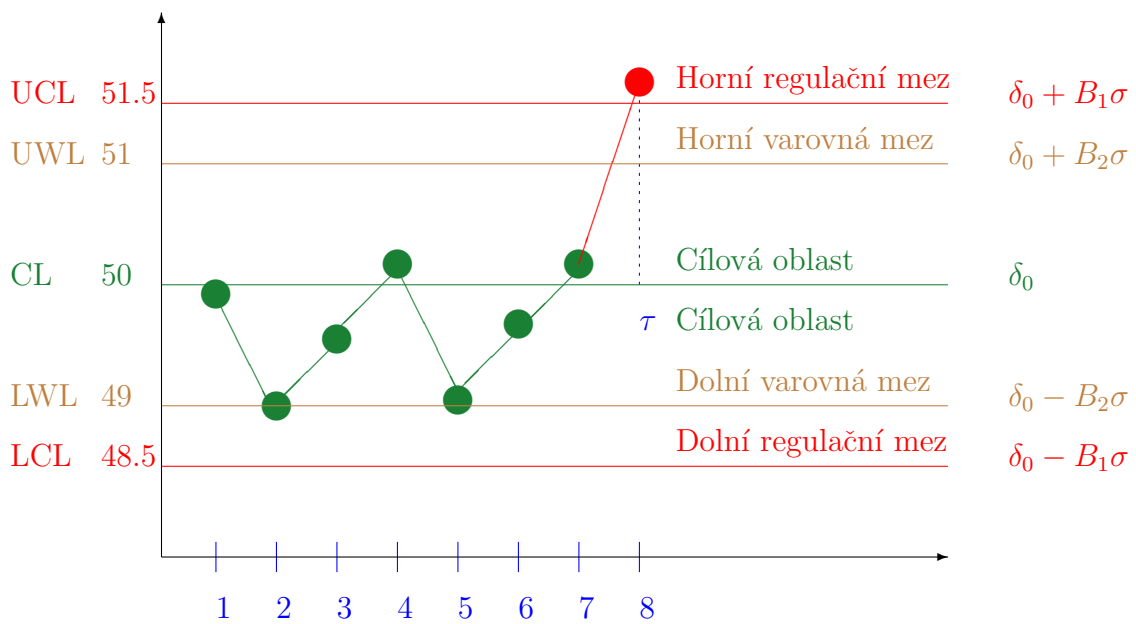
$$LCL = \delta_0 - B_1\sigma, \quad UCL = \delta_0 + B_1\sigma,$$

$$LWL = \delta_0 - B_2\sigma, \quad UWL = \delta_0 + B_2\sigma.$$

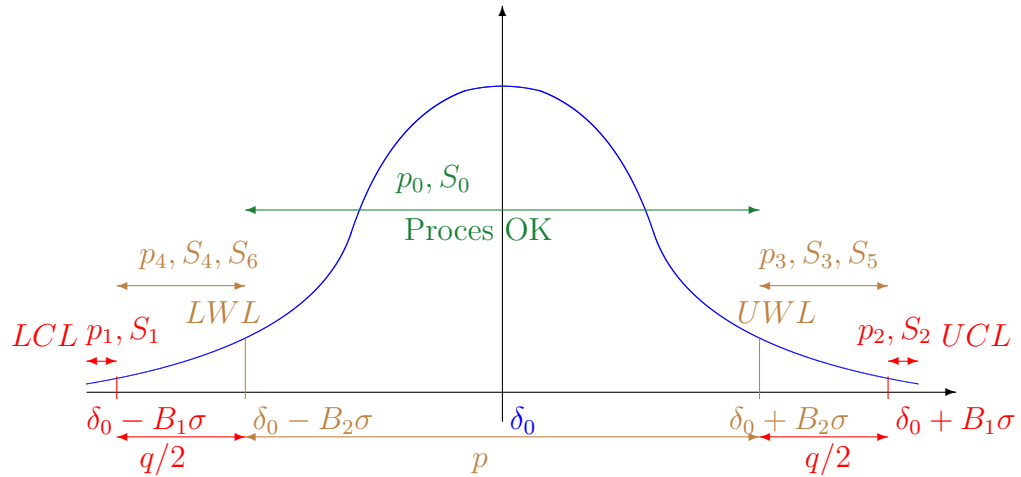
Klasický Shewhartův regulační diagram má centrální přímkou $CL = \delta_0$ a dvě regulační meze $LCL = \delta_0 - 3\sigma$ a $UCL = \delta_0 + 3\sigma$.



Obr. 2.4: Shewhartův regulační diagram pro $CL \equiv \delta_0 = 50$ a $\sigma = 0.5$.



Obr. 2.5: Shewhartův regulační diagram rozšířený o výstražné meze pro $B_1 = 3$ a $B_2 = 2$.



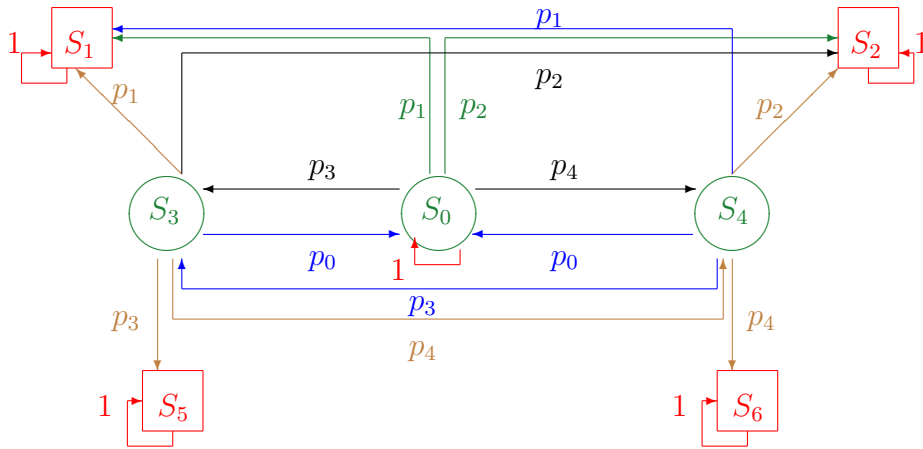
Obr. 2.6: Hustota normálního rozdělení pro Shewhartův regulační diagram rozšířený o výstražné meze pro $B_1 = 3$ a $B_2 = 2$.

V praxi se někdy používá takzvaný jednostranný regulační diagram, který je určen pouze centrální přímkou a horními případně dolními mezemi. Tento jednostranný regulační diagram je dále popsán v kapitole 3.1.1. V takovém případě se nepředpokládá, že sledovaná charakteristika padne pod centrální přímkou, neboť takováto hodnota neovlivňuje negativně kvalitu výrobního procesu. Podobně při užití centrální přímkou a dolních regulačních mezí.

Příklad: Mějme proces, který zastavíme v případě, že se proces dostal mimo statistickou kontrolu. Tato situace nastane, jestliže sledovaná hodnota padne nad nebo pod regulační mez nebo když dvakrát za sebou padne sledovaná hodnota mezi UWL, UCL nebo LCL, LWL . Stavy, kdy je proces mimo statistickou kontrolu nazýváme stavy absorpčními. V našem příkladě předpokládáme čtyři stavy absorpční (pohlcující), který označíme jako S_1, S_2, S_5 a S_6 . Tyto stavy jsou schématicky znázorněny na Obr. 2.7.

Jednotlivé pohlcující stavy odpovídají následujícím situacím:

- S_1 : proces se dostane nad UCL ,
- S_2 : proces se dostane pod LCL ,
- S_5 : proces dvakrát za sebou padne do oblasti $[UWL, UCL]$,
- S_6 : proces dvakrát za sebou padne do oblasti $[LCL, LWL]$.



Obr. 2.7: Stavy Shewhartova regulačního diagramu.

	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	$\sum_{i=0}^6 p_i$
S_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	0	0	1
S_1	0	1	0	0	0	0	0	1
S_2	0	0	1	0	0	0	0	1
S_3	p_0	p_1	p_2	0	p_4	p_3	0	1
S_4	p_0	p_1	p_2	p_3	0	0	p_4	1
S_5	0	0	0	0	0	1	0	1
S_6	0	0	0	0	0	0	1	1

Tab. 2.1: Matice pravděpodobností přechodů Shewhartova regulačního diagramu s varovnými mezemi

Nechť m_i je střední doba do pohlcení v absorpčním stavu S v případě, kdy proces začne v některém přechodném stavu $S_i, i = 0, 3, 4$. Potom m_i musí vyhovovat soustavě rovnic:

$$m_0 = 1 + p_3 m_3 + p_4 m_4 + p_0 m_0$$

$$m_3 = 1 + p_0 m_0 + p_4 m_4$$

$$m_4 = 1 + p_0 m_0 + p_3 m_3$$

Vyrazíme-li ze stavu S_0 , dostaneme po úpravě rovnic střední dobu do absorpce

$$m_0 = -\frac{1 + p_3 + p_4 + p_3 p_4}{-1 + p_0 + p_0 p_3 + p_0 p_4 + p_3 p_4 + p_0 p_3 p_4}.$$

Vyrazíme-li ze stavu S_3 , dostaneme střední dobu do absorpce

$$m_3 = -\frac{1 + p_4}{-1 + p_0 + p_0 p_3 + p_0 p_4 + p_3 p_4 + p_0 p_3 p_4}.$$

Vyrazíme-li ze stavu S_4 , dostanu střední dobu do absorpce

$$m_4 = -\frac{1 + p_3}{-1 + p_0 + p_0p_3 + p_0p_4 + p_3p_4 + p_0p_3p_4}.$$

Střední doba do absorpce v tomto řetězci odpovídá střednímu počtu inspekci před vysláním signálu, a tedy hodnotě $ARL = \vec{\pi}^0(E - A)^{-1}\vec{e}$, viz [46] věta 3.2.4. Necht' $\vec{\pi}^0$ označuje vektor počátečního rozdělení markovského řetězce, E jednotkovou matici, \vec{e} vektor samých jedniček a A matice pro přechodné stavy, kde:

$$A = \begin{pmatrix} p_0 & p_3 & p_4 \\ p_0 & 0 & p_4 \\ p_0 & p_3 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \vec{\pi}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kde

$$ARL = (1 \ 0 \ 0) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_0 & p_3 & p_4 \\ p_0 & 0 & p_4 \\ p_0 & p_3 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$ARL = -\frac{1 + p_3 + p_4 + p_3p_4}{-1 + p_0 + p_0p_3p_4 + p_0p_4 + p_3p_4 + p_0p_3}.$$

V případě oboustranného regulačního diagramu označíme pravděpodobnost p , že sledovaná veličina X bude mít hodnotu v oblasti mezi varovnými mezemi, kterou lze vyjádřit jako:

$$p = \Phi\left(\frac{B_2 - \delta}{\sigma}\sqrt{m}\right) - \Phi\left(\frac{-B_2 - \delta}{\sigma}\sqrt{m}\right).$$

Pravděpodobnost q , že sledovaná veličina X bude mít hodnotu v oblasti mezi varovnými a regulačními mezemi, to jest mezi LCL a LWL nebo mezi UWL a UCL , vyjádříme jako:

$$q = 2\Phi\left(\frac{B_1 - \delta}{\sigma}\sqrt{m} - \frac{B_2 - \delta}{\sigma}\sqrt{m}\right)$$

kde Φ je distribuční funkce standardního normálního rozdělení ($\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{\xi^2/2} d\xi$).

U Shewhartova regulačního diagramu často předpokládáme normálně rozdělená data, symetrická, nezávislá a nekorelovaná data. Dále předpokládáme konstantní střední hodnotu a rozptyl (směrodatnou odchylku) procesu a volíme vhodně logické podskupiny.

Tyto předpoklady ověřujeme pomocí statistických testů. Shewhartovy regulační diagramy jsou v praxi vhodné zhruba pro 5 % případů. Pro procesy, které jsou statisticky zvládnuty podle Shewharta (v čase s konstantní střední hodnotou a směrodatnou odchylkou) zavádíme označení: procesy statisticky zvládnuté v užším slova smyslu. S těmi se setkáváme zřídka. Daleko častější je situace, že například střední hodnota procesu se lehce mění v důsledku změny nástroje, jiné šarže materiálu, ... Tyto změny jsou procesu vlastní, jsou neodstranitelné. O takových procesech hovoříme jako o procesech statisticky zvládnutými v širším slova smyslu. Metodika Six Sigma předpokládá a připouští

variabilitu střední hodnoty v rozmezí $\pm 1,5$ směrodatné odchylky. V takovém případě mohou být Shewhartovy regulační diagramy zavádějící. Pravděpodobnost falešných signálů je totiž podstatně vyšší, někdy až o 5 %. Shewhart počítá regulační meze na základě průměrné výběrové směrodatné odchylky a nepočítá s variabilitou mezi podskupinami. Proto se někde uvažuje nahradit průměrnou směrodatnou odchylku v podskupinách celkovou (totální) směrodatnou odchylkou počítanou ze všech pozorování. Začaly se používat rozšířené regulační meze, někdy též nazývané „modifikované regulační meze“, viz [36].

V roce 1956 byla vydána společností Western Electric **dodatečná pravidla**, které určují, kdy má být vyslán signál o porušení stability procesu i v případě, že nebyla překročena horní nebo dolní regulační mez. Lze je popsat následujícím způsobem:

- **V pravidle 1** je vyslán signál, jestliže nějaký bod padne mimo meze 3σ .
- **V pravidle 2** je vyslán signál, jestliže dva ze tří po sobě jdoucích bodů padnou na stejnou stranu CL do vzdálenosti větší než 2σ a ne větší než 3σ .
- **V pravidle 3** je vyslán signál, jestliže čtyři z pěti po sobě jdoucích bodů padnou na stejnou stranu CL do vzdálenosti mezi σ a 2σ .
- **V pravidle 4** je vyslán signál, jestliže osm po sobě jdoucích bodů padne na stejnou stranu CL do vzdálenosti 1σ .

Na základě těchto pravidel je v normě ČSN ISO 8258:1994 popsáno 8 testů různých seskupení.

2.4.2 Regulační diagram CUSUM

CUSUM je diagram s pamětí. V roce 1954 navrhl E. S. Page CUSUM diagramy, které berou do úvahy jak minulost procesu tak i jeho přítomnost, viz [3], [36]. Mějme nekonečnou řadu pozorování X_1, X_2, \dots , potom kumulovaný součet - CUSUM C_n sledované veličiny X je definován vztahem:

$$C_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \delta_0).$$

Rovnice pro C_n může být napsána v rekurzivním tvaru: $C_0 = 0$ a $C_n = C_{n-1} + (x_n - \delta_0)$.

Častěji se postup používá pro normované hodnoty sledované veličiny $U_i = \frac{x_i - \delta_0}{\sigma}$. Je tomu proto, aby střední hodnota načítané náhodné veličiny byla rovna 0 a směrodatná odchylka rovna 1. Dostáváme tak:

$$S_n = \sum_{i=1}^n U_i.$$

Podobně pro S_n používáme: $S_0 = 0$ a $S_n = S_{n-1} + U_n$.

CUSUM S_n je v podstatě CUSUM C_n vynášený v jednotkách σ - směrodatné odchylky dat. CUSUM C_n je součet nezávislých, normálně rozdělených veličin a tedy $C_n \sim N(0, n\sigma^2)$.

Předpokládejme, že pro určitý časový okamžik t se rozdělení sledované náhodné veličiny změnilo z rozdělení $N(\delta_0, \sigma^2)$ na rozdělení $N(\delta_0 + \delta, \sigma^2)$, to jest střední hodnota δ_0 náhodné veličiny bude vystavena změně - posunu („shiftu“) o velikosti δ .

Vzhledem k tomu, že CUSUM C_n můžeme vždy psát ve tvaru:

$$C_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \delta_0) = \sum_{i=1}^t (x_i - \delta_0) + \sum_{i=t+1}^n (x_i - \delta_0) = I_1 + I_2,$$

Sčítance v I_2 mají rozdělení $N(\delta, \sigma^2)$, takže $I_2 = \sum_{i=t+1}^n (x_i - \delta_0)$ má rozdělení

$N[(n - t)\delta, (n - t)\sigma^2]$. Vedle toho sčítance v I_1 mají rozdělení $N(0, \sigma^2)$, takže $I_1 = \sum_{i=1}^t (x_i - \delta_0) \sim N(0, t\sigma^2)$.

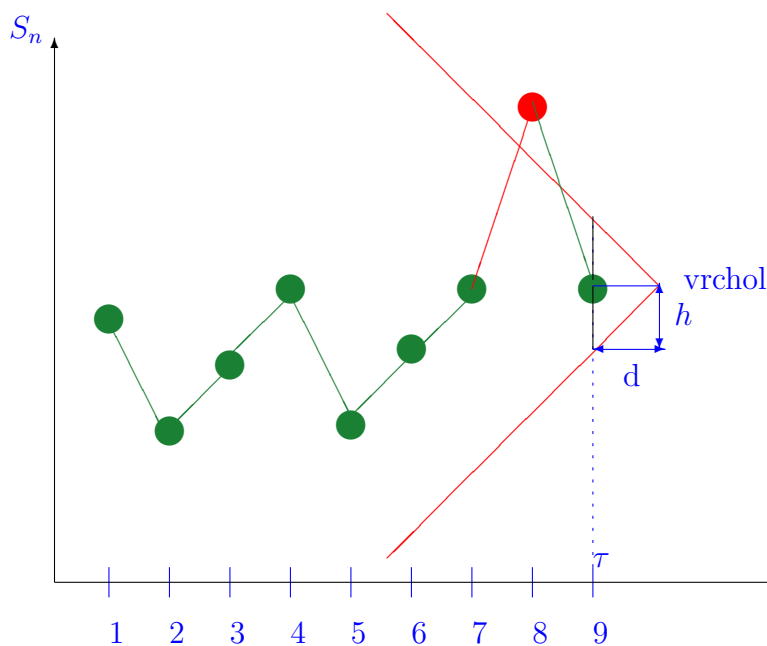
Jinými slovy, střední hodnota CUSUMu v čase $n > t$ je $(n - t)\delta$. To znamená, že CUSUM stoupá lineárně se sklonem δ počínaje bodem (t, C_t) . V principu se střední hodnota může změnit daleko složitějším způsobem a CUSUM diagram je schopen detekovat i tyto složitější změny.

Vyhodnocení diagramu CUSUM se provádí pomocí takzvané V-masky, kterou navrhl v roce 1959 G. A. Barnard. V-mask je na Obr. 2.8. Je to dvojice šikmých polopřímek vycházejících z jednoho vrcholu, který se posouvá s každou zjištěnou hodnotou sledované statistiky. V případě, že některé z předchozích pozorování vystoupí nad nebo pod V-masku, je ohlášen signál (na Obr. 2.8 takto vystupuje pozorování z inspekce číslo 8).

V-mask se konstruuje následujícím způsobem. Nejprve umístíme její vrchol d jednotek před poslední pozorovaný bod v horizontálním směru. Hodnota d je určena pro celý diagram pomocí pravděpodobnosti falešného signálu α , pravděpodobnosti, že jsme neodhalili posun v procesu β a dovolenou odchylkou δ vztahem $d = \frac{2}{\delta^2 \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}$. Z vrcholu vedeme dvě šikmé polopřímky se směrnici $\pm v$, kde $v = \delta \frac{\sigma}{2}$. Tyto polopřímky procházejí body, které leží na vertikální přímce procházející posledním pozorovaným bodem ve vzdálenosti $h = dv$ nahoru i dolů. Nejčastější volbou sledované veličiny je v praxi aritmetický průměr měření při jedné inspekci, tedy $\bar{X}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$, ale častým je i použití jiných robustnějších odhadů míry polohy, například mediánu.

Lineární CUSUM

Pro C_n stejně jako pro S_n je vedle tradičního přístupu pomocí V-masky navržena i forma lineárního CUSUMu, která je na Obr. 2.9 pro identifikaci skutečné změny - posunutí („shiftu“) - střední hodnoty. (Někdy se hovoří o formě DI-CUSUMu oproti formě V-masky CUSUMu). Tato forma zavádí další dva parametry CUSUM diagramu, kterými



Obr. 2.8: Regulační diagram CUSUM (pomocí V-masky).

jsou rozhodovací interval H_C a referenční hodnota κ . Rozhodovací interval má zde podobnou funkci jako regulační mez u jednostranného regulačního diagramu Shewhartova typu, referenční hodnotou lze řídit citlivost diagramu na změnu sledované charakteristiky procesu. Pro monitorování náhodné veličiny vzhledem ke stoupajícímu (kladnému) posunu („upward shift“) střední hodnoty se sleduje kladná veličina:

$$C_0^+ = 0, C_n^+ = \max(0, C_{n-1}^+ + x_n - \delta - \kappa).$$

Stoupající posun je signalizován, když je $C_n^+ > +H_C$.

Pro monitorování náhodné veličiny vzhledem ke klesajícímu (zápornému) posunu („downward shift“) střední hodnoty se sleduje záporná veličina:

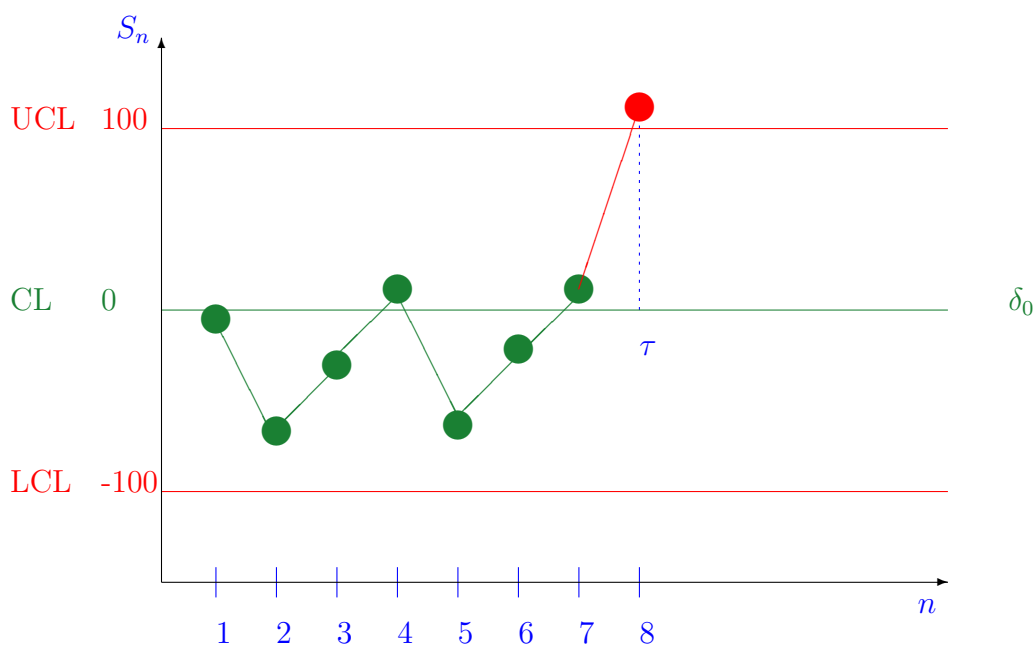
$$C_0^- = 0, C_n^- = \min(0, C_{n-1}^- + x_n - \delta + \kappa).$$

Klesající posun je signalizován, když je $C_n^- < -H_C$.

Je-li vyslán signál, že došlo k posunu, potom odhad doby ν , kdy k němu došlo, je čas posledního pozorování (bodu), kdy je $C_\nu^+ = 0$, respektive kdy je $C_\nu^- = 0$.

Poznámka: Někteří autoři používají pro sledování záporného posunu kladné veličiny $C_0^- = 0, C_n^- = \max[0, (\delta - \kappa) - x_n + C_{n-1}^-]$. Záporný posun je potom signalizován, když je $C_n^- > H_C$.

V případě normovaných proměnných S_n je situace obdobná. Pro monitorování náhodné veličiny vzhledem ke stoupajícímu posunu („upward shift“) střední hodnoty se sleduje kladná veličina $S_0^+ = 0, S_n^+ = \max(0, S_{n-1}^+ + U_n - \kappa)$. Stoupající posun je signalizován, když je $S_n^+ > +H_C$.



Obr. 2.9: Regulační diagram CUSUM.

Pro monitorování náhodné veličiny vzhledem ke klesajícímu posunu („downward shift“) střední hodnoty se sleduje záporná veličina $S_0^- = 0$, kde je $S_n^- = \min(0, S_{n-1}^- + U_n + \kappa)$. Klesající posun je signalizován, když je $S_n^- < -H_C$.

Při vyslání signálu, že došlo k posunu, je odhad doby ν , kdy k němu došlo, poslední pozorovaný čas kdy je $S_\nu^+ = 0$, respektive kdy je $S_\nu^- = 0$.

Volba hodnot parametrů κ a H_C lineárního CUSUMu postupu

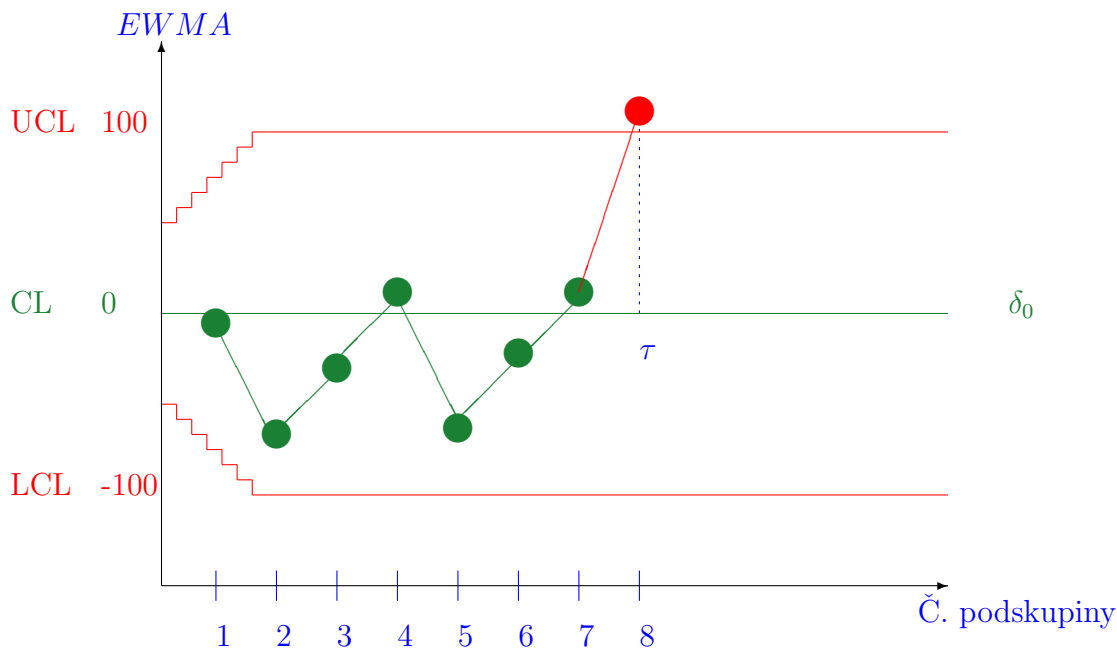
Parametry CUSUM diagramu:

- κ - referenční hodnota - dovolená odchylka, která se obvykle volí jako polovina uvažovaného posunutí $\kappa = \frac{\delta}{2}$.
- H_C - rozhodovací hranice (mez). Je-li překročena, $C_n^+ > H_C$, respektive $C_n^- < -H_C$, usuzuje se, že došlo v procesu k takové změně - kladnému nebo zápornému posunu - že proces není ve statisticky zvládnutém stavu.

Volba parametru κ je velmi podstatná a je zpravidla výsledkem expertního odhadu. H_C je výsledkem optimalizačního postupu v rámci zajištění efektivní aplikace tohoto diagramu. Parametr H_C je typicky stanoven na základě zafixované hodnoty ARL_0 . Po stanovení H_C je vždy třeba dopočítat hodnotu ARL_δ pro různé možné hodnoty posunu sledovaného procesu. Tyto hodnoty nám tedy specifikují „sílu“ metody CUSUM.

2.4.3 Regulační diagram EWMA

Metoda exponenciálně vážených klouzavých průměrů pro statistickou regulaci byla zavedena S. W. Robertsem v roce 1959 a ujal se pro ni název EWMA (Exponential Weighted Moving Average). Tato metoda je citlivější pro detekci malých posunů než klasické regulační diagramy. EWMA není založena na testování hypotézy na rozdíl od regulačního diagramu CUSUM, viz [24], [39], [41], [48]. Schéma regulačního diagramu EWMA je na Obr. 2.10.



Obr. 2.10: Regulační diagram EWMA.

Pro posloupnost pozorovaných veličin X_1, X_2, X_3, \dots definujeme hodnotu rekurzivním pravidlem

$$\bar{X}_E(n) = (1 - \lambda)\bar{X}_E(n - 1) + \lambda X_n, n = 1, 2, \dots \quad (2.4.3.1)$$

kde $\bar{X}_E(0) = u$ (u je zde nějaká konstanta) Opakovaným použitím vztahu (2.4.3.1) dostaneme:

$$\begin{aligned} \bar{X}_E(n) &= (1 - \lambda)\bar{X}_E(n - 1) + \lambda X_n \\ &= \lambda X_n + (1 - \lambda)[(\bar{X}_E(n - 2)(1 - \lambda) + \lambda X_{n-1})] \\ &= \lambda X_n + (1 - \lambda)^2 \bar{X}_E + \lambda(1 - \lambda)X_{n-1} \\ &= \lambda X_n + \lambda(1 - \lambda)X_{n-1} + (1 - \lambda)^2[\lambda X_{n-2} + (1 - \lambda)\bar{X}_E(n - 3)] \\ &= \lambda X_n + \lambda(1 - \lambda)X_{n-1} + \lambda(1 - \lambda)^2 X_{n-2} + (1 - \lambda)^3 \bar{X}_E(n - 3) \\ &= \dots \\ &= \lambda X_n + \lambda(1 - \lambda)X_{n-1} + \lambda(1 - \lambda)^2 X_{n-2} + \lambda(1 - \lambda)^n X_0 \end{aligned}$$

kde $\bar{X}_E(0) = u$ startujeme z nějaké hodnoty (řekněme u)

$$\bar{X}_E(n) = \lambda \sum_{i=0}^n (1 - \lambda)^i X_{n-i}$$

Tento poslední výraz ukazuje, že váha pro hodnotu X_{n-j} je: $\lambda(1 - \lambda)^j$.

Z posledního vztahu je vidět, že s rostoucím j se váha přiřazena k X_{t-j} snižuje exponenciálně. Právě pro geometrický průběh těchto vah se EWMA také nazývá metodou klouzavých geometrických průměrů. Pokud je řada X_1, X_2, X_3, \dots složena z nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rozptylem $Var(X)$, potom:

$$Var(\bar{X}_E(n)) \sim \frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2n}] Var(X).$$

Vzhledem k tomu, že člen $(1 - \lambda)^{2n}$ pro velká n konverguje poměrně rychle k nule, stává se limitující hodnotou pro rozptyl statistiky EWMA výraz:

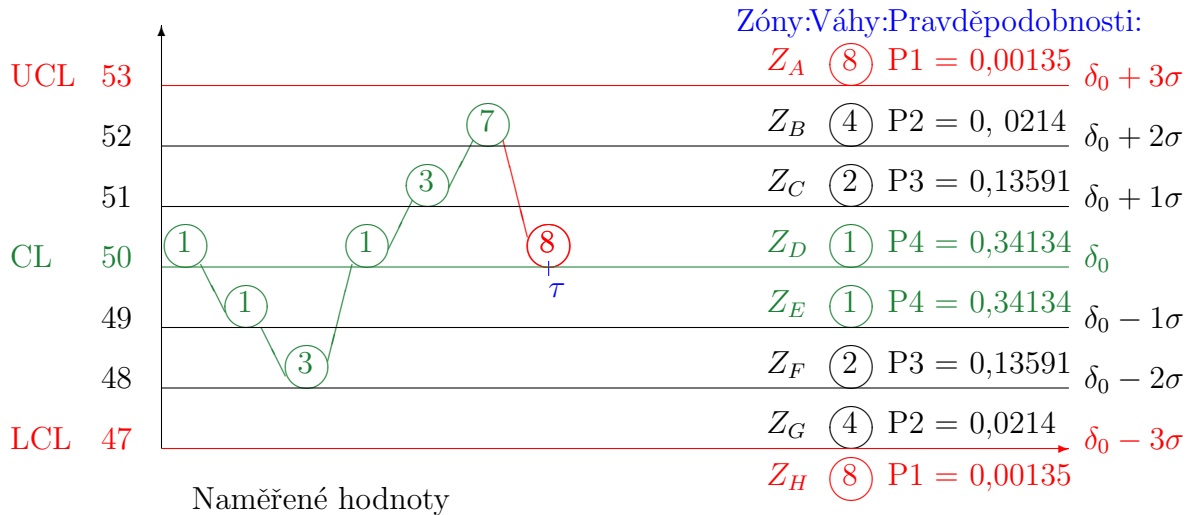
$$Var(\bar{X}_E(n + 1)) = \frac{\lambda}{2-\lambda} Var(X).$$

Proto, užíváme-li metodu EWMA v regulačním diagramu, mohou být regulační meze okolo centrální přímky zúženy o faktor $\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$.

2.4.4 Zónový regulační diagram

Zónový regulační diagram je jakýmsi kompromisem mezi regulačním diagramem Shewharтова typu (používá regulační meze) a CUSUM diagramu (používá historická pozorování). Je mnohem pochopitelnější pro obsluhu než CUSUM diagram a lze jej snadno aplikovat při automatické kontrole.

Zónový regulační diagram obsahuje osm zón, čtyři na každé straně centrální přímky (CL). Zóny jsou pásy mezi přímkami rovnoběžnými s centrální přímkou ve vzdálenosti $\pm 1\sigma$, $\pm 2\sigma$ a $\pm 3\sigma$. Na Obr. 2.11 jsou označeny písmeny Z_A, Z_B, Z_C, Z_D (nad CL) a Z_E, Z_F, Z_G, Z_H (pod CL). Zónám jsou přiřazeny váhy 8, 4, 2, 1, 1, 2, 4, 8 (na Obr. 2.11 jsou uvedeny napravo od označení zón). Regulace potom probíhá obvyklým způsobem: v pravidelných intervalech jsou prováděna měření sledované veličiny, z nich je vypočítána odpovídající charakteristika (průměr, rozpětí, rozptyl) a tato je zakreslena jako jeden bod do regulačního diagramu. Těmto bodům jsou přiřazována skóre jakožto součty vah jednotlivých zón po sobě jdoucích výsledků měření. Součet se počítá vždy pro nepřerušenu posloupnost po sobě jdoucích bodů na jedné straně CL. V okamžiku, kdy následující bod je na opačné straně CL než bod předchozí, součet je „vynulován“ a načítá se znovu. Signál o porušení stability je vyslán ve chvíli, kdy součet vah dosáhne hodnoty 8. Nulování znamená, že padne-li sledovaná charakteristika do oblasti s opačným znaménkem než je současné skóre, zapomeneme současné skóre a rovnou načteme skóre nové.



Obr. 2.11: Zónový regulační diagram.

Na začátku procesu vycházíme ze stavu S_0 s nulovým skóre. Jednotlivé stavy S_{-7}, \dots, S_7 odpovídají součtu skóre bodů nad nebo pod centrální přímkou se znaménkem \pm . Předpokládejme markovský řetězec s těmito stavy $(S_{-7}, S_{-6}, \dots, S_7)$, kde S_8, S_{-8} jsou stavy absorpční. Rozdělení doby do absorpce (pohlcení) může být popsáno užitím PH rozdělením s parametry $(\vec{\pi}^0, A)$, kde $\vec{\pi}^0$ je vektor počátečního rozdělení pravděpodobnosti (ve kterém stavu startujeme) a A je matice pravděpodobností přechodů mezi přechodovými stavy. Potom můžeme vyjádřit průměrnou délku běhu jako $ARL = \vec{\pi}^0(E - A)^{-1}\vec{e}$, viz [46] věta 3.2.4., kde E je jednotková matice a \vec{e} je vektor samých jedniček, viz Tab. 2.2.

Nechť X značí sledovanou charakteristiku. Pro libovolný posun δ jsme schopni ohodnotit následující pravděpodobnosti (užitím distribuční funkce $F(x)$ náhodné veličiny X), viz Tab. 2.3.

Cílem bylo umožnit automatickou signalizaci následných indikátorů stavu mimo statistickou kontrolu v Shewhartově regulačním diagramu s respektováním dodatečných pravidel. Zónový regulační diagram respektuje pravidla podobná těm, které v roce 1956 zavedla společnost Western Electric. Podle těchto pravidel k vyslání signálu stačí, aby:

- **Pravidlo 1'** Jeden bod padl do zóny Z_A nebo Z_H dle Obr. 2.11.
- **Pravidlo 2'** Dva ze tří po sobě jdoucích bodů, které jsou na jedné straně CL, padly do zóny Z_B nebo Z_G (dle Obr. 2.11).
- **Pravidlo 3'** Čtyři z pěti po sobě jdoucích bodů, které padly na stejnou stranu CL do zóny Z_C nebo Z_F (dle Obr. 2.11).
- **Pravidlo 4'** Osm po sobě jdoucích bodů padlo na jednu stranu CL do zóny Z_D nebo Z_E (dle Obr. 2.11).

V každé z těchto situací nastane skóre rovno 8. Kromě uvedených pravidel však může nastat ještě řada dalších situací, při kterých lze dosáhnout skóre vyššího než 8 a tedy bude vyslán signál. V roce 1987 Jaehn navrhl zónový regulační diagram, který měl bohužel

	S_{-7}	S_{-6}	S_{-5}	S_{-4}	S_{-3}	S_{-2}	S_{-1}	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_{-7}	0	0	0	0	0	0	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0
S_{-6}	p_E	0	0	0	0	0	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0
S_{-5}	p_F	p_E	0	0	0	0	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0
S_{-4}	0	p_F	p_E	0	0	0	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0
S_{-3}	p_G	0	p_F	p_E	0	0	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0
S_{-2}	0	p_G	0	p_F	p_E	0	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0
S_{-1}	0	0	p_G	0	p_F	p_E	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0
S_0	0	0	0	p_G	0	p_F	p_E	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0
S_1	0	0	0	p_G	0	p_F	p_E	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0
S_2	0	0	0	p_G	0	p_F	p_E	0	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0
S_3	0	0	0	p_G	0	p_F	p_E	0	0	0	0	p_D	p_C	0	p_B
S_4	0	0	0	p_G	0	p_F	p_E	0	0	0	0	0	p_D	p_C	0
S_5	0	0	0	p_G	0	p_F	p_E	0	0	0	0	0	0	p_D	p_C
S_6	0	0	0	p_G	0	p_F	p_E	0	0	0	0	0	0	0	p_D
S_7	0	0	0	p_G	0	p_F	p_E	0	0	0	0	0	0	0	0

Tab. 2.2: Výřez matice pravděpodobností přechodů pro přechodné stavy zónového regulačního diagramu

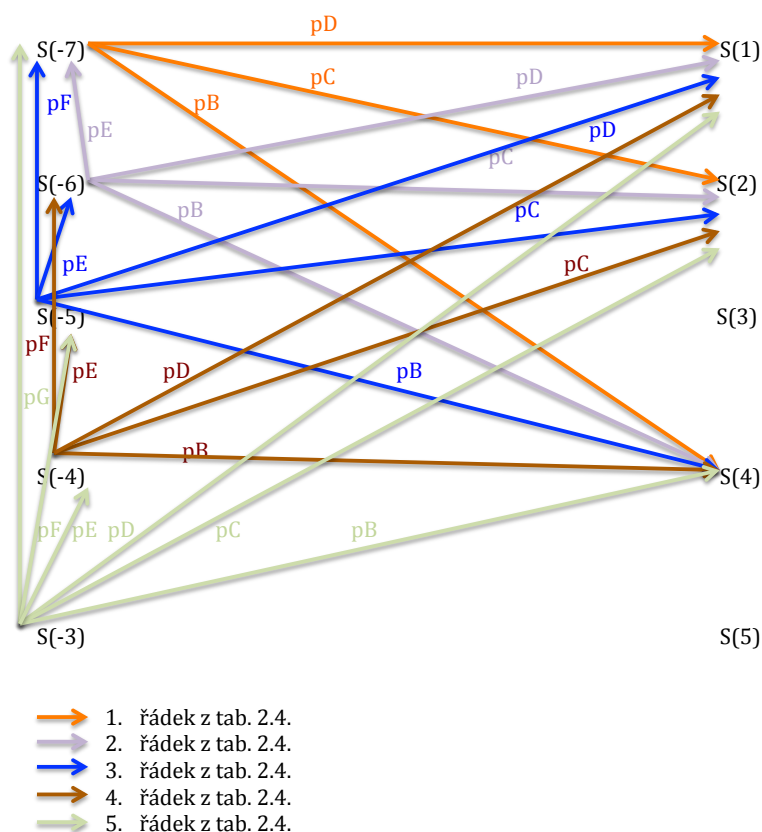
Označení zóny	Obor hodnot	Pravděpodobnost padnutí do zóny
Z_A	$3\sigma - \delta < X < \infty$	p_A
Z_B	$2\sigma - \delta < X < 3\sigma - \delta$	p_B
Z_C	$1\sigma - \delta < X < 2\sigma - \delta$	p_C
Z_D	$\delta < X < 1\sigma - \delta$	p_D
Z_E	$-1\sigma - \delta < X < -\delta$	p_E
Z_F	$-2\sigma - \delta < X < 1\sigma - \delta$	p_F
Z_G	$-3\sigma - \delta < X < -2\sigma - \delta$	p_G
Z_H	$-\infty < X < -3\sigma - \delta$	p_H

Tab. 2.3: Označení pravděpodobností zón zónového regulačního diagramu

velmi vysoký poměr falešných signálů. V tom samém roce Champ a Woodall vypočítali optimální parametry užitím Markovského řetězce. V roce 1989 Jaehn modifikoval zónový regulační diagram, kde namísto ve skóre 1 původního zónového regulačního diagramu kolem centrální přímky dosadil 0, viz [3], [4], [13], [44], [57], [84]. Tímto způsobem se výkon zónového regulačního diagramu podstatně vylepšil. V roce 1989 Hendrix approximoval průměrnou délku běhu zónového regulačního diagramu pomocí simulačních technik. Zónový regulační diagram je v praxi doporučován díky svému výkonu, jednoduchosti, efektivitě, snadnosti užití a snadnému porozumění. Kritici tohoto přístupu tvrdí, že v době výkonné výpočetní techniky není tento argument na místě, ale praxe ukazuje, že jednoduchost zónového regulačního diagramu spolu s jeho snadnou algoritmizací jej stále staví na přední místo v oblíbě vedle klasického Shewhartova regulačního diagramu, který ovšem k aplikaci dodatečných pravidel vyžaduje paměť na předchozí naměřené hodnoty sledované charakteristiky, viz [18], [26], [28], [29], [32], [65].

	S_{-7}	S_{-6}	S_{-5}	S_{-4}	S_{-3}	S_{-2}	S_{-1}	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_{-7}									Z_D	Z_C		Z_B			
S_{-6}	Z_E								Z_D	Z_C		p_B			
S_{-5}	Z_F	Z_E							Z_D	Z_C		Z_B			
S_{-4}		Z_F	Z_E						Z_D	Z_C		Z_B			
S_{-3}	Z_G		Z_F	Z_E					Z_D	Z_C		Z_B			
S_{-2}		Z_G		Z_F	Z_E				Z_D	Z_C		Z_B			
S_{-1}			Z_G		Z_F	Z_E			Z_D	Z_C		Z_B			
S_0				Z_G		Z_F	Z_E		Z_D	Z_C		Z_B			
S_1				Z_G		Z_F	Z_E			Z_D	Z_C		Z_B		
S_2				Z_G		Z_F	Z_E				Z_D	Z_C		Z_B	
S_3				Z_G		Z_F	Z_E					Z_D	Z_C		Z_B
S_4				Z_G		Z_F	Z_E						Z_D	Z_C	
S_5				Z_G		Z_F	Z_E							Z_D	Z_C
S_6				Z_G		Z_F	Z_E								Z_D
S_7				Z_G		Z_F	Z_E								Z_D

Tab. 2.4: Výřez matice, která reprezentuje graf přechodů mezi přechodovými stavy markovského řetězce popisující zónový regulační diagram.



Obr. 2.12: Graf pravděpodobností přechodů mezi vybranými stavy markovského řetězce odpovídajícího zónovému regulačnímu diagramu. Zobrazeny jsou přechody odpovídající prvním pěti řádkům matice z Tab. 2.2.

Kapitola 3

Ekonomicko-statistická optimalizace regulačních diagramů

Úlohou **optimalizace** je zpravidla nalézt takové hodnoty proměnných, pro které nějaká zadaná cílová funkce bude nabývat minimální nebo maximální hodnoty. Cílem optimalizace ve výrobním procesu je zvýšení produkce (například zkrácení taktu výrobní linky), omezení rizik (například automatizace tvorby výrobního plánu), balancování zásob (například redukce zásob, omezení následků zpoždění dodávky dílů), zlepšená předvídatelnost výroby (například analýza rizik simulací), efektivnější doprava (například minimalizace lidských zdrojů a tak dále). Optimalizace se ve výrobě projevuje snižováním nákladů, efektivním využíváním zásob, zrychlením procesu výroby, redukcí počtu potřebných zaměstnanců, minimalizací objemu kolujících dokumentů a tak podobně. V této kapitole se budeme zabývat pouze snížením nákladů během kontroly výrobků.

V případě statistické regulace jsou náklady tvořeny především náklady spojenými s prováděním inspekci (náklady na lidské zdroje, odebrané vzorky, případné prostoje způsobené při inspekci, náklady na zpracování výsledků), náklady vznikající při falešném signálu, ztráty vzniklé opožděnou signalizací a ztráty stability výrobního procesu (při výrobě v nestabilizovaném procesu).

Ekonomicko-statistická optimalizace spočívá v minimalizování předpokládaných ztrát za jednotku času. Za určitých podmínek a z určitého hlediska lze považovat výrobní proces za proces obnovy, tedy proces pracující v určitých cyklech zvaných cykly obnovy. O těchto cyklech předpokládáme, že jejich délky jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením pravděpodobnosti. Označme očekávané náklady za celý cyklus v procesu jako C a očekávanou délku cyklu v procesu jako T , potom můžeme vyjádřit očekávanou střední ztrátu $E(L)$ za jednotku času jako poměr $E(C)$ ku $E(T)$:

$$E(L) = \frac{E(C)}{E(T)}. \quad (3.0.4.1)$$

Výrobní proces v praktickém provozu je spojen s řadou nákladových položek, které určují jeho efektivitu. Nízká efektivita použití regulačních diagramů bohužel často vede k jejich odmítání ze strany vedení u firem. Cílem ekonomicko-statistické optimalizace je nalézt takové parametry regulačních diagramů, které ztráty minimalizují a přinesou maximální zisk, viz [33], [41], [51], [59], [71], [75], [76].

3.1 Statistický přístup

Statistická optimalizace zpravidla spočívá v minimalizaci variability výrobního procesu. Kvalita statistického řízení výrobního procesu je charakterizována takovými charakteristikami, jako je průměrná doba běhu ARL , průměrná doba do signálu ATS , průměrné zpoždění $ADEL$ a další. Při statistické optimalizaci se snažíme minimalizovat relativní četnost falešných signálů, charakterizovanou například převrácenou hodnotou ARL_0 . Zároveň se snažíme minimalizovat čas od vzniku zjistitelné příčiny (poruchy) do její detekce. Tento čas, jenž je charakterizován středním počtem inspekcí, které za tuto dobu proběhnou, označujeme symbolem $ADEL$, nebo v literatuře často používaným ARL_δ , kde hodnota δ reprezentuje velikost posunu sledované charakteristiky kvality vzniklého zjistitelnou příčinou, viz [11], [27], [28], [30], [31], [55], [85].

Představme si proces, který tvoří teoreticky nekonečnou posloupnost pozorování X_1, X_2, X_3, \dots . Na začátku je proces ve stavu pod statistickou kontrolou a v nějakém neznámém okamžiku ν dojde ke změně, která ho uvede do stavu mimo statistickou kontrolu. Z daných pozorování odvozujeme, kdy k této změně mohlo dojít, a snažíme se přijmout co nejdříve vhodná opatření.

Předpokládáme přitom, že náhodné veličiny X_1, X_2, \dots , mají distribuční funkci $F_0(x)$ a hustotu $f_0(x)$. Poznamejme, že jednotlivá měření X_i jsou v reálu získávána v časech $t_i, t_1 < t_2 < \dots$. Jelikož pro studium matematických vlastností studovaných procedur znalost skutečných hodnot t_i není zapotřebí, v kapitole 3.1. používáme pro zvýšení čitelnosti textu pomocí posloupnosti standardních indexů $1, 2, \dots$ místo pomocí posloupnosti reálných časů t_1, t_2, \dots v nichž byla data získána. V praxi si samozřejmě držíme vedle naměřených údajů o sledovaných procesech také informaci o skutečných časech, v nichž k inspekcím (kontrolám) došlo. Dále předpokládáme, že před změnou jsou veličiny rozděleny podle hustoty pravděpodobnosti f_0 , zatímco po změně jsou rozděleny podle jiné hustoty pravděpodobnosti, řekněme f_1 . Předpokládáme, že známe hustotu pravděpodobnosti f_0 . V případě hustoty pravděpodobnosti f_1 si probereme situaci, kdy ji známe a kdy ji neznáme. V našem případě předpokládáme, že obě hustoty pravděpodobností f_0 a f_1 mají normální rozdělení hodnot. Tento předpoklad je učiněn i v softwaru a základních učebnicích. Pokud rozdělení hodnot není normální, ale má nějaký speciální tvar, je tento fakt uveden explicitně.

Označme P_0 rozdělení, kdy X_1, X_2, \dots jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny (*iid*) s hustotou f_0 . Dále označme $P_\nu, \nu = 1, 2, \dots$ rozdělení, podle kterého $X_1, \dots, X_{\nu-1}$ jsou *iid* s hustotou f_0 , zatímco $X_\nu, X_{\nu+1}, \dots$ jsou *iid* s hustotou f_1 .

Střední dobu vzhledem k P_ν označíme E_ν , $\nu = 0, 1, 2, \dots$. Pokud dojde ke změně v čase ν , snažíme se najít okamžik zastavení procesu τ , přičemž časové zpoždění pro detekování změny $(\tau - \nu)_+$ by mělo být co nejmenší. Přijatelným opatřením pro „detekování rychlosti změny“, jenž nastala v okamžiku ν , je takové nejmenší číslo C_ν , pro které všechny realizace $x_1, \dots, x_{\nu-1}$ veličin $X_1, \dots, X_{\nu-1}$ a $\tau \geq \nu$ platí:

$$E_\nu(\tau - \nu + 1 | X_1 = x_1, \dots, X_{\nu-1} = x_{\nu-1}) \leq C_\nu.$$

Jako „nejhorší“ kritérium definujeme $\bar{E}_\tau = \sup_{\nu \geq 1} C_\nu$. Snaha mít \bar{E}_τ malé musí být samozřejmě v rovnováze s řízenou frekvencí falešných signálů. Jinými slovy, pokud nastane změna v procesu, potom τ by mělo být velké až nekonečné. Ukázalo se však, že proto aby bylo \bar{E}_τ konečné, je nutné, aby τ mělo konečnou střední hodnotu i vzhledem k pravděpodobnosti P_0 . Vhodným omezením falešných signálů je potom:

$$E_0\tau \geq B,$$

kde B je konstanta, kterou jsme si předem stanovili.

Poznámka: V praxi se často setkáváme se situací, že daná metoda se neaplikuje přímo na měření sledované veličiny X_1, X_2, \dots , ale pracuje s nějakou zvolenou statistikou (X_1, \dots, X_m) spočtenou z m po sobě následujících měření získaných v rámci jedné inspekce. Touto sledovanou veličinou může být například průměr:

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i, \quad \bar{X}_2 = \frac{1}{m} \sum_{i=m+1}^{2m} X_i, \dots$$

Je dobře známo, že rozptyl se snižuje zprůměrováním hodnot. Počítáme-li ho z hodnot X_i , pak je σ^2 . Počítáme-li ho ze zprůměrovaných hodnot \bar{X}_i , pak je $\frac{\sigma^2}{m}$. Ve statistických softwarech často pracujeme se standardizovanými průměry podskupin různých délek vzorků v případě, kdy se musíme vyrovnat s chybějícími pozorováními.

V této kapitole se budeme zabývat třemi nejčastěji používanými metodami, které lze použít pro výpočet okamžiku zastavení procesu (zastavovací pravidlo procesu):

1) Shewhartův algoritmus (Shewhartův diagram, Shewhartova metoda):

$$\tau = \inf \left\{ n \left| \log \frac{f_1(X_n)}{f_0(X_n)} \geq H_S \right. \right\}.$$

2) Algoritmus CUSUM (metoda CUSUM):

$$\tau = \inf \left\{ n \left| \tilde{S}_n - \min_{0 \leq j \leq n} \tilde{S}_j \geq H_C \right. \right\},$$

kde

$$\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^n \log \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)}, \quad \tilde{S}_0 = 0.$$

3) Algoritmus EWMA:

$$\tau = \inf \left\{ n \mid \bar{X}_{EWMA}(n) \geq H_E \right\},$$

kde

$$\bar{X}_{EWMA}(n) = (1 - \lambda)\bar{X}_{EWMA}(n - 1) + \lambda X_n, \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

3.1.1 Shewhartova metoda

Shewhartova metoda je nejstarší a nejznámější ze všech metod řízení kvality pomocí sekvencních algoritmů. Jak bylo uvedeno výše, můžeme okamžik zastavení procesu vyjádřit ve tvaru:

$$\tau = \inf \left\{ n \mid \log \frac{f_1(X_n)}{f_0(X_n)} \geq H_S \right\}.$$

Kritickou mez H_S lze nalézt řadou způsobů. Pro okamžik zastavení procesu τ vycházíme z procesu, který nezávisí na minulosti ani místě, kdy ke změně zpoždění dojde. Proto platí $\bar{E}_\tau = E_1\tau$. Potom τ má geometrické rozdělení:

$$P(\tau = j) = (1 - p)^{j-1}p, \quad j = 1, 2, \dots \quad \text{kde} \quad p = P\left(\log \frac{f_1(X_1)}{f_0(X_1)} \geq H_S\right).$$

Proto je možné psát $E_\tau = p^{-1}$. V dalších odstavcích podrobně rozebereme, jak rozhodovací mez H_S zvolit.

Posun ve střední hodnotě normálního rozdělení, jednostranný Shewhartův regulační diagram

V této části budeme sledovat posloupnost nezávislých náhodných veličin X_1, X_2, \dots pocházejících z normálního rozdělení se známým rozptylem σ^2 . Označme P_δ takové rozdělení, podle kterého jsou X_1, X_2, \dots *iid* řídi rozdělením $N(\delta, \sigma^2)$. Předpokládejme, že proces je ve stavu pod statistickou kontrolou se střední hodnotou $\delta_0 = 0$ a mimo statistickou kontrolu se střední hodnotou $\delta > 0$.

Okamžik zastavení procesu $\tau = \tau_+$, který závisí na parametrech H_S , respektive b , můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$\tau_+ = \inf \left\{ n \mid \frac{1}{\sigma^2} \left(\delta X_n - \frac{\delta^2}{2} \right) \geq H_S \right\} = \inf \left\{ n \mid X_n \geq \frac{H_S \sigma^2}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right\} = \inf \{n \mid X_n \geq b\}.$$

Abychom našli optimální hodnotu b , použijeme vztah mezi b a $E_0\tau_+$, respektive $E_{\delta_0}\tau_+$. Pro P_0 má okamžik zastavení procesu τ_+ geometrické rozdělení:

$$P_0(\tau_+ = j) = (1 - p_0)^{j-1}p_0, \quad j = 1, 2, \dots$$

kde

$$p_0 = P_0(X_n \geq b) = 1 - \Phi(b/\sigma).$$

Proto

$$E_0\tau_+ = \frac{1}{p_0} = \frac{1}{1 - \Phi(b/\sigma)}. \quad (3.1.1.1)$$

Okamžik zastavení procesu τ_+ má pro P_δ opět geometrické rozdělení a můžeme ho vyjádřit jako:

$$E_\delta\tau_+ = \frac{1}{p_\delta} = \frac{1}{P_\delta(X_n \geq b)} = \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{b-\delta}{\sigma}\right)}.$$

Požadovanou hodnotu $E_0\tau_+$ volíme tak, abychom našli hodnotu b , která je řešením (3.1.1.1). V našem případě vybereme hodnotu b , která dává jednoznačné τ_+ a je nezávislá na hodnotě δ . Proto můžeme použít stejné τ_+ a pro libovolné $\delta > 0$.

Je zřejmé, že střední interval zpoždění mezi změnou procesu a jeho detekováním je:

$$E_\delta\tau_+ = \left[1 - \Phi\left(\frac{b-\delta}{\sigma}\right)\right]^{-1}.$$

Ve statistickém řízení procesů je rozhodující funkcí střední (průměrná) délka běhu, která (v sekvenční analýze) hraje podobnou roli jako síla testu v klasickém testování hypotéz. V našem případě je tato funkce v proměnné δ dána jako:

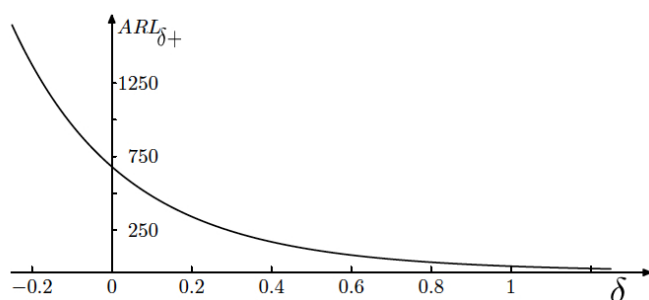
$$ARL_{\delta+} = E_\delta\tau_+.$$

V tomto případě má jeden parametr b .

V Tab. 3.1 jsou dány hodnoty funkce ARL jednostranného Shewhartova regulačního diagramu, detekujeme-li kladný posun ve střední hodnotě normálního rozdělení, přičemž $b = 3\sigma$. Funkce $ARL_{\delta+}$ je graficky vyjádřena na Obr. 3.1.

δ	-1	-1/2	0	1/2	1	3/2
$ARL_{\delta+}$	31574	4299	740.8	161.04	43.96	14.97
δ	2	5/2	3	7/2	4	9/2
$ARL_{\delta+}$	6.30	3.24	2.00	1.45	1.19	1.07

Tab. 3.1: Hodnoty $ARL_{\delta+}$ pro jednostranný Shewhartův regulační diagram detekující pozitivní (kladný) posun ve střední hodnotě normálního rozdělení, kde $b = 3\sigma$.



Obr. 3.1: Funkce $ARL_{\delta+}$ zobrazuje jednostrannou metodu Shewhartova diagramu, kde detekujeme pozitivní posun ve střední hodnotě normálního rozdělení, kde $b = 3\sigma$.

Příklad: Sledované náhodné veličiny jsou nezávislé a mají normální rozdělení se známým rozptylem σ^2 . Cílová hodnota je rovna nule. V daném případě budeme detekovat pozitivní posun ve střední hodnotě. Chceme-li, aby střední interval mezi falešným signálem byl $E_0\tau_+ = 740$, musíme najít vhodnou konstantu b . Podle (3.1.1.1) musí konstanta b splňovat:

$$\frac{1}{1 - \Phi(b/\sigma)} = 740 \Leftrightarrow \frac{b}{\sigma} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1}{740}\right) \Leftrightarrow b = \sigma\Phi^{-1}(1 - 0.00135),$$

a proto $b \doteq 3\sigma$. To znamená, že zastavíme proces, pokud $X_n \geq 3\sigma$. Střední hodnota zpoždění při posunu o velikosti $\delta = \sigma$ je rovna:

$$E_\delta\tau_+ = \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{3\sigma - \sigma}{\sigma}\right)} = \frac{1}{1 - \Phi(2)} \doteq 44.$$

Obdobně můžeme uvažovat situaci, kdy je proces pod statistickou kontrolou se střední hodnotou $\delta = 0$ a mimo statistickou kontrolu se střední hodnotou $\delta = \delta_0 < 0$. Okamžik zastavení procesu $\tau = \tau_-$ je závislý na parametru H_S , respektive b , který vyjádříme následovně:

$$\tau_- = \inf \left\{ n \left| \frac{1}{\sigma^2} \left(\delta X_n - \frac{\delta^2}{2} \right) \leq H_S \right. \right\} = \inf \left\{ n \left| X_n \leq \frac{H_S \sigma^2}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right. \right\} = \inf \left\{ n \left| X_n \leq -b \right. \right\}.$$

Odpovídající funkce $ARL_{\delta-}$ můžeme vypočítat podobně jako $ARL_{\delta+}$.

Posun ve střední hodnotě normálního rozdělení, oboustranný Shewhartův regulační diagram

Předpokládejme, že pozorování X_1, X_2, \dots jsou nezávislá a mají normální rozdělení se známým rozptylem σ^2 . Předpokládejme, že proces je pod statistickou kontrolou, je-li střední hodnota $\delta_0 = 0$ a mimo statistickou kontrolu, pokud střední hodnota $\delta_0 \neq 0$. Okamžik zastavení procesu pro oboustranný symetrický Shewhartův regulační diagram definujeme jako $\tau = \min\{\tau_+, \tau_-\}$, kde:

$$\tau_+ = \inf \left\{ n \mid X_n \geq b \right\} \quad \text{a} \quad \tau_- = \inf \left\{ n \mid X_n \leq -b \right\}.$$

Střední interval mezi falešným signálem je:

$$E_0\tau = \frac{1}{p_0} = \frac{1}{P_0(|X_n| \geq b)} = \frac{1}{2(1 - \Phi(b/\sigma))}. \quad (3.1.1.2)$$

Podobně jako v jednostranném případě uijeme pravidlo pro výběr hodnoty b , kde vybereme požadovanou hodnotu $E_0\tau$ a řešíme rovnici (3.1.1.2). Protože okamžik zastavení procesu τ opět závisí pouze na hodnotě b , můžeme použít podobný algoritmus pro výpočet okamžiku zastavení procesu pro všechna $\delta \neq 0$.

Průměrná délka běhu je dána následujícím tvarem:

$$ARL_\delta = E_\delta\tau = \frac{1}{1 - \left(\Phi\left(\frac{b-\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-b-\delta}{\sigma}\right) \right)}.$$

Příklad: Pozorujeme nezávislou náhodnou veličinu, která má normální rozdělení se známým rozptylem σ^2 . Cílová hodnota δ_0 je rovna nule. Snažíme se detekovat libovolný posun ve střední hodnotě procesu. Střední interval mezi falešným signálem je roven $E_0\tau = 370$. Problémem je opět najít vhodnou konstantu b . Podle (3.1.1.2) musí tato konstanta splňovat následující rovnici:

$$2(1 - \Phi(b/\sigma)) = \frac{1}{370}.$$

Odtud $b \doteq 3\sigma$. Proces tedy zastavíme, je-li hodnota $|X_n| \geq 3\sigma$. Potom je $LCL = -3\sigma$ a $UCL = 3\sigma$.

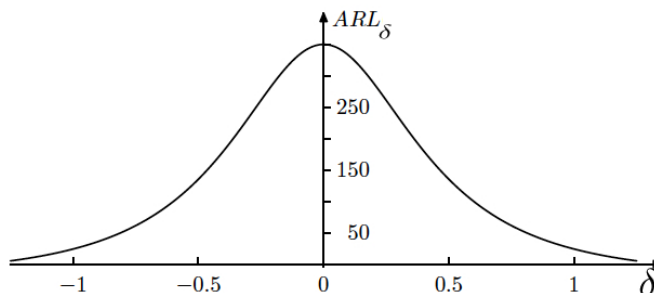
Nechť pro detekování středního zpoždění je posun ve střední hodnotě roven $\delta = \sigma$, potom:

$$E_\delta\tau \doteq 44.$$

V Tab. 3.2 jsou dány hodnoty funkce ARL oboustranného Shewhartova regulačního diagramu, kde detekujeme libovolný posun ve střední hodnotě normálního rozdělení při volbě $b = 3\sigma$. Funkce ARL_δ je zakreslena na Obr. 3.2.

δ	0	± 0.5	± 1	± 1.5	± 2	± 2.5	± 3	± 3.5	± 4
ARL_δ	370	155.22	43.89	14.97	6.30	3.24	2.00	1.45	1.19

Tab. 3.2: Hodnoty ARL pro oboustranný Shewhartův regulační diagram detekující posun ve střední hodnotě normálního rozdělení, kde volíme $b = 3\sigma$.



Obr. 3.2: Funkce ARL_δ oboustranného Shewhartova regulačního diagramu detekujícího libovolný posun ve střední hodnotě normálního rozdělení, kde jsme zvolili $b = 3\sigma$.

Poznámka: Důležitou charakteristikou pro určení regulačních mezí je funkce ARL . Mnoho autorů však pokračuje v dlouholeté tradici a doporučuje „běžná pravidla“ založená na klasickém testování hypotéz, kde vezme regulační meze ve vzdálenosti 3σ od cílové hodnoty.

3.1.2 CUSUM metoda

Metoda CUSUM je úzce spjata s následujícím problémem testování hypotéz. Předpokládáme, že pozorujeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_n , kde n je pro tento případ na okamžik pevné. Uvažujeme testování nulové hypotézy, to jest náhodné veličiny X_1, \dots, X_n jsou rozděleny se známou hustotou f_0 oproti alternativní hypotéze takové, že v neznámém okamžiku $\nu, \nu \leq n$, změna nastane tak, že $X_1, \dots, X_{\nu-1}$ jsou *iid* s hustotou f_0 , zatímco X_ν, \dots, X_n jsou *iid* s hustotou f_1 . Pokud bychom znali okamžik ν , mohli bychom použít logaritmu věrohodnostního poměru, z něž dostaneme:

$$\tilde{S}_n - \tilde{S}_{\nu-1} = \sum_{i=\nu}^n \log \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)}$$

jako testovací statistiku. Nulovou hypotézu zamítáme, pokud $\tilde{S}_n - \tilde{S}_{\nu-1} \geq a_k$, kde a_k je vhodná konstanta. Jestliže je okamžik změny neznámý, nulovou hypotézu zamítáme pokud:

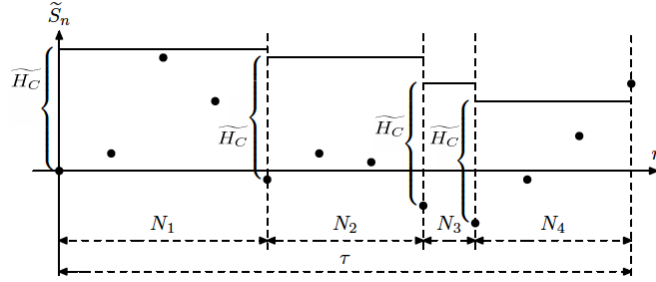
$$\tilde{g}_n = \max_{0 \leq j \leq n} (\tilde{S}_n - \tilde{S}_j) = \tilde{S}_n - \min_{0 \leq j \leq n} \tilde{S}_j \geq \tilde{H}_C.$$

Všimněme si, že $\tilde{g}_n, n \geq 1$, můžeme také definovat následujícím vztahem:

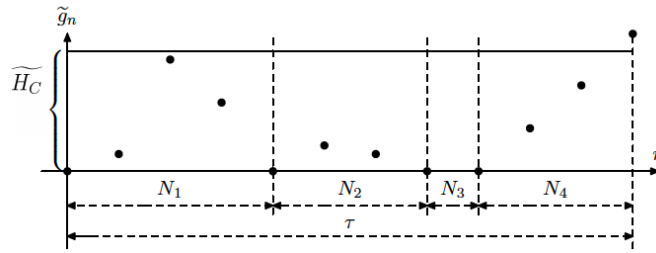
$$\tilde{g}_n = \max \left(\tilde{g}_{n-1} + \log \frac{f_1(X_n)}{f_0(X_n)}, 0 \right), \quad \tilde{g}_0 = 0.$$

Posloupnost \tilde{g}_n je ve skutečnosti náhodná procházka s jednou odrážející hranicí. Na začátku této kapitoly jsme předpokládali, že máme nekonečnou řadu pozorování X_1, X_2, \dots . Pro okamžik zastavení procesu použijeme pravidlo:

$$\tau = \inf \left\{ n \mid \tilde{g}_n \geq \widetilde{H}_C \right\}.$$



Obr. 3.3: Příklad chování posloupností $\{\tilde{S}_n\}$.



Obr. 3.4: Příklad chování posloupností $\{\tilde{g}_n\}$.

Všimněme si, že \tilde{g}_n měří aktuální výšku náhodné procházky (viz příloha 1, část 1.) $\tilde{S}_j, j = 0, 1, 2, \dots$, nad doposud dosaženou minimální hodnotou. Vždycky když stanovíme nové minimum náhodné procházky, to znamená, že $\tilde{S}_n = \min_{0 \leq k \leq n} \tilde{S}_k$, proces zapomíná minulost a začne opět načítat od začátku tak, že pro všechna $j \geq 0$,

$$\tilde{S}_{n+j} - \min_{0 \leq k \leq n+j} \tilde{S}_k = \tilde{S}_{n+j} - \tilde{S}_n - \min_{0 \leq k \leq j} (\tilde{S}_{n+k} - \tilde{S}_n).$$

Abychom stanovili $E_0\tau$, budeme studovat vlastnosti $\{\tilde{g}_n\}$ a \overline{E}_τ tak, jak je popsáno v úvodu této kapitoly. Nejprve si ukážeme, že $E_1\tau = \overline{E}_\tau$. Nerovnost $E_1\tau \leq \overline{E}_\tau$ je zřejmá. Nerovnost $E_1\tau \geq \overline{E}_\tau$ vyplývá z následujících argumentů. Pozorování $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ určuje $\tilde{g}_n = t \geq 0$ (které závisí na X_1, \dots, X_n). Jelikož X_{n+1}, \dots jsou nezávislé na předchozích X_i , řada $\tilde{g}_{n+1}, \tilde{g}_{n+2}, \dots$ se chová právě jako $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \dots$ budeme-li začínat s $\tilde{g}_0 = t \geq 0$. Poslední tvrzení vyjádříme malým \tilde{g} , což zvýší potřebnou dobu k dosažení \widetilde{H}_C .

$E_0\tau$ a $E_1\tau$ závisí na hodnotě \widetilde{H}_C . Zde $E_0\tau$ označuje střední dobu mezi falešnými signály, kdy je proces pod statistickou kontrolou, jestliže všechny X_1, X_2, \dots jsou rozděleny podle

hustoty f_0 . Podobně $E_1\tau$ označuje průměrné zpoždění mezi změnou a detekováním procesu, který je mimo statistickou kontrolu, jestliže všechny X_1, X_2, \dots jsou rozděleny podle hustoty f_1 .

Abychom stanovili $E_0\tau$ a $E_1\tau$, můžeme použít výsledky ze sekvenční analýzy, neboť metoda CUSUM je ve skutečnosti řadou Waldových sekvenčních testů s (log) mezemi $\{0, \widetilde{H}_C\}$. Jestliže je logaritmická věrohodnostní funkce větší než \widetilde{H}_C , potom končíme. Pokud je menší než doposud dosažené minimum, zapomeneme minulost a sekvenční testy začínají s novým pozorováním. Tento přístup můžeme vyjádřit následovně. Pro ilustraci je postup zobrazen na Obr. 3.3 a Obr. 3.4. Připomeňme, že $\tau = \inf\{n | \widetilde{g}_n \geq \widetilde{H}_C\}$.

Zavedeme

$$N = N_1 = \inf \left\{ n \geq 1 \mid \widetilde{S}_n \notin (0, \widetilde{H}_C) \right\}.$$

Jestliže $\widetilde{S}_{N_1} \geq \widetilde{H}_C$, potom $\tau = N_1$. V ostatních případech $\widetilde{S}_{N_1} = \min_{0 \leq k \leq N_1} \widetilde{S}_k$

a položíme

$$N_2 = \inf \left\{ n \geq 1 \mid \widetilde{S}_{N_1+n} - \widetilde{S}_{N_1} \notin (0, \widetilde{H}_C) \right\}.$$

Jestliže $\widetilde{S}_{N_1+N_2} - \widetilde{S}_{N_1} \geq \widetilde{H}_C$, potom $\tau = N_1 + N_2$. V ostatních případech $\widetilde{S}_{N_1+N_2} \leq \widetilde{S}_{N_1}$ a:

$$\widetilde{S}_{N_1+N_2} = \min_{0 \leq k \leq N_1+N_2} \widetilde{S}_k.$$

Vyjádřeno obecně dostáváme

$$N_k = \inf \left\{ n \geq 1 \mid \widetilde{S}_{N_1+\dots+N_{k-1}+n} - \widetilde{S}_{N_1+\dots+N_{k-1}} \notin (0, \widetilde{H}_C) \right\}.$$

Z toho je snadno vidět, že $\tau = N_1 + \dots + N_M$,

kde

$$M = \inf \left\{ k \mid \widetilde{S}_{N_1+\dots+N_k} - \widetilde{S}_{N_1+\dots+N_{k-1}} \geq \widetilde{H}_C \right\}.$$

Z Waldových identit dostáváme

$$E_i\tau = E_iN \cdot E_iM, \quad i = 0, 1.$$

Náhodná veličina M je v pravděpodobnosti P_0 stejná jako v pravděpodobnosti P_1 a je geometricky rozdělena s

$$E_iM = \frac{1}{P_i(\widetilde{S}_N \geq \widetilde{H}_C)}, \quad i = 0, 1,$$

odkud

$$E_i\tau = \frac{E_iN}{P_i(\widetilde{S}_N \geq \widetilde{H}_C)}, \quad i = 0, 1.$$

Abychom stanovili závislost $E_0\tau$ na \widetilde{H}_C , musíme najít E_0N a $P_0(\widetilde{S}_N \geq \widetilde{H}_C)$. Podobně bychom stanovili závislost $E_1\tau$ na \widetilde{H}_C , musíme najít E_1N a $P_1(\widetilde{S}_N \geq \widetilde{H}_C)$. V zásadě je možné postupovat dvěma způsoby, to jest určit odpovídající integrální rovnici nebo zvolit Waldův sekvenční postup.

V případě první metody nalezneme vztah mezi \widetilde{H}_C a $E_0\tau$, respektive $E_1\tau$, který je založen na Fredholmově integrální rovnici, viz příloha 1. Označme pro $i = 0, 1$:

$$P_i(z) = P_i \left\{ \widetilde{S}_N \leq 0 \mid \widetilde{S}_0 = z \right\}$$

a

$$N_i(z) = E_i \left\{ N \mid \widetilde{S}_0 = z \right\}.$$

Potom

$$E_i\tau = \frac{N_i(0)}{1 - P_i(0)}, \quad i = 0, 1,$$

a funkce $P_i(z)$ a $N_i(z)$ splňují rovnice:

$$P_i(z) = \int_{-\infty}^0 g_i(y - z) dy + \int_0^{\widetilde{H}_C} P_i(y) g_i(y - z) dy,$$

a

$$N_i(z) = 1 + \int_0^{\widetilde{H}_C} N_i(y) g_i(y - z) dy,$$

kde $g_i(y)$ je hustota náhodné veličiny $Y = \log(f_1(X_1)/f_0(X_1))$ a hustoty $f_i(x)$ odpovídají pravděpodobnostem P_i , $i = 0, 1$.

V případě druhé metody aproximujeme $E_i\tau$, $i = 0, 1$, postupem, který je založen na Waldově aproximaci sekvenční analýzy, viz příloha 5. Tuto aproximaci můžeme vyjádřit následovně:

$$E_0\tau \doteq \frac{\widetilde{H}_C + 1 - e^{\widetilde{H}_C}}{E_0 \log \frac{f_1(X_1)}{f_0(X_1)}} \quad \text{a} \quad E_1\tau \doteq \frac{\widetilde{H}_C - 1 + e^{\widetilde{H}_C}}{E_1 \log \frac{f_1(X_1)}{f_0(X_1)}}. \quad (3.1.2.1)$$

Jednostranný CUSUM pro posun ve střední hodnotě normálního rozdělení
Výsledky techniky CUSUM jsou shrnuty v předchozích odstavcích, zde se věnujeme úvahám v případě nezávislých náhodných veličin X_1, X_2, \dots pocházejících z normálního rozdělení se známým rozptylem σ^2 . Označme opět P_δ rozdělení, ve kterém jsou tyto náhodné veličiny *iid* podle $N(\delta, \sigma^2)$. Proces je ve stavu pod statistickou kontrolou se střední hodnotou $\delta_0 = 0$ a mimo statistickou kontrolu se střední hodnotou $\delta > 0$. Hustota f_0 odpovídá $N(0, \sigma^2)$, zatímco hustota f_1 odpovídá $N(\delta, \sigma^2)$. Potom logaritmický věrohodnostní poměr \widetilde{S}_n vyjádříme ve tvaru:

$$\widetilde{S}_n = \sum_{i=1}^n \left(\delta X_i - \frac{\delta^2}{2} \right) \frac{1}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\delta}{\sigma^2}.$$

Pro $\delta > 0$ označme:

- $\kappa = \delta/2 \dots$ referenční hodnota,
- $H_C = \widetilde{H}_C \sigma^2/\delta \dots$ prahovou hodnotu,

a položme:

$$S_n(\kappa) = \sum_{i=1}^n (X_i - \kappa), \quad S_n = S_n(0) = \sum_{i=1}^n X_i.$$

CUSUM statistika $\{\widetilde{g}_n\}$ může být vyjádřena následovně:

$$\widetilde{g}_n = \max_{0 \leq j \leq n} (\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_j) = \max_{0 \leq j \leq n} \frac{\delta}{\sigma^2} \sum_{i=j+1}^n \left(X_i - \frac{\delta}{2} \right) = \frac{\delta}{\sigma^2} \max_{0 \leq j \leq n} \left(S_n(\kappa) - S_j(\kappa) \right),$$

a okamžik zastavení procesu je:

$$\begin{aligned} \tau_+ &= \inf \left\{ n \mid \max_{0 \leq j \leq n} \frac{\delta}{\sigma^2} \sum_{i=j+1}^n \left(X_i - \frac{\delta}{2} \right) \geq \widetilde{H}_C \right\} \\ &= \inf \left\{ n \mid \max_{0 \leq j \leq n} \sum_{i=j+1}^n (X_i - \kappa) \geq H_C \right\}. \end{aligned}$$

Existují další možnosti spojené s parametrizací CUSUM procedury, které jsou spíše orientovány geometricky. Například zavedením nových konstant θ a d , definovaných jako:

$$\theta = \operatorname{arctg} \kappa \quad d = \frac{H_C}{\kappa}.$$

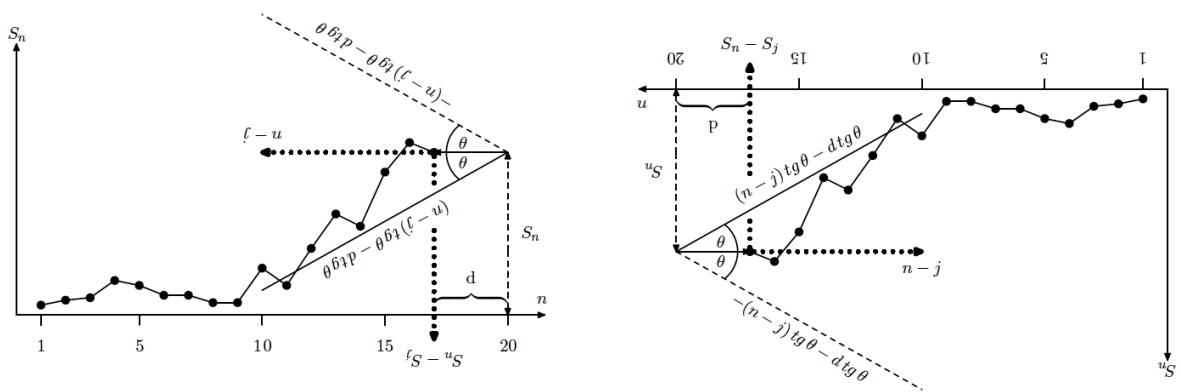
Užitím této parametrizace můžeme přepsat okamžik zastavení procesu takto:

$$\tau_+ = \inf \left\{ n \mid \max_{0 \leq j \leq n} \left(S_n - S_j - (n-j) \operatorname{tg} \theta \right) \geq d \cdot \operatorname{tg} \theta \right\}.$$

Tato nerovnost může být snadno odvozena užitím takzvané V-masky, jak je vidět z Obr. 3.5. Okamžik zastavení procesu τ_+ charakterizuje metodu CUSUM, která je určena ekvivalentním párem parametrů (κ, H_C) nebo (d, θ) .

Užijeme-li obecné schéma metody CUSUM, které jsme si vysvětlili na začátku této kapitoly, potom jsme schopni stanovit $E_0 \tau_+$ a $E_\delta \tau_+$ pro pevnou hodnotu posunutí (ve střední hodnotě) δ , kde:

$$\kappa = \frac{\delta}{2} > 0 \quad \text{a} \quad H_C = \widetilde{H}_C \frac{\sigma^2}{\delta}.$$



Obr. 3.5: V-maska regulačního diagramu CUSUM.

Postup výpočtu průměrné délky běhu funkce $ARL_{\delta+} = E_{\delta}\tau_+$ se budeme věnovat v následujících odstavcích, přičemž použijeme libovolné pevné parametry (κ, H_C) .

Metodu integrálních rovnic (viz příloha 1) lze použít i pro výpočet τ_+ pomocí libovolného rozdělení P_{δ} . Bez ztráty obecnosti předpokládáme $\sigma^2 = 1$. Průměrná délka běhu funkce je:

$$ARL_{\delta+} = E_{\delta}\tau_+ = \frac{N_{\delta}(0)}{1 - P_{\delta}(0)},$$

kde $P_{\delta}(z)$ a $N_{\delta}(z)$ splňují integrální rovnice:

$$P_{\delta}(z) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-z-(\delta-\kappa))^2}{2}} dy + \int_0^{H_C} P_{\delta}(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-z-(\delta-\kappa))^2}{2}} dy,$$

a

$$N_{\delta}(z) = 1 + \int_0^{H_C} N_{\delta}(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-z-(\delta-\kappa))^2}{2}} dy.$$

Druhá metoda pro výpočet $ARL_{\delta+}$ je založena na Waldově aproximaci. Pro libovolné δ zavedeme $\tilde{\delta} = \delta_0 - \delta = 2\kappa - \delta$ tak, že $\kappa = (\delta + \tilde{\delta})/2$, dále předpokládáme $\delta - \tilde{\delta} = 2(\delta - \kappa) > 0$, potom:

$$\begin{aligned} \tau_+ &= \inf \left\{ n \left| \max_{0 \leq j \leq n} \sum_{i=j+1}^n (X_i - \kappa) > H_C \right. \right\} = \\ &= \inf \left\{ n \left| \max_{0 \leq j \leq n} (\delta - \tilde{\delta}) \sum_{i=j+1}^n \left(X_i - \frac{\delta + \tilde{\delta}}{2} \right) > H_C(\delta - \tilde{\delta}) \right. \right\}. \end{aligned}$$

τ_+ je tedy okamžik zastavení procesu pro detekování posunu od $\tilde{\delta}$ do δ . Užitím druhé rovnice (3.1.2.1), kde si hustotu normálního rozdělení $N(\tilde{\delta}, \sigma^2)$ označíme f_0 , hustotu normálního rozdělení $N(\delta, \sigma^2)$ si označíme f_1 a položíme $\widetilde{H}_C = H_C(\delta - \tilde{\delta})$. Potom $ARL_{\delta+}$ lze vyjádřit vztahem:

$$ARL_{\delta+} = E_{\delta}\tau_+ \doteq \frac{\widetilde{H}_C - 1 + e^{-\widetilde{H}_C}}{E_{\tilde{\delta}}\left((\delta - \tilde{\delta})X_1 - \left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{\tilde{\delta}^2}{2}\right)\right)} \quad (3.1.2.2)$$

$$= \frac{H_C(\delta - \tilde{\delta}) - 1 + e^{-H_C(\delta - \tilde{\delta})}}{\frac{(\delta - \tilde{\delta}^2)}{2}} = \frac{2H_C(\delta - \kappa) - 1 + e^{-2H_C(\delta - \kappa)}}{2(\delta - \kappa)^2}, \quad \delta \neq \kappa.$$

Stejné výsledky dostaneme, pokud $\delta - \tilde{\delta} = 2(\delta - \kappa) < 0$. Meze jsme získali ze vztahu:

$$ARL_{\delta+} \doteq H_C^2, \delta = \kappa.$$

Poznámka: Stejné výsledky získal Reynoldsem (1975), viz [66], pokud řadu \tilde{g}_n approximoval Wienerovým procesem.

Bohužel, aproximace (3.1.2.2) není dost přesná. Z toho důvodu Siegmund (1985), viz [73] navrhl následující zlepšení:

$$ARL_{\delta+} \doteq \begin{cases} \frac{2(H_C + 1.166)(\delta - \kappa) - 1 + e^{-2(H_C + 1.166)(\delta - \kappa)}}{2(\delta - \kappa)^2}, & \delta \neq \kappa, \\ (H_C + 1.166)^2, & \delta = \kappa. \end{cases} \quad (3.1.2.3)$$

Pro výběr parametrů κ a H_C u metody CUSUM doporučujeme:

- Zvolíme κ takové, že $\delta = 2\kappa$ je to ta hodnota procesu, pro níž je důležité detekovat danou velikost posunu.
- Vybereme požadovanou střední dobu mezi falešným signálem (MTBFR), a pak vybereme pro toto pevné κ takové H_C , že $ARL_{0+} = E_0\tau_+ = MTBFR$.

Příklad: Pozorujeme nezávislou náhodnou veličinu z normálního rozdělení s rozptylem σ^2 . Cílová hodnota δ_0 je rovna nule. Detekujeme pozitivní posun ve střední hodnotě za předpokladu, že střední interval mezi falešným signálem je $E_0\tau_+ = 740$. Hodnoty funkce ARL jsou shrnuty v následující tabulce vybrané hodnoty parametrů κ, H_C a $\sigma = 1$. Pro výpočet byla užita Siegmundova aproximace (3.1.2.3).

Předpokládejme, že zastavovací pravidlo je ve tvaru:

$$\max_{0 \leq j \leq n} \sum_{i=j+1}^n \left(\frac{X_i}{\sigma} - 0.5 \right) > 4.766.$$

$ARL_{\delta+}$		δ								
H_C	κ	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
8.006	0.25	10^9	838807	740	28.77	11.34	7.02	5.08	3.98	3.27
4.766	0.50	10^7	71032	740	35.19	9.87	5.43	3.73	2.84	2.29
2.487	1.00	276883	12757	740	67.85	13.34	5.36	3.15	2.21	1.70
1.538	1.50	59677	6237	740	108.50	22.48	7.31	3.54	2.21	1.58
1.006	2.00	25366	4162	740	148.49	35.83	11.21	4.72	2.57	1.68

Tab. 3.3: Hodnoty funkce ARL jednostranné metody CUSUM pro detekování pozitivního posunu je ve střední hodnotě normálního rozdělení s rozptylem $\sigma^2 = 1$ pro vybrané hodnoty parametrů κ, H_C .

Užitím tohoto zastavovacího pravidla je střední hodnota doby zpoždění při detekování posunu o $\delta = \sigma$ přibližně 10 inspekcí. Jestliže bude ve skutečnosti posun o velikosti 2σ , zatímco naše metoda je založena na předpokladu, že $E_0\tau_+ = 740$ a chceme detekovat (nejlépe) posun o velikosti $\delta = \sigma$, pak z Tab. 3.3 dostaneme, že střední zpoždění je 3.73 inspekcí.

Na druhé straně, pokud $E_0\tau_+ = 740$ a chceme detekovat posun $\delta = 2\sigma$, z Tab. 3.3 určíme parametry $(\kappa, H_C) = (1, 2.487)$. Potom střední hodnota zpoždění při posunu o $\delta = 2\sigma$ je 3.15 inspekcí.

Nyní nastavíme parametry κ a H_C (θ a d , respektive) pro metodu CUSUM nikoliv na funkci ARL nýbrž pomocí sekvenčního testování hypotéz s využitím pravděpodobnosti chyb α a β .

Předpokládejme, že pozorujeme náhodnou veličinu $N(\delta, 1)$. Detekujeme pozitivní posun v procesu, to znamená, že proces je pod statistickou kontrolou, jestliže $\delta_0 = 0$ a mimo statistickou kontrolu, jestliže $\delta > 0$. Pro pevný časový okamžik n máme pozorování X_1, X_2, \dots, X_n a rozhodneme, zda je proces pod statistickou kontrolou nebo není. Zavedeme si nové proměnné $Y_1 = X_n, Y_2 = X_{n-1}, \dots, Y_n = X_1$ a předpokládáme n -tý krok sekvenčního testu:

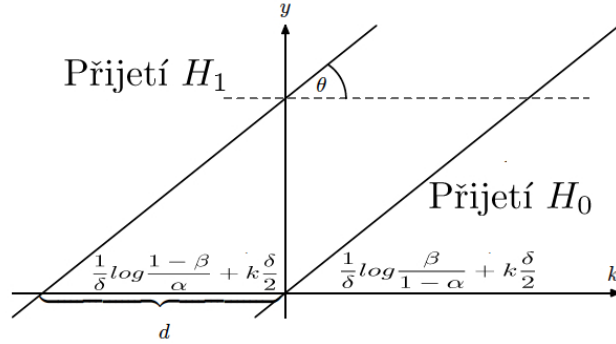
$$H_0 : \delta = 0 \quad \text{oproti} \quad H_1 : \delta > 0,$$

s (pevnou) pravděpodobností α a β , viz příloha 4. Potom metoda CUSUM je dána těmito parametry:

$$d = \frac{2}{\delta^2} \log \left(\frac{1 - \beta}{\alpha} \right) \quad \text{a} \quad \theta = \text{arctg} \left(\frac{\delta}{2} \right).$$

Toto je zobrazeno na Obr. 3.3, Obr. 3.4 a Obr. 3.6.

Poznámka: Rozšíříme-li řadu pozorování dost daleko do minulosti, je možné, že bude nakonec signalizován proces mimo statistickou kontrolu, i když odpovídající sekvenční metoda byla ukončena dříve s nezamítnutím nulové hypotézy H_0 .



Obr. 3.6: Nastavení parametrů pro metodu CUSUM s pravděpodobnostmi chyb α a β .

Zastavovací pravidlo je ve tvaru:

$$\tau_- = \inf \left\{ n \left| \min_{0 \leq j \leq n} \sum_{i=j+1}^n (X_i + \kappa) \leq -H_C \right. \right\},$$

pro parametry $(\kappa, H_C > 0)$, respektive θ a d :

$$\tau_- = \inf \left\{ n \left| \min_{0 \leq j \leq n} (S_n - S_j + (n - j) \operatorname{tg}(\theta)) \leq -d \operatorname{tg}(\theta) \right. \right\}.$$

Toto zastavovací pravidlo může být aplikováno pomocí takzvané horní V-masky.

Normální rozdělení - metoda oboustranného CUSUM pro libovolný posun ve střední hodnotě

Oboustranná metoda CUSUM pro detekování libovolného posunu ve střední hodnotě z cílové hodnoty $\delta_0 = 0$ s parametry κ a H_C je dána okamžikem zastavení procesu:

$$\tau = \min(\tau_+, \tau_-),$$

kde

$$\tau_+ = \inf \left\{ n \left| \max_{0 \leq j \leq n} \sum_{i=j+1}^n (X_i - \kappa) > H_C \right. \right\}$$

a

$$\tau_- = \inf \left\{ n \left| \min_{0 \leq j \leq n} \sum_{i=j+1}^n (X_i + \kappa) < -H_C \right. \right\}.$$

Pro aplikaci těchto zastavovacích pravidel můžeme užít souměrnou V-masku s $\theta = \arctg(\kappa)$ a $d = H_C/\kappa$.

Kemp v roce (1961), viz [47] ukázal, že:

$$\frac{1}{E_\delta \tau} = \frac{1}{E_\delta \tau_+} + \frac{1}{E_\delta \tau_-},$$

takže

$$ARL_{\delta} = E_{\delta}\tau, \quad ARL_{\delta+} = E_{\delta}\tau_{+}, \quad ARL_{\delta-} = E_{\delta}\tau_{-}$$

a

$$ARL_{\delta} = \frac{ARL_{\delta+}ARL_{\delta-}}{ARL_{\delta+} + ARL_{\delta-}}.$$

Pro výběr parametrů H_C a κ doporučujeme:

- Zvolit κ takové, že $\delta = |2\kappa|$ je velikost posunu, který chceme detekovat.
- Vybrat požadovanou střední dobu mezi falešným signálem ($MTBFR$) a nalézt pevné H_C a κ takové, že $ARL_0 = E_0\tau = MTBFR$.

Příklad: Pozorujeme nezávislou náhodnou veličinu s normálním rozdělením s rozptylem $\sigma^2 = 1$. Cílová hodnota δ_0 je rovna nule. Chceme detekovat libovolný posun ve střední hodnotě za předpokladu, že střední interval mezi falešným signálem je $E_0\tau = 370$. Hodnoty funkce ARL pro vybrané hodnoty parametrů κ, H_C jsou shrnuty v následující tabulce. Pro výpočet jsme použili opět Siegmundovu aproximaci (3.1.2.3).

ARL_{δ}		δ						
H_C	κ	0	± 0.5	± 1	± 1.5	± 2	± 2.5	± 3
8.006	0.25	370	28.77	11.34	7.02	5.08	3.98	3.27
4.766	0.50	370	35.17	9.87	5.43	3.73	2.84	2.29
2.487	1.00	370	67.49	13.34	5.36	3.15	2.21	1.70
1.546	1.50	370	106.64	22.48	7.31	3.54	2.21	1.58
1.006	2.00	370	143.38	35.78	11.21	4.72	2.57	1.68

Tab. 3.4: Hodnoty funkce ARL oboustranné metody CUSUM pro detekování libovolného posunu ve střední hodnotě normálního rozdělení s rozptylem $\sigma^2 = 1$ pro vybrané parametry κ, H_C .

Pokud známe rozptyl σ^2 , který je různý od 1, můžeme postupovat podobně jako v předchozím příkladě.

3.1.3 Metoda EWMA

EWMA se obvykle aplikuje, jestliže chceme detekovat změnu ve střední hodnotě proměnné $\{X_i\}$ s některou známou hustotou f . Předpokládáme, že cílová hodnota δ_0 je rovna nule a rozptyl σ^2 známe, EWMA je definována rekurzivně:

$$\bar{X}_{EWMA}(n) = (1 - \lambda)\bar{X}_{EWMA}(n - 1) + \lambda X_n, \quad \lambda \in (0, 1), n = 1, 2, \dots$$

Pro odhalení pozitivního posunu použijeme jednostranný algoritmus, který vyvolává signál, pokud:

$$\bar{X}_{EWMA}(n) \geq H_E,$$

a oboustranný algoritmus, který vyvolává signál, pokud:

$$|\bar{X}_{EWMA}(n)| \geq H_E.$$

Průměrná délka běhu funkce ARL má dva parametry H_E a λ . Konstanta H_E je konstanta definující EWMA zastavovací pravidlo. Druhá konstanta λ určuje míru vlivu historických dat. Jestliže $\lambda = 1$, potom dostaneme Shewhartův regulační diagram. Na druhé straně, jestliže λ je malé, metoda EWMA se podobá CUSUM diagramu. Robinson&Ho (1970), viz [69] navrhli numerické aproximace pro výpočet průměrné délky běhu funkce. Crowder (1987a), viz [22] užil Frenolmovy integrální rovnice, které jsou založeny na stejné myšlence jako u metody CUSUM.

Nechť $V(u)$ je ARL oboustranné metody tehdy, když vážený klouzavý průměr začíná v bodě u . Potom platí pro EWMA :

$$\begin{aligned} V(u) &= P(|(1-\lambda)u + \lambda X_1| > H_E) + \int_{\{|(1-\lambda)u + \lambda y| \leq H_E\}} (1 + V((1-\lambda)u + \lambda y))f(y)dy = \\ &= 1 + \frac{1}{\lambda} \int_{-H_E}^{H_E} V(y)f\left(\frac{y - (1-\lambda)u}{\lambda}\right)dy. \end{aligned}$$

$V(u)$ je roven ARL jednostranné metody pro detekování kladného posunu tehdy, kdy vážený klouzavý průměr začíná v bodě u . Potom $V(u)$ splňuje rovnici:

$$V(u) = 1 + \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{H_E} V(y)f\left(\frac{y - (1-\lambda)u}{\lambda}\right)dy.$$

Regulační meze pro EWMA diagram jsou specifikovány tak, že $H_E = V(\sigma_{\bar{X}_{EWMA}(n)})$, kde

$$\sigma_{\bar{X}_{EWMA}(n)}^2 = \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\sigma^2\right).$$

Příklad: Předpokládejme, že pozorování jsou normálně rozdělená s rozptylem $\sigma^2 = 1$ a cílovou hodnotou $\delta_0 = 0$. Cílem je detekovat jak pozitivní tak i negativní posun ve střední hodnotě. Chceme přitom, aby střední interval mezi falešným signálem byl $E_0\tau = ARL_0 = 370$. Hodnoty funkce ARL_δ jsou dány v Tab. 3.5.

ARL_δ		δ						
V	λ	0	± 0.5	± 1	± 1.5	± 2	± 2.5	± 3
2.50	0.50	370	26.6	10.8	6.8	5	4.0	3.4
2.75	0.12	370	29.6	9.6	5.6	4	3.2	2.6

Tab. 3.5: Hodnoty funkce ARL oboustranné metody EWMA pro detekování libovolného posunu ve střední hodnotě normálního rozdělení s rozptylem $\sigma^2 = 1$ pro vybrané hodnoty V, λ, δ (převzato z Crowder (1987a)).

Srovnání Shewhartovy metody s metodou CUSUM

Výhody metody CUSUM oproti Shewhartově metodě

Metoda CUSUM je efektivnější pro trvale malý posun ve střední hodnotě procesu, zvláště pro posuny mezi 0.5 - 2 směrodatné odchylky, která je vzdálena od cílové střední hodnoty. Posuny ve střední hodnotě procesu snadno detekujeme v regulačním diagramu CUSUM, změna způsobí sklon zakreslených hodnot. Zakreslená hodnota, ve které se změní sklon, je ten čas, ve kterém se vyskytl posun.

Výhody Shewhartovy metody oproti CUSUM metodě

Shewhartova metoda je efektivnější k detekování neočekávaných velkých posunů v procesu. Můžeme ji snadněji interpretovat pomocí Shewhartova regulačního diagramu díky tomu, že pozorování jsou nekorelovaná. Shewhartova metoda není závislá na minulých datech oproti metodě CUSUM.

Poznámka: Nelson(1984), viz [58] a další autoři doporučili užít několik speciálních testů pro doplnění Shewhartovy metody, které zlepšují výkonnost pro detekování trvale malých posunů.

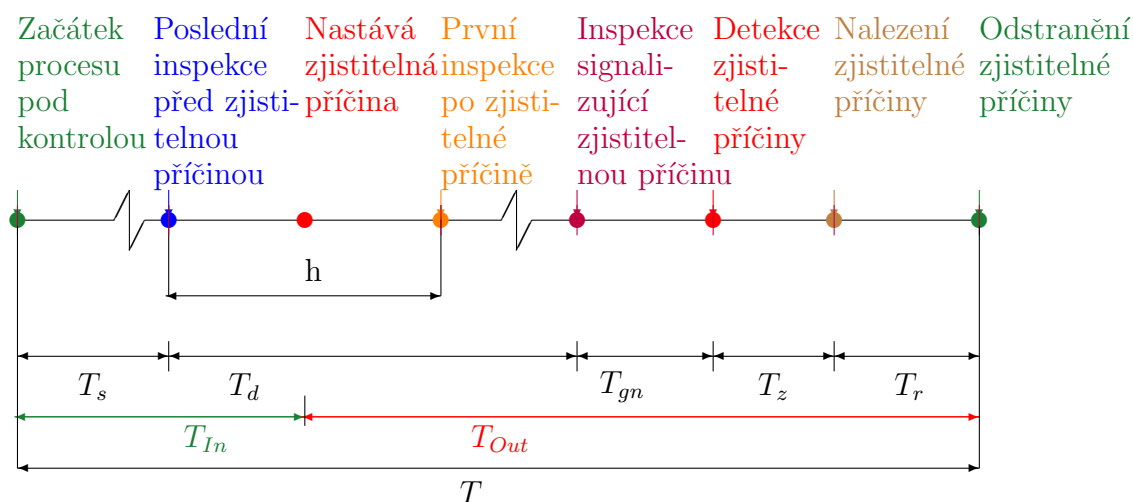
3.2 Ekonomický přístup

Ve statistickém řízení procesů dochází v průběhu sledování náhodné (regulované) veličiny k nákladům, které si zde podrobněji vysvětlíme. Jenom samostatné měření a provádění jednotlivých inspekcí se skládá z variabilních a fixních nákladů. Fixní náklady, které označíme C_F jsou náklady, které se při odběru vzorků nemění, jsou konstatní. Variabilní náklady, které označíme C_V jsou náklady, které jsou závislé na počtu odběru vzorků. Budeme-li odebírat více vzorků, budou variabilní náklady růst. Vztahem $C_s = C_F + mC_V$ vyjádříme náklady na jednu inspekci, kde m je rozsah výběru vzorku. Tyto náklady jsou spojené se zaznamenáním dat do regulačního diagramu.

V průběhu sledování regulované veličiny často dochází k falešným signálům. Náklady na vyhledání falešného signálu označíme jako C_f . V případě, že nedošlo k falešnému signálu, a nastala zjizvitelná příčina, vzniknou nám náklady na vyhledání zjizvitelné příčiny (poruchy v procesu), které označíme C_z . Po určité době nalezneme zjizvitelnou příčinu a náklady na její opravení, které označíme C_r . Náklady na kvalitu, kdy je proces ve stavu pod statistickou kontrolou, označíme C_I a náklady na kvalitu mimo statistickou kontrolu označíme C_O .

V daných příkladech, které uvažujeme dále, pokládáme tyto výše popsané náklady za vstupní parametry, které jsme získali z dřívějších měření sledovaného výrobního procesu. Vzhledem k tomu, že na proces výroby mají podstatný vliv náhodné vlivy, není možno veškeré náklady na jeho řízení určit předem. Nicméně, máme-li alespoň hrubou představu o rozdělení pravděpodobnosti těchto náhodných vlivů, můžeme při použití metod matematické statistiky spočítat odpovídající očekávané náklady, očekávaný počet falešných

signálů, očekávanou hodinovou ztrátu a podobně. Tuto terminologii budeme používat v dalším textu. Prvním typem jsou očekávané náklady na kvalitu za cyklus procesu, které označíme jako C_Q . Druhým typem jsou očekávané náklady na odběr vzorků za cyklus procesu, které označíme jako C_S . Posledním typem jsou očekávané náklady na detekování a opravení zjistitelné příčiny, které označíme jako C_D . Pokud tyto tři typy očekávaných nákladů sečteme, dostaneme celkové očekávané náklady za cyklus v procesu. Tyto očekávané náklady jsou dále podrobněji popsány v odstavcích této kapitoly.



Cyklus obnovy

Obr. 3.7: Celková délka cyklu procesu.

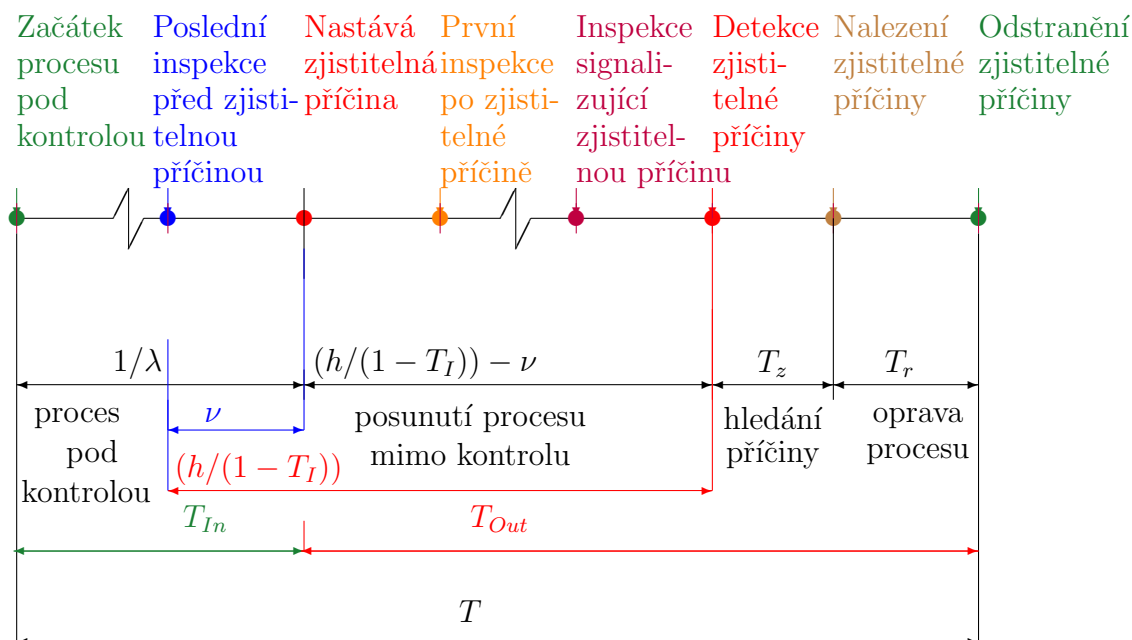
Dobu, ve které vznikají tyto očekávané náklady, můžeme rozdělit na několik částí, které si zde podrobněji rozebereme. Před zahájením statistického řízení předpokládáme, že proces je ve stavu pod statistickou kontrolou. Tento stav trvá po dobu, kterou označíme T_{In} . V neznámém časovém okamžiku ν v procesu dojde ke vzniku zjistitelné příčiny (k poruše), která způsobí odchylku sledovaných charakteristik od požadované úrovně, čímž se proces dostane do stavu mimo statistickou kontrolu. Délku trvání toho stavu označíme T_{Out} . Sečteme-li tyto dvě doby, dostaneme celkovou délku cyklu $T = T_{In} + T_{Out}$. Pro účely optimalizace budeme uvažovat jemnější rozdělení cyklu T . Předpokládejme, že zjistitelná příčina a s ní související posun v chování procesu nastala mezi s -tou a $(s + 1)$ -ní inspekcí. Dobu od počátku běhu procesu do s -té inspekce označíme T_s . V tomto období odebíráme vzorky a výrobní proces je ve stavu pod statistickou kontrolou. Dobu od s -té inspekce do m -té inspekce jež signalizuje zjistitelnou příčinu, označíme jako T_d . Dobu potřebnou k zakreslení a výpočtu standardních testů jednoho výsledku při inspekci, je-li proces mimo statistickou kontrolu, označíme jako T_{gn} . Symbolem T_z označíme dobu potřebnou k vyhledání zjistitelné příčiny, která způsobila posun ve výrobním procesu. Pátý časový úsek T_r představuje dobu potřebnou k opravě výrobního procesu a jeho navrácení do stavu pod statistickou kontrolou. Tato doba se do celkové délky cyklu započítává pouze tehdy, pokud výrobní proces vyrábí v průběhu opravy. Pokud proces po dobu opravy stojí, to znamená, že je čas $T_r = 0$, tak se do celkové délky cyklu nezapočítává. Na Obr. 3.7 je zobrazena celková délka cyklu výrobního procesu. V dalším textu budeme předpokládat, že doba mezi inspekcemi h se po dobu regulace procesu nemění. Dále předpokládejme, že známe rozdělení doby do vzniku zjistitelné příčiny (doby do poruchy), viz [8], [9], [56].

3.3 Ekonomicko-statistické modely bez údržby

3.3.1 Základní ekonomicko-statistický model bez údržby

První ekonomicko-statistický model, který vycházel z Shewhartova regulačního diagramu, který navrhl v roce 1956 A. J. Duncan, viz [33]. V daném modelu uvažoval náklady na inspekce, náklady na vadné produkty, náklady na vyhledání falešného signálu, náklady na vyhledání a odstranění zjištěné příčiny. V daném modelu budeme uvažovat celkovou délku cyklu, která je zobrazena na Obr. 3.8.

Začátek regulace procesu je ve stavu pod statistickou kontrolou se střední hodnotou sledované veličiny X na požadované úrovni δ_0 . Inspekce provádíme po h hodinách. V době ν nastane zjištěná příčina, která způsobí posunutí střední hodnoty. Posun ve střední hodnotě je $\delta\sigma$, zatímco $\delta_0 \pm \delta\sigma$ je hodnota procesu poté, co nastala zjištěná příčina. V uvažovaném modelu je sledovanou veličinou aritmetický průměr m měření provedených při jedné inspekci, CL je rovna δ_0 . Regulační meze jsou rovny $UCL = \delta_0 + k(\sigma/\sqrt{m})$, respektive $LCL = \delta_0 - k(\sigma/\sqrt{m})$. Při hledání zjištěné příčiny, výrobní proces nezastavujeme, snažíme se pouze upravovat parametry daného procesu. Předpokládáme přitom, že známe parametry, to je střední hodnotu procesu δ_0 , posun v procesu δ a směrodatnou odchylku měření σ . Mezi optimalizované proměnné parametry patří rozsah výběru m , doba mezi inspekcemi h a šířka regulačních mezí k , viz [8], [9], [33], [34], [35], [64], [79].



Cyklus obnovy

Obr. 3.8: Délka cyklu procesu pro základní ekonomicko-statistický model bez údržby.

Předpokládejme, že sledovaný proces je ve stavu pod statistickou kontrolou v čase $t = e^{-\lambda t}$. Potom pravděpodobnost výskytu nějaké události v čase od t do $t + \Delta$ je rovna $\lambda e^{-\lambda t} \Delta$. Střední doba, než nastane zjistitelná příčina, je rovna $1/\lambda$. Po určitém čase detekujeme zjistitelnou příčinu. Předpokládejme, že to nastane mezi i -tou a $(i+1)$ -ní inspekcí. Okamžik ν v časovém intervalu $\langle ih, (i+1)h \rangle$, ve kterém nastane zjistitelná příčina, lze vyjádřit pomocí podmíněné střední hodnoty:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\int_{ih}^{(i+1)h} e^{-\lambda t} \lambda (t - ih) dt}{\int_{ih}^{(i+1)h} e^{-\lambda t} \lambda dt} = \frac{[-\lambda^{-1} e^{-\lambda t} (1 + \lambda t) + (hi) e^{-\lambda t}]_{hi}^{(i+1)h}}{[-e^{-\lambda t}]_{hi}^{(i+1)h}} = \\ &= \frac{1 - (1 + \lambda h) e^{-\lambda h}}{\lambda (1 - e^{-\lambda h})} \doteq \frac{h}{2} - \frac{\lambda h^2}{12}. \end{aligned} \quad (3.3.1.1)$$

Pravděpodobnost, že detekujeme zjistitelnou příčinu, je rovna:

$$P = \int_{-\infty}^{-k - \delta \sqrt{m}} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz + \int_{k - \delta \sqrt{m}}^{\infty} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz.$$

Pravděpodobnost, že nedetekujeme zjistitelnou příčinu, je dána vztahem:

$$Q = 1 - P.$$

Zjistitelná příčina nastává uvnitř některého z intervalů mezi dvěma inspekcemi. Očekávaná doba, která uplyne od poslední inspekce do vzniku zjistitelné příčiny před následnou inspekcí je rovna:

$$\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda h}{12} \right) h = ah,$$

kde označíme $a = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda h}{12} \right)$. Potom dobu, kdy je proces mimo statistickou kontrolu označíme $T_{Out} = ah + T_{gn} + T_r$, kde symbol T_g označuje dobu potřebnou k zakreslení a výpočtu standardních testů jednoho výsledku při inspekci, je-li proces mimo statistickou kontrolu a T_r je doba potřebná k opravení zjistitelné příčiny po spuštění signálu. Celkovou délku cyklu procesu tedy vyjádříme jako:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} + T_{Out}.$$

Relativní doba, kterou proces setrvává ve stavu pod statistickou kontrolou, je definována jako:

$$T_I = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + T_{Out}} = \frac{1}{1 + \lambda T_{Out}}.$$

Relativní doba setrvání procesu mimo statistickou kontrolu je definována jako:

$$T_O = \frac{T_{Out}}{\frac{1}{\lambda} + T_{Out}} = \frac{\lambda T_{Out}}{1 + \lambda T_{Out}}.$$

Střední počet inspekcí, které budou provedeny než dojde k posunu v procesu do stavu mimo statistickou kontrolu, lze vyjádřit vztahem:

$$\begin{aligned}
s &= \sum_{i=0}^{\infty} iP(\text{zjistitelná příčina se vyskytne mezi } i\text{-tým a } (i+1)\text{-ním vzorkem}) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} i[e^{-\lambda hi} - e^{-\lambda h(i+1)}] = (1 - e^{-\lambda h}) \sum_{i=0}^{\infty} ie^{-\lambda hi} = -(1 - e^{-\lambda h}) \frac{d}{d(\lambda h)} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda hi} = \\
&= -(1 - e^{-\lambda h}) \frac{d}{d(\lambda h)} \frac{1}{1 - e^{-\lambda h}} = \frac{(1 - e^{-\lambda h})e^{-\lambda h}}{(1 - e^{-\lambda h})^2} = \frac{e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}}. \tag{3.3.1.2}
\end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že odebraný vzorek padne mimo regulační meze, je rovna:

$$\alpha = 2 \int_k^{\infty} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz.$$

Očekávaný počet falešných signálů, než dojde k posunu v procesu do stavu mimo statistickou kontrolu je α krát počet vzorků s za dané období, to je:

$$\alpha s = \alpha \frac{e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} \doteq \frac{\alpha}{\lambda h}.$$

Očekávaný počet falešných signálů za hodinu v procesu bude přibližně:

$$\frac{\frac{\alpha}{\lambda h}}{\frac{1}{\lambda} + T_{Out}} = \frac{T_I \alpha}{h}.$$

Očekávanou hodinovou ztrátu v průběhu jednoho cyklu běhu procesu lze vyjádřit vztahem:

$$R \doteq T_I C_I + T_O C_O + T_I \frac{\alpha C_f}{h} + \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + T_{Out}} C_{zr} + \frac{C_s}{h}.$$

Jestliže označíme $M = C_O - C_I$, a protože je $T_I + T_O = 1$, dostaneme:

$$R \doteq T_I C_I + T_O M + T_I \frac{\alpha C_f}{h} + \frac{\lambda}{1 + T_{Out} \lambda} C_{zr} + \frac{C_s}{h}.$$

Po nahrazení hodnot T_O a T_I ve druhém a třetím členu dostaneme I , které je přibližné minimum pro hodnoty rozsahu výběru m , dobu mezi inspekcemi h a šířkou regulačních mezí k , z kterých dostaneme vztah:

$$R \doteq T_I C_I + \frac{\lambda M T_{Out} + \frac{\alpha C_f}{h} + \lambda C_{zr}}{1 + \lambda T_{Out}} + \frac{C_s}{h}.$$

Úkolem optimalizace je minimalizovat ztrátovou funkci R vzhledem k proměnným rozsahu výběru m , dobou mezi inspekcemi h a šířkou regulačních mezí k . Je zřejmé, že toto minimum nezávisí na nákladech C_I , kdy je proces ve stavu pod statistickou kontrolou. Proto pro minimalizaci použijeme ztrátovou funkci ve tvaru:

$$L = \frac{\lambda M T_{Out} + \frac{\alpha C_f}{h} + \lambda C_{zr}}{1 + \lambda T_{Out}} + \frac{C_s}{h}. \tag{3.3.1.3}$$

Proto, abychom našli optimální hodnoty proměnných parametrů mezi něž patří rozsah výběru m , doba mezi inspekcemi h a šířka regulačních mezí k , musíme minimalizovat ztrátovou funkci L ze vzorce (3.3.1.3) vzhledem k těmto parametrům. Přitom uvažujeme, že známe parametry $\delta, \lambda, M, T_g, T_r, C_f, C_{zr}, C_F$ a C_V . Pro výpočet minima ztrátové funkce L ze vzorce (3.3.1.3) použijeme parciální derivace, které položíme rovny nule. To vede k soustavě rovnic:

$$\lambda h \frac{\partial T_{Out}}{\partial m} \left(M - \frac{\alpha C_f}{h} - \lambda C_{zr} \right) + C_V (1 + \lambda T_{Out})^2 = 0, \quad (3.3.1.4)$$

$$\lambda h^2 \frac{\partial T_{Out}}{\partial h} \left(M - \frac{\alpha C_f}{h} - \lambda C_{zr} \right) - \alpha C_f (1 + \lambda T_{Out}) - C_s (1 + \lambda T_{Out})^2 = 0, \quad (3.3.1.5)$$

$$\lambda \frac{\partial T_{Out}}{\partial k} \left(M - \frac{\alpha C_f}{h} - \lambda C_{zr} \right) + \frac{C_f}{h} \frac{\partial \alpha}{\partial k} (1 + \lambda T_{Out}) = 0, \quad (3.3.1.6)$$

kde

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{Out}}{\partial m} &= -\frac{h}{P^2} \frac{\partial P}{\partial m} + T_g, \\ \frac{\partial T_{Out}}{\partial h} &= \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda h}{6} \right), \\ \frac{\partial T_{Out}}{\partial k} &= -\frac{h}{P^2} \frac{\partial P}{\partial k}. \end{aligned}$$

Ukazuje se (viz [33]), že členy $\alpha \frac{C_f}{h}$, λC_{zr} , T_g a λT_{Out} lze ve výše uvedených rovnicích zanedbat. Přibližnou aproximací původní soustavy rovnic (3.3.1.4), (3.3.1.5), (3.3.1.6) dostaneme soustavu rovnic ve tvaru:

$$-\frac{\lambda h^2 M}{P^2} \frac{\partial P}{\partial m} + C_V \doteq 0, \quad (3.3.1.7)$$

$$\lambda h^2 M \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2} \right) - \alpha C_f - C_s \doteq 0, \quad (3.3.1.8)$$

$$-\frac{\lambda h^2 M}{P^2} \frac{\partial P}{\partial k} + C_f \frac{\partial \alpha}{\partial k} \doteq 0. \quad (3.3.1.9)$$

Z rovnice (3.3.1.8) ihned můžeme vyjádřit dobu mezi inspekcemi h :

$$h \doteq \sqrt{\frac{\alpha C_f + C_s}{\lambda M \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2} \right)}}. \quad (3.3.1.10)$$

Dosazením tohoto výrazu do rovnice (3.3.1.7) dostaneme:

$$-m + \frac{P^2 \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2} \right)}{\frac{\partial P}{\partial m}} \doteq \frac{\alpha C_f + C_F}{C_V}. \quad (3.3.1.11)$$

Z rovnice (3.3.1.9) s použitím (3.3.1.7) dostáváme:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial k} = -\frac{2C_V\sqrt{m}}{\delta C_f},$$

a odtud

$$\frac{e^{-k^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{C_V\sqrt{m}}{\delta C_f}. \quad (3.3.1.12)$$

Výslednou soustavu nelineárních rovnic o třech neznámých, kterými jsou rozsah výběru m , doba mezi inspekcemi h a šířka regulačních mezí k , lze řešit různými způsoby. Základní ekonomicko-statistický model bez údržby, viz [33] vychází ze vztahu (3.3.1.3), z něhož odvozujeme přibližnou hodnotu šířky regulačních mezí k pro různě zvolené rozsahy výběru m . Jeho výpočet počítá s hodnotou rozsahu výběru m jako s reálným číslem a vyžaduje jeho zaokrouhlování. Při hledání minima jsme vycházeli z celočíselných hodnot rozsahu výběru m , $1 \leq m \leq 25$. To znamená, pracovali jsme na celočíselné míře. K nim jsme dopočítávali hodnotu šířky regulačních mezí k z (3.3.1.12), hodnoty P a α a nakonec ze vztahu (3.3.1.10) jsme získali hodnotu doby mezi inspekcemi h . Výsledky jsou uvedeny v Tab. 3.6. Další možností je využití některé z numerických metod pro hledání extrému funkce více proměnných. Pro tyto výpočty byla použita Nelder-Meadova simplexova metoda, jejíž zdrojový kód je uveden v příloze 6.

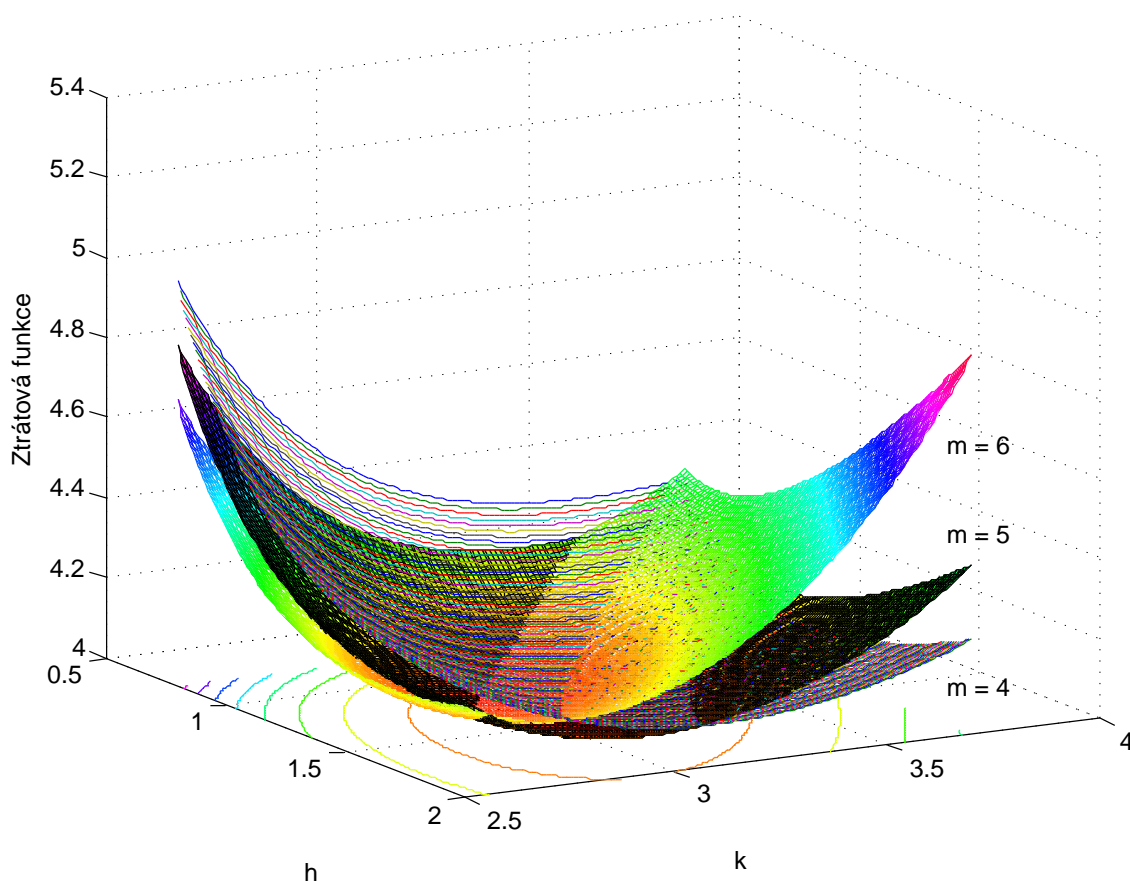
Příklad: Uvažujme proces řízený Shewhartovým regulačním diagramem, kde předpokládáme vstupní parametry procesu, z kterých vypočítáme optimální ztrátovou funkci daného výrobního procesu. Předpokládáme posunutí ve střední hodnotě $\delta = 2$, pravděpodobnost vzniku poruchy $\lambda = 0.01$, náklady za hodinu procesu ve stavu pod statistickou kontrolou snižené o náklady ve stavu mimo statistickou kontrolu $M = 100$ Kč. Předpokládáme dobu potřebnou k zakreslení a výpočtu standardních testů jednoho výsledku při inspekci, je-li proces mimo statistickou kontrolu $T_g = 0.05$ h a dobu k nalezení zjistitelné příčiny $T_r = 2$ h. Dále známe náklady na falešný signál $C_f = 50$ Kč, náklady na vyhledání a odstranění zjistitelné příčiny $C_{zr} = 25$ Kč, náklady závislé na odebrání počtu vzorků a zakreslení výběrového bodu do regulačního digramu $C_V = 0.10$ Kč a náklady, které nezávisí na počtu odběru vzorků $C_F = 0.10$ Kč.

a) Pokud vycházíme z rovnic (3.3.1.12), (3.3.1.10) a (3.3.1.3) tak, že postupně volíme rozsah výběru m od 1 do 25 a dopočítáváme hodnoty regulačních mezí k a dobu mezi inspekcemi h , z těchto navolených hodnot vypočítáme hodnotu ztrátové funkce L . Zde je uvedena tabulka pro rozsah výběru $m = 1, \dots, 10$, z níž vybereme řádek s minimální hodnotou L , viz Tab. 3.6.

b) Použitím Nelder-Meadovy simplexové metody dostaneme řešení, které je nejbližší minimu ztrátové funkce L . Toto řešení ovšem nerespektuje celočíselnost proměnné rozsahu výběru m , je tedy pro nás spíše orientační. Výsledek této optimalizace při zadaných parametrech je hodnota ztrátové funkce $L = 4.0121$ pro rozsah výběru $m = 4.8054$, dobu mezi inspekcemi $h = 1.3863$ a šířkou regulačních mezí $k = 3.0571$.

c) Pro srovnání jsou uvedeny výsledky pomocí prohledávání v dvojrozměrné oblasti pro dobu mezi inspekcemi h a šířkou regulačních mezí k s krokem 0.001 při různých volbách rozsahu výběru $m = 1, \dots, 25$. Výsledek této optimalizace při zadaných parametrech je hodnota ztrátové funkce $L = 4.0133$ pro hodnoty rozsahu výběru $m = 5$, dobou mezi inspekcemi $h = 1.4072$ a šířkou regulačních mezí $k = 3.0822$. V tomto případě jsou výsledky nejbližší výsledkům uvedeným, viz [33].

Na Obr. 3.9 jsou znázorněny výsledky minimální ztrátové funkce pro různé hodnoty rozsahu výběru $m = 4, m = 5$ a $m = 6$.



Obr. 3.9: Průběh ztrátové funkce základního ekonomicko-statistického modelu bez údržby pro různé hodnoty rozsahu výběru $m = 4, m = 5$ a $m = 6$.

m	k	α	P	h	T_{Out}	L
1	3.4609	0.00053843	0.0720	0.2164	4.9467	7.8426
2	3.3592	0.00078157	0.2978	0.5085	3.5536	5.1239
3	3.2983	0.00097260	0.5658	0.8183	3.1876	4.3666
4	3.2544	0.0011	0.7720	1.0969	3.0733	4.0950
5	3.2200	0.0013	0.8947	1.3126	3.0621	4.0230
6	3.1915	0.0014	0.9561	1.4645	3.1012	4.0484
7	3.1673	0.0015	0.9832	1.5714	3.1647	4.1210
8	3.1461	0.0017	0.9940	1.6530	3.2388	4.2143
9	3.1274	0.0018	0.9980	1.7217	3.3168	4.3151
10	3.1105	0.0019	0.9993	1.7840	3.3958	4.4175

Tab. 3.6: Minimalizovaná ztrátová funkce (L) za hodinu v procesu při optimalizovaných proměnných mezi něž patří rozsah výběru m , doba mezi inspekcemi h a šířka regulačních mezí k pro základní ekonomicko-statistický model bez údržby.

3.3.2 Rozšířený ekonomicko-statistický model bez údržby

V roce 1986 T. J. Lorenzen a L. C. Vance navrhli rozšířený ekonomicko-statistický model bez údržby, který v sobě zahrnuje náklady na vyhledání falešného signálu, náklady na vyhledání a odstranění zjištěné příčiny, náklady na vadné produkty a náklady na inspekce. Délka cyklu je složena z doby ve stavu pod statistickou kontrolou T_{In} a doby mimo statistickou kontrolu T_{Out} , která je na Obr. 3.10. Dobu, kterou potřebujeme na vyhledání falešného signálu, označíme T_f . Dobu, kterou potřebujeme na vyhledání zjištěné příčiny, označíme T_z a dobu na její odstranění označíme jako T_r . Očekávaná doba setrvání pod statistickou kontrolou a mimo ni jsou dány rovnicemi (3.3.2.1) a (3.3.2.2).

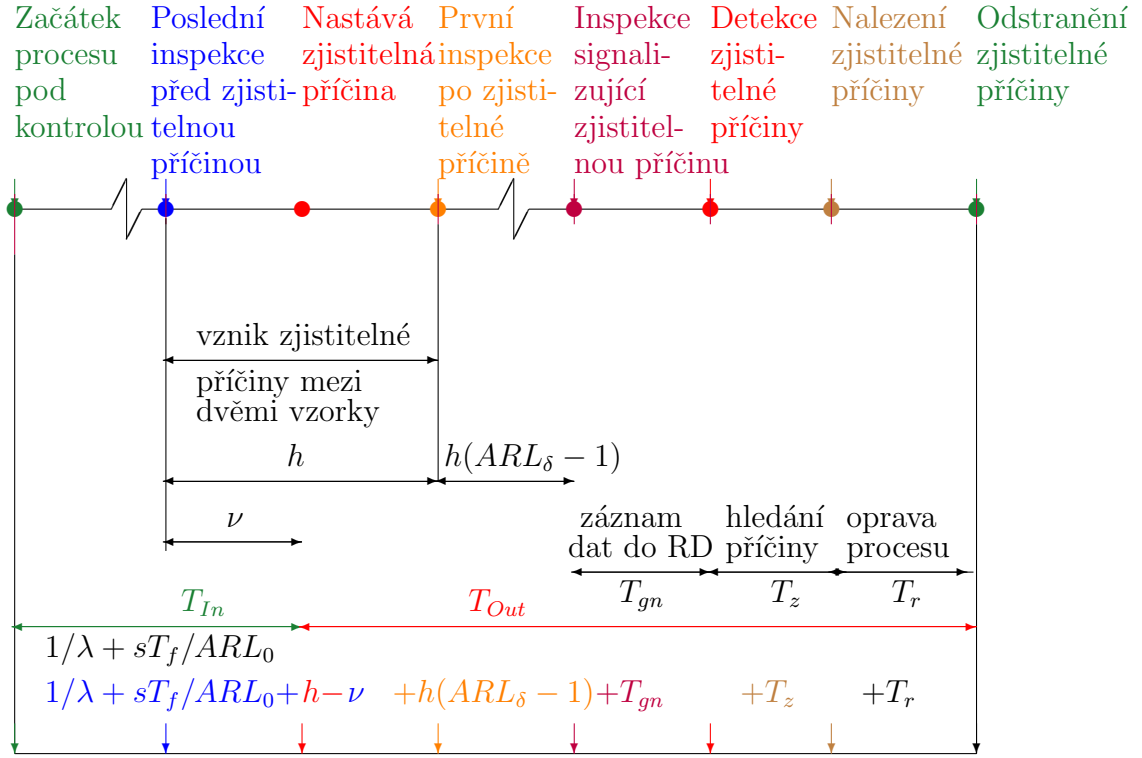
$$E(T_{In}) = \frac{1}{\lambda} + \frac{(1 - \gamma_z)sT_f}{ARL_0}, \quad (3.3.2.1)$$

První člen na pravé straně rovnice (3.3.2.1) vyjadřuje očekávanou dobu do poruchy běžícího procesu. Druhý člen prodlužuje dobu, kdy je proces pod statistickou kontrolou o intervaly, ve kterých proces stojí a my detekujeme falešný signál. Parametr γ_z je indikátorem běhu procesu: je roven jedné, pokud proces po dobu detekce běží a je roven nule v případě, že proces v průběhu detekce neběží.

$$E(T_{Out}) = -\nu + T_{gn} + h(ARL_\delta) + T_z + T_r. \quad (3.3.2.2)$$

Celková doba, kdy je proces mimo statistickou kontrolu v sobě zahrnuje čtyři části. První je doba, kdy nastane zjištěná příčina v procesu, aniž by byla detekována regulačním diagramem. Jde o dobu mezi prvním odběrem vzorku a okamžikem vzniku zjištěné příčiny v procesu, která je rovna $(h - \nu)$, kde ν je okamžik, kdy nastane zjištěná příčina mezi i -tým a $(i + 1)$ -ním vzorkem. Druhou část tvoří doba, která signalizuje stav mimo statistickou kontrolu je $h(ARL_\delta - 1)$.

Třetí část obsahuje dobu potřebnou k zakreslení a výpočtu standardních testů jednoho výsledku při inspekci, je-li proces mimo statistickou kontrolu, kterou označíme jako T_g . Konečně čtvrtá část je složena z doby na vyhledání zjistitelné příčiny T_z a doby k odstranění zjistitelné příčiny (odstranění poruchy) v procesu označíme jako T_r , viz [8], [9], [12], [51], [53], [54].



Obr. 3.10: Délka cyklu procesu pro rozšířený ekonomicko-statistický model bez údržby.

Očekávaná délka celého cyklu je rovna:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} + \frac{(1 - \gamma_z)sT_f}{ARL_0} - \nu + T_{gn} + h(ARL_\delta) + T_z + T_r,$$

kde ν je vyjádřeno ve vztahu (3.3.1.1) a s ve vztahu (3.3.1.2) a

$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}$, kde $\alpha = P(\text{nastane signál} \mid \text{proces pod kontrolou})$,

$ARL_\delta = \frac{1}{1-\beta}$, kde $\beta = P(\text{nenastává signál} \mid \text{proces mimo kontrolu})$.

Pokud výroba běží během opravy, pak je $\gamma_r = 1$. Pokud ale je výroba během opravy zastavena, pak je $\gamma_r = 0$. Očekávané náklady plynoucí z nekvalitní výroby za cyklus jsou rovny:

$$E(C_Q) = \frac{C_I}{\lambda} + C_O \left(-\nu + T_{gn} + h(ARL_\delta) + \gamma_z T_z + \gamma_r T_r \right).$$

Očekávané náklady na detekci a opravu zjistitelné příčiny jsou rovny:

$$E(C_D) = \frac{sC_f}{ARL_0} + C_{zr}.$$

Očekávané náklady na odběr vzorků za cyklus vyjádříme jako:

$$E(C_S) = \frac{C_s \left(\frac{1}{\lambda} - \nu + T_{gn} + h(ARL_\delta) + \gamma_z T_z + \gamma_r T_r \right)}{h}.$$

Celkovou ztrátovou funkci lze vyjádřit jako:

$$E(L) = \frac{E(C_Q) + E(C_D) + E(C_S)}{E(T)}.$$

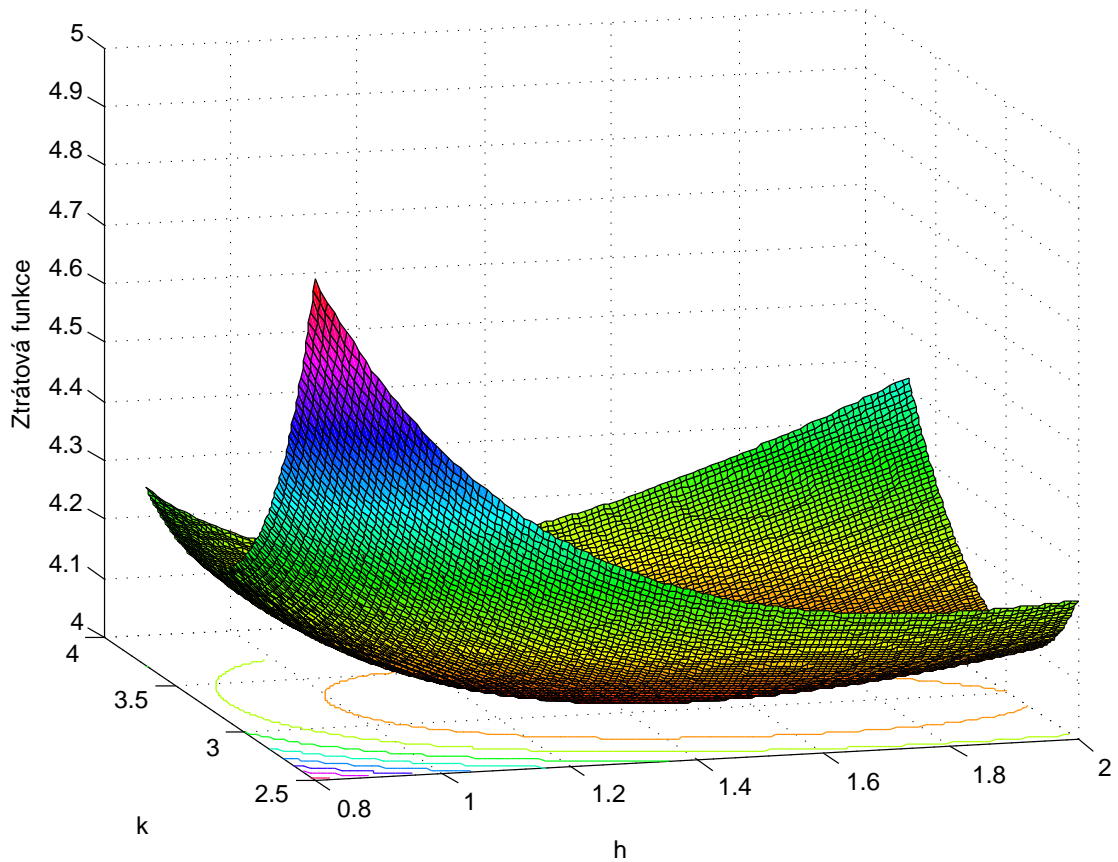
V tomto případě je třeba použít některou z numerických metod pro hledání extrému funkce více proměnných. K nalezení optimálních parametrů rozsahu výběru m , dobu mezi inspekcemi h a šířkou regulačních mezí k byly v literatuře publikovány počítačové programy napsané v jazyce FORTRAN (viz [53], [54]). Nabízí se zde také Nelderova-Meadova simplexová metoda (viz [57]), jejíž algoritmus je počítán pomocí počítačového programu Matlab, který je uveden v příloze 6.

Příklad: Uvažujme proces řízený Shewhartovým regulačním diagramem, kde předpokládáme vstupní parametry procesu, z kterých vypočítáme optimální ztrátovou funkci daného výrobního procesu. Předpokládáme posunutí ve střední hodnotě $\delta = 2$, pravděpodobnost vzniku poruchy $\lambda = 0.01$, náklady za hodinu procesu ve stavu mimo statistickou kontrolu činí $C_O = 100$ Kč a náklady za hodinu procesu ve stavu pod statistickou kontrolou činí $C_I = 0$ Kč. Předpokládáme dobu potřebnou k zakreslení a výpočtu standardních testů jednoho výsledku při inspekcii, je-li proces mimo statistickou kontrolu $T_g = 0.05$ h a dobu k nalezení zjistitelné příčiny $T_r = 2$ h. Dále známe náklady na falešný signál $C_f = 50$ Kč, náklady na vyhledání a odstranění zjistitelné příčiny $C_{zr} = 25$ Kč, náklady závislé na odebrání počtu vzorků a zakreslení výběrového bodu do regulačního diagramu $C_V = 0.10$ Kč a náklady, které nezávisí na počtu odběru vzorků $C_F = 0.10$ Kč. Dobu na vyhledání falešného signálu T_f a dobu na vyhledání zjistitelné příčiny T_z neuvažujeme.

a) Použitím Nelder-Meadovy simplexové metody dostaneme řešení, které je nejbližší minimu ztrátové funkce L . Toto řešení ovšem nerespektuje celočíselnost proměnné rozsahu výběru m a je tedy pro nás spíše orientační. Výsledkem této optimalizace je ztrátová funkce $L = 4.0116$ pro hodnoty rozsahu výběru $m = 4.8020$, dobu mezi inspekcemi $h = 1.3870$ a šířkou regulačních mezí $k = 3.0547$. V tomto případě vychází nejlepší výsledek ztrátové funkce, viz Obr. 3.11.

b) Pro srovnání je uveden výsledek pomocí prohledávání v dvojrozměrné oblasti pro dobu mezi inspekcemi h a šířkou regulačních mezí k s krokem 0.001 při různých volbách rozsahu výběru $m = 1, \dots, 25$. Výsledek této optimalizace při zadaných parametrech je hodnota ztrátové funkce $L = 4.0128$ pro hodnoty rozsahu výběru $m = 5$, dobu mezi inspekcemi $h = 1.4080$ a šířkou regulačních mezí $k = 3.0800$.

c) Pro srovnání jsou zde uvedeny hodnoty ztrátové funkce, viz [53] Tab. 3.7, které byly počítány pomocí rozšířeného ekonomicko-statistického modelu bez údržby.



Obr. 3.11: Průběh ztrátové funkce v rozšířeném ekonomicko-statistickém modelu bez údržby pro hodnotu rozsahu výběru $m = 5$.

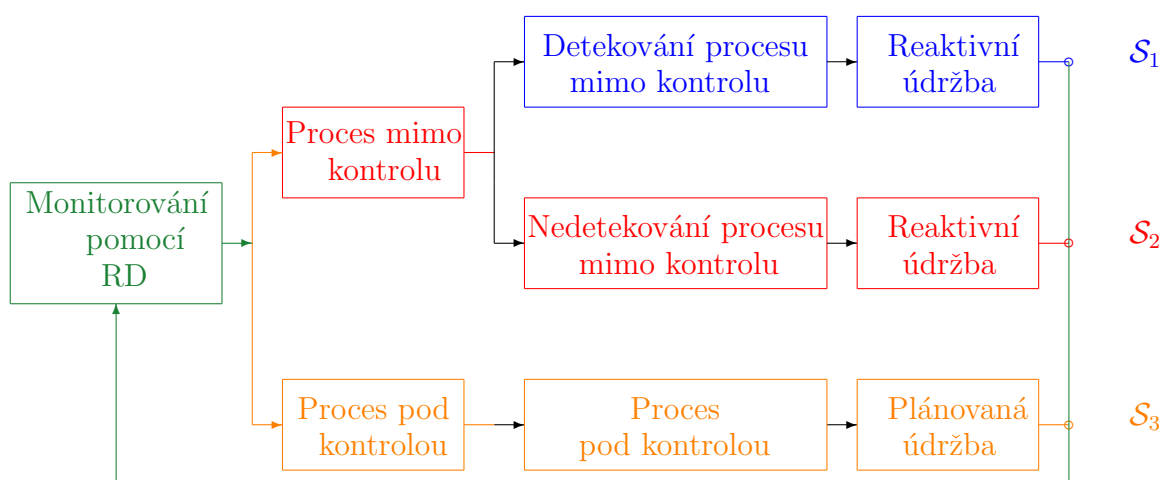
k	m	h	α	P	ATS	L
2.80	5	1.60	0.005	0.953	1.679	4.057
2.85	6	1.60	0.004	0.980	1.633	4.101
2.90	6	1.60	0.004	0.977	1.637	4.086
2.95	6	1.60	0.003	0.974	1.642	4.074
3.00	6	1.60	0.003	0.971	1.647	4.064
3.05	6	1.60	0.002	0.968	1.653	4.058
3.10	6	1.50	0.002	0.964	1.556	4.052
3.15	7	1.60	0.002	0.984	1.626	4.122
3.20	7	1.60	0.001	0.982	1.630	4.117

Tab. 3.7: Minimalizovaná ztrátová funkce (L) za hodinu v procesu při optimalizovaných proměnných mezi něž patří rozsah výběru m , doba mezi inspekcemi h a šířka regulačních mezí k pro rozšířený ekonomicko-statistický model bez údržby, viz [53].

3.4 Ekonomicko-statistické modely s údržbou

3.4.1 Základní ekonomicko-statistický model s údržbou

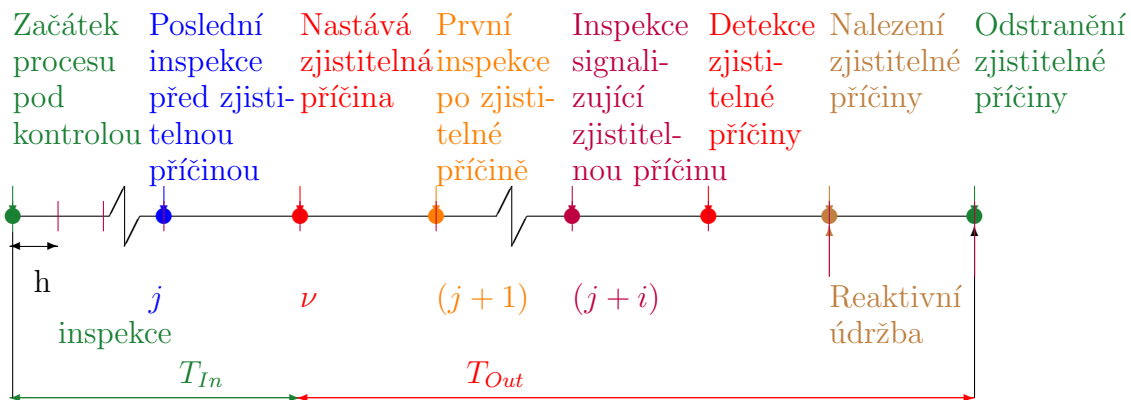
Základní ekonomicko-statistický model s údržbou se skládá ze tří scénářů, jak je vidět na Obr. 3.12. Průběh procesu zaznamenáváme do regulačních diagramů, z kterých zjišťujeme, zda je proces pod statistickou kontrolou nebo není. Pokud je ve stavu pod statistickou kontrolou, provedeme v plánovaném čase údržbu procesu, která předchází poruše v procesu a reaktivní údržbě. Reaktivní údržbu provádíme tehdy, kdy regulační diagram detekuje proces mimo statistickou kontrolu. Po provedení reaktivní nebo plánované údržby se proces vrací do stavu pod statistickou kontrolou, viz [8], [9], [49], [50].



Obr. 3.12: Základní ekonomicko-statistický model s údržbou.

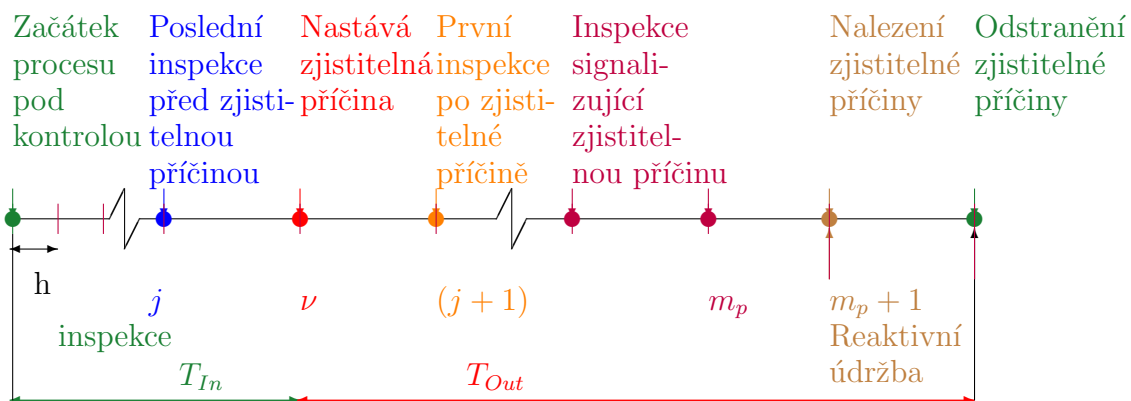
Ve všech třech scénářích předpokládáme, že začínáme ve stavu pod statistickou kontrolou, inspekce provádíme po h hodinách a po údržbě se proces vrací do stavu „jako nový“.

Ve scénáři (S_1) podle Obr. 3.13 předpokládáme, že v intervalu mezi j -tou a $(j + 1)$ -ní inspekcí dojde ke zjistitelné příčině, která posune proces mimo statistickou kontrolu. Po zakreslení výsledků do regulačního diagramu, detekujeme zjistitelnou příčinu. Regulační diagram signalizuje stav mimo statistickou kontrolu mezi $(j + i)$ -tou inspekcí. Zjistíme, zda signál je oprávněný. Pokud ano, hledáme zjistitelnou příčinu, která způsobila posun v procesu. Po identifikování zjistitelné příčiny provedeme reaktivní údržbu, která vrátí proces do stavu pod statistickou kontrolou.



Obr. 3.13: Scénář (\mathcal{S}_1) (detekování procesu mimo kontrolu).

Ve scénáři (\mathcal{S}_2) podle Obr. 3.14 dojde k posunu procesu v intervalu mezi j -tou a $(j+1)$ -ní inspekcí, nicméně proces pokračuje, protože regulační diagram nedetekoval posun v procesu, a tudíž nevyslal signál, že je proces mimo statistickou kontrolu před plánovanou údržbou. V $(m_p + 1)$ -ním intervalu by měla začít plánovaná preventivní údržba nicméně, protože je indikován stav mimo statistickou kontrolu bude provedena reaktivní údržba, která odstraní problém na zařízení a uvede jej do stejného stavu jako plánová preventivní údržba.



Obr. 3.14: Scénář (\mathcal{S}_2) (nedetekování procesu mimo kontrolu).

Ve scénáři (\mathcal{S}_3) dle Obr. 3.15 začínáme ve stavu pod statistickou kontrolou a jsme ve stavu pod statistickou kontrolou i před provedením plánované údržby. Plánovaná údržba se uskutečňuje v $(m_p + 1)$ -ním vzorkovacím intervalu, tato údržba zabrání poruše v procesu. Plánovaná údržba je méně nákladná než reaktivní údržba, protože přípravné práce mohou být provedeny za běhu procesu před zahájením této údržby.

Celková očekávaná doba ze scénáře (\mathcal{S}_1), která je dána součtem doby pod statistickou kontrolou a doby mimo statistickou kontrolu ze scénáře (\mathcal{S}_1), je:

$$E[T|\mathcal{S}_1] = E[T_{in}|\mathcal{S}_1] + E[T_{out}|\mathcal{S}_1].$$

Vezmeme-li do úvahy možnost zastavení procesu v dobách identifikace falešných signálů (viz (3.3.2.1)), dostáváme:

$$E[T_{in}|\mathcal{S}_1] = \int_0^{m_p h} t f^{Tr}(t; m_p + 1) dt + (1 - \gamma_z) \frac{sT_f}{ARL_0},$$

kde s je počet inspekcí, které proběhnou, když je proces pod statistickou kontrolou ve scénáři (\mathcal{S}_1).

$$E[T_{out}|\mathcal{S}_1] = hARL_\delta - \nu + T_{gn} + T_z + T_R,$$

kde $\nu = \sum_{i=0}^{m_p} \int_{ih}^{(i+1)h} (t - ih) f^{Tr}(t; m_p + 1) dt$.

Celkové očekávané náklady ze scénáře (\mathcal{S}_1) jsou součtem očekávaných nákladů ze ztráty kvality, očekávaných nákladů na vzorkování a očekávaných nákladů na vyhledání falešného signálu a údržbu:

$$E[C|\mathcal{S}_1] = E[C_Q|\mathcal{S}_1] + E[C_S|\mathcal{S}_1] + E[C_D|\mathcal{S}_1].$$

Očekávané náklady ze ztráty kvality ve scénáři (\mathcal{S}_1) jsou:

$$E[C_Q|\mathcal{S}_1] = C_I \int_0^{m_p h} t f^{Tr}(t; m_p + 1) dt + C_O \left[hARL_\delta - \nu + T_{gn} + \gamma_z T_z + \gamma_R T_R \right].$$

Očekávané náklady na vzorkování ve scénáři (\mathcal{S}_1) jsou:

$$E[C_S|\mathcal{S}_1] = C_s \frac{\int_0^{m_p h} t f^{Tr}(t; m_p + 1) dt + h(ARL_\delta) - \nu + T_{gn} + \gamma_z T_z + \gamma_R T_R}{h}.$$

Očekávané náklady na vyhledání falešného signálu a údržbu jsou:

$$E[C_D|\mathcal{S}_1] = \frac{sC_f}{ARL_0} + C_R.$$

Ve scénáři (\mathcal{S}_2) předpokládáme, že zjistitelná příčina není detekována a proces je mimo statistickou kontrolu, provádíme reaktivní údržbu.

Celková očekávaná doba ze scénáře (\mathcal{S}_2), která je dána součtem doby pod statistickou kontrolou a doby mimo statistickou kontrolu ze scénáře (\mathcal{S}_2), je:

$$E[T|\mathcal{S}_2] = E[T_{in}|\mathcal{S}_2] + E[T_{out}|\mathcal{S}_2],$$

$$E[T_{in}|\mathcal{S}_2] = \int_0^{(m_p+1)h} t f^{Tr}(t; m_p + 1) dt + (1 - \gamma_z) \frac{sT_f}{ARL_0},$$

$$E[T_{out}|\mathcal{S}_2] = (m_p + 1)h - \int_0^{(m_p+1)h} t f^{Tr}(t; m_p + 1) dt + T_R.$$

Celkové očekávané náklady ze scénáře (\mathcal{S}_2) jsou součtem očekávaných nákladů ze ztráty kvality, očekávaných nákladů na vzorkování a očekávaných nákladů na vyhledání falešného signálu a údržbu:

$$E[C|\mathcal{S}_2] = E[C_Q|\mathcal{S}_2] + E[C_S|\mathcal{S}_2] + E[C_D|\mathcal{S}_2].$$

Očekávané náklady ze ztráty kvality ve scénáři (\mathcal{S}_2) jsou:

$$E[C_Q|\mathcal{S}_2] = C_I \int_0^{(m_p+1)h} t f^{Tr}(t; m_p + 1) dt + C_O \left[(m_p + 1)h - \int_0^{(m_p+1)h} t f(t) dt + \gamma_R T_R \right].$$

Očekávané náklady na vzorkování ve scénáři (\mathcal{S}_2) jsou:

$$E[C_S|\mathcal{S}_2] = m_p C_s.$$

Očekávané náklady na vyhledání falešného signálu a provedení reaktivní údržby ve scénáři (\mathcal{S}_2) jsou:

$$E[C_D|\mathcal{S}_2] = \frac{s C_f}{ARL_0} + C_R.$$

Ve scénáři (\mathcal{S}_3) předpokládáme stav pod statistickou kontrolou, provedeme pouze plánovanou údržbu, která předchází zjistitelné příčině. Dobu potřebnou pro realizaci plánované údržby budeme dále označovat symbolem T_P . Celková očekávaná doba ve scénáři (\mathcal{S}_3) je:

$$E[T|\mathcal{S}_3] = (m_p + 1)h + (1 - \gamma_z) \frac{m_p T_f}{ARL_0} + T_P.$$

Celkové očekávané náklady ze scénáře (\mathcal{S}_3) jsou součtem očekávaných nákladů ze ztráty kvality, očekávaných nákladů na vzorkování a očekávaných nákladů na vyhledání falešného signálu a údržbu:

$$E[C|\mathcal{S}_3] = E[C_Q|\mathcal{S}_3] + E[C_S|\mathcal{S}_3] + E[C_D|\mathcal{S}_3].$$

Očekávané náklady ze ztráty kvality ve scénáři (\mathcal{S}_3) jsou (γ_P je indikátor běhu procesu v průběhu plánované údržby):

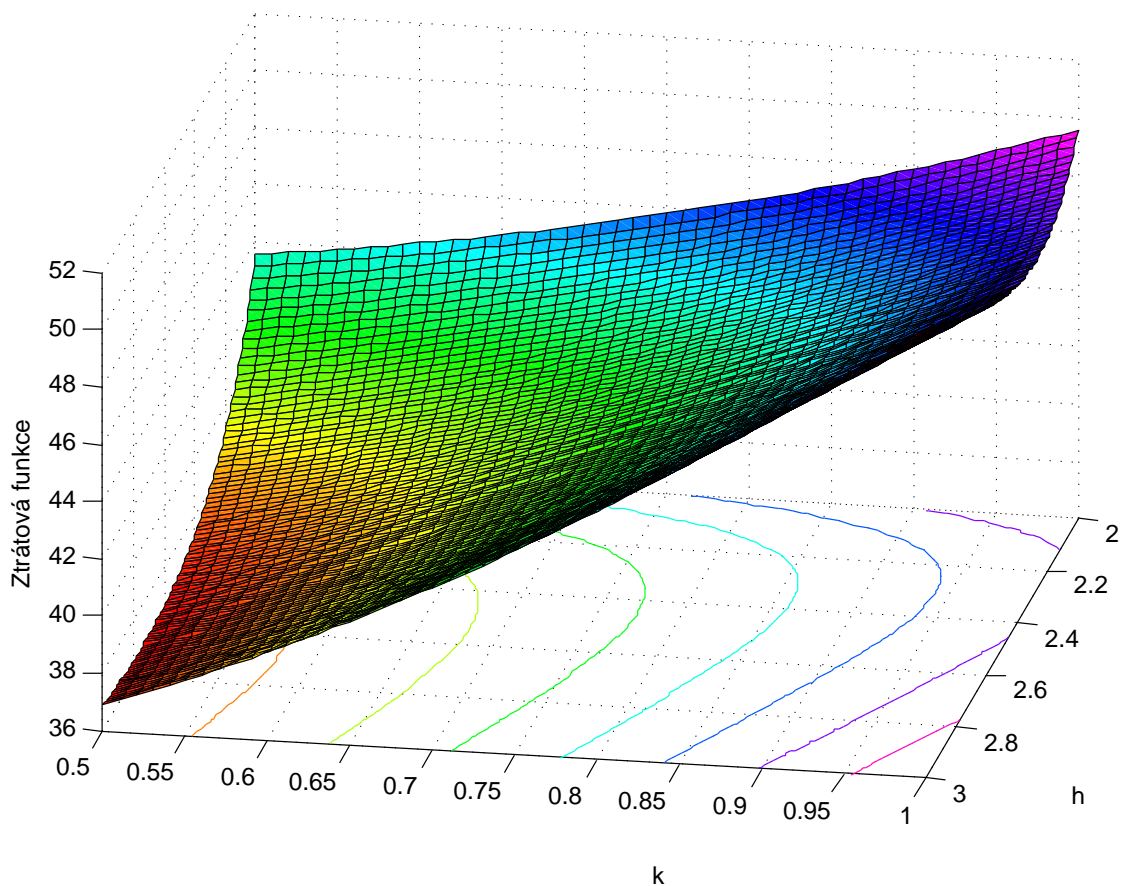
$$E[C_Q|\mathcal{S}_3] = C_I [(m_p + 1)h + \gamma_P T_P].$$

Očekávané náklady na vzorkování ve scénáři (\mathcal{S}_3) jsou:

$$E[C_S|\mathcal{S}_3] = m_p C_s.$$

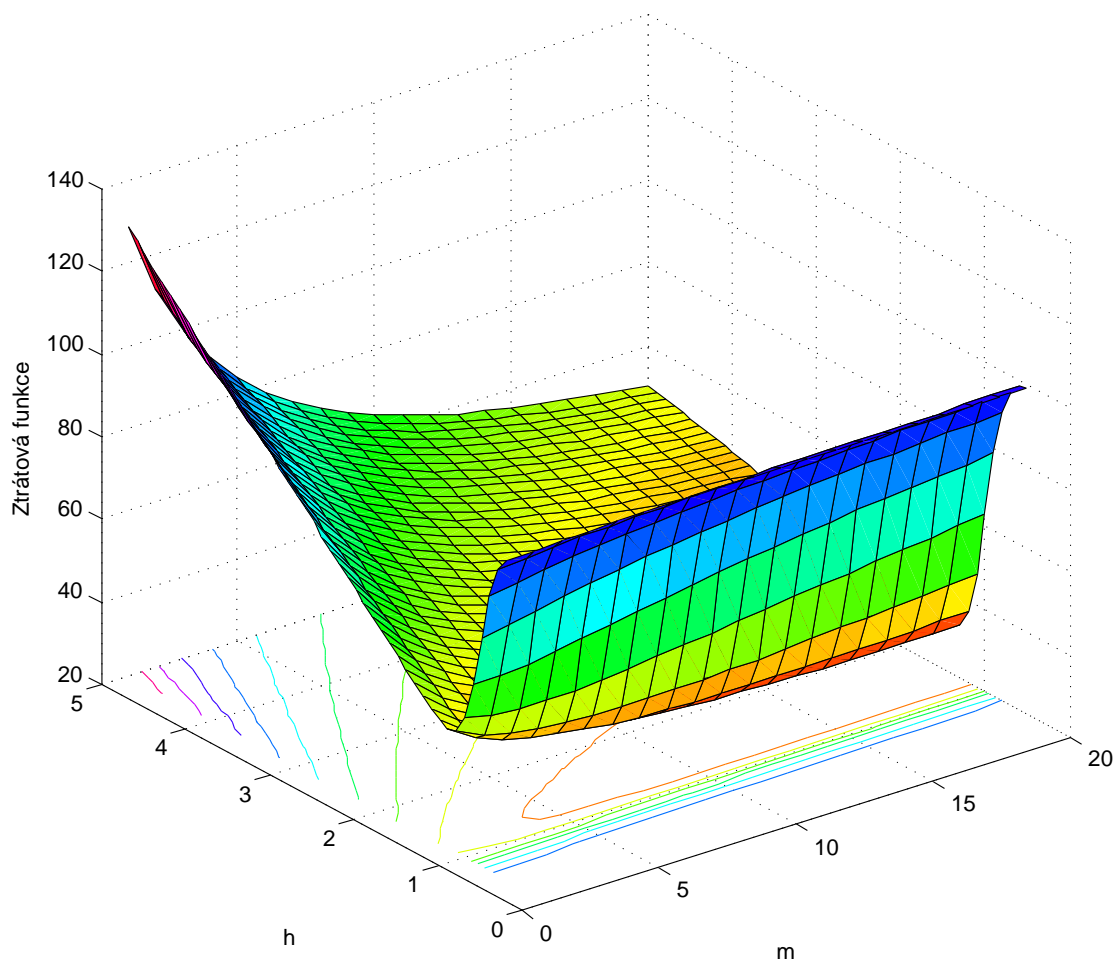
Očekávané náklady na plánovanou údržbu ve scénáři (\mathcal{S}_3) jsou:

$$E[C_D|\mathcal{S}_3] = \frac{m_p C_f}{ARL_0} + C_P.$$



Obr. 3.16: Průběh ztrátové funkce pro základní ekonomicko-statistický model s údržbou pro hodnotu rozsahu výběru $m = 5$.

Příklad: Uvažujme proces řízený Shewhartovým regulačním diagramem, kde předpokládáme vstupní parametry procesu, z kterých vypočítáme optimální ztrátovou funkci daného výrobního procesu. Předpokládáme posunutí ve střední hodnotě $\delta = 2$, pravděpodobnost doby vzniku do poruchy má weibullovo rozdělení s parametrem měřítka $\lambda = 0.05$ a tvaru $\rho = 1$. Mezi známé parametry, které se týkají nákladů jsou: náklady za hodinu procesu ve stavu mimo statistickou kontrolu $C_O = 100$ Kč, náklady za hodinu procesu ve stavu pod statistickou kontrolou $C_I = 0$ Kč, náklady na falešný signál $C_f = 5$ Kč, náklady na vyhledání a odstranění zjistitelné příčiny $C_{zr} = 25$ Kč, náklady na provedení reaktivní údržby $C_R = 50$ Kč, náklady na provedení plánované údržby $C_P = 75$ Kč, náklady závislé na odebrání počtu vzorků a zakreslení výběrového bodu do regulačního digramu $C_V = 1.0$ Kč a náklady, které nezávisí na počtu odběru vzorků $C_F = 5$ Kč. Předpokládáme, že známe dobu potřebnou k zakreslení a výpočtu standardních testů jednoho výsledku při inspekcí, je-li proces mimo statistickou kontrolu $T_g = 0.05$ h, dobu k nalezení zjistitelné příčiny $T_r = 2$ h, dobu na vyhledání falešného signálu $T_f = 1$ h, dobu na vyhledání zjistitelné příčiny $T_z = 1$ h, dobu k provedení reaktivní údržby $T_R = 3$ h a dobu k provedení plánované údržby $T_P = 8$ h. Pokračuje-li proces během vyhledávání zjistitelné příčiny, reaktivní údržby a plánované údržby stanovíme parametr $\gamma_z = \gamma_R = \gamma_P = 1$. Dále předpokládáme počet vzorků před plánovanou údržbou $m_p = 300$.



Obr. 3.17: Průběh ztrátové funkce pro základní ekonomicko-statistický model s údržbou pro hodnotu šířky regulačních mezí $k = 3.024$.

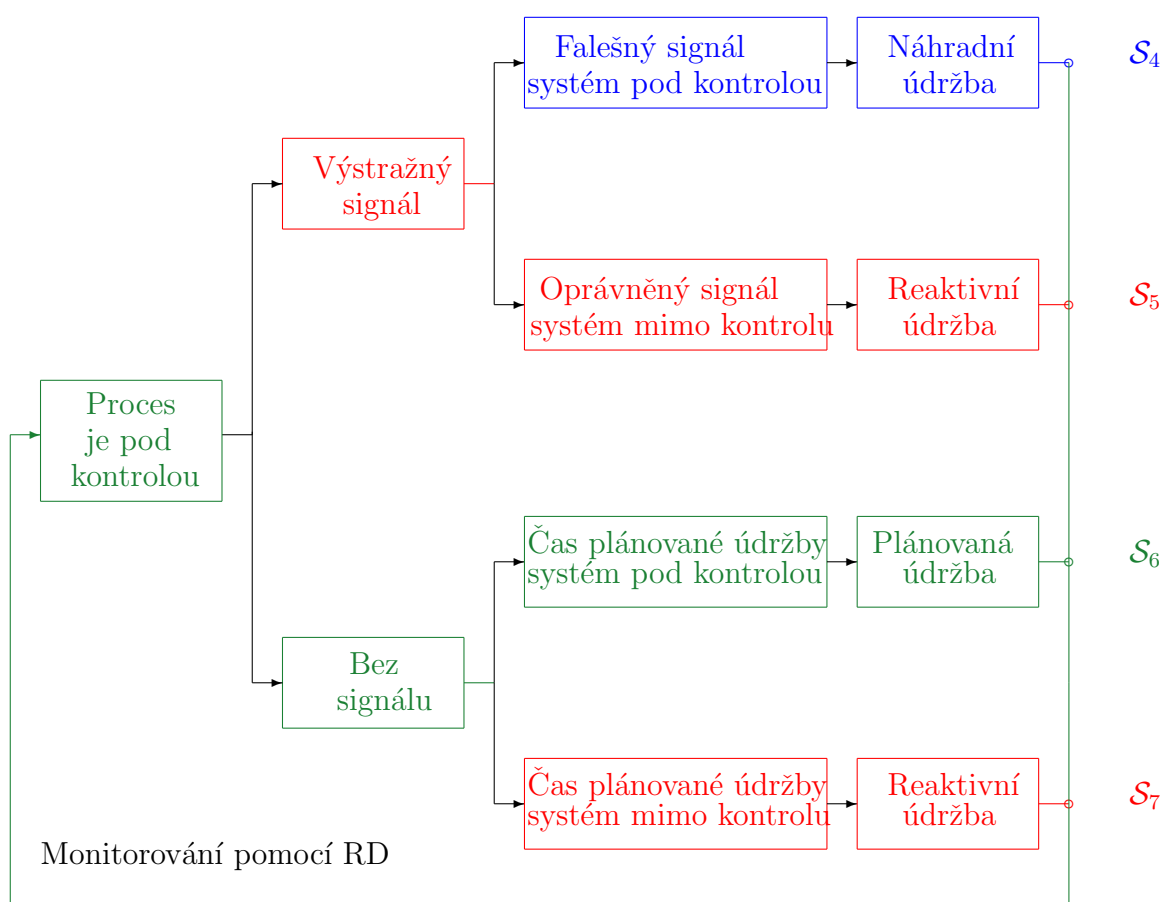
Průběh ztrátové funkce pro hodnotu rozsahu výběru $m = 5$ je na Obr. 3.16. Minimální hodnoty ztrátové funkce $L = 36.6120$ je dosaženo při době mezi inspekcemi $h = 2$ a šířkou regulačních mezí $k = 1.24$.

Tento výsledek je ovšem příkladem toho, že samotná ekonomicko-statistická optimalizace nevede vždy k nejlepším výsledkům. V daném případě nízká hodnota šířky regulačních mezí k vedla k nepřijatelně nízké hodnotě $ARL_0 = 4.6517$, tedy k velmi četným falešným signálům. V tomto případě je potřeba provést statisticko-ekonomickou optimalizaci. Nejprve určíme optimální hodnotu šířky regulačních mezí k_0 pro požadovanou minimální hodnotu ARL_0 . Potom opět provedeme ekonomicko-statistickou optimalizaci pro tuto optimální hodnotu šířky regulačních mezí k . V našem příkladu jsme dostali šířku regulačních mezí $k_0 = 3.024$ pro požadovanou hodnotu $ARL_0 = 400$. Následnou ekonomicko-statistickou optimalizací jsme získali hodnotu ztrátové funkce $L = 31.3277$, která je zobrazena na Obr. 3.17, při rozsahu výběru $m = 11$ a dobou mezi inspekcemi $h = 2.4$ při hodnotě $ARL_0 = 400.8716$.

3.4.2 Rozšířený ekonomicko-statistický model s údržbou

Rozšířený ekonomicko-statistický model s údržbou lze popsat pomocí Obr. 3.18. Proces začíná ve stavu, kdy je proces pod statistickou kontrolou, viz [6], [5], [88].

Předpokládáme, že proces kontroly v regulačním diagramu probíhá tak, že se pravidelně po h hodinách provádí měření, takzvané inspekce, aby se zjistilo, zda nastal posun v procesu ze stavu pod statistickou kontrolou do stavu mimo statistickou kontrolu. Charakteristiky jakosti jsou měřeny a zakreslovány do regulačního diagramu. Jestliže v regulačním diagramu nevznikne po m_p inspekcích důvod k vyslání signálu, bude provedena plánovaná údržba v $(m_p + 1)$ -ním výběrovém intervalu. Jestliže regulační diagram signalizuje stav mimo statistickou kontrolu z j inspekcí, hledáním zjistitelné příčiny ověříme platnost signálu mimo statistickou kontrolu. Potvrzený signál vyústí ve vyvolanou reaktivní údržbu a falešný signál vyústí v náhradní (kompenzační) údržbu. Předpokládáme, že dokončení plánované, reaktivní a náhradní údržby uvede zařízení do stavu „jako nový“ (obnova). Na Obr. 3.18 integrovaný model může vyústit ve čtyři různé scénáře. Všechny scénáře začínají ve stavu, kdy je proces pod statistickou kontrolou.



Obr. 3.18: Rozšířený ekonomicko-statistický model s údržbou.

Ve scénáři (\mathcal{S}_4) v regulačním diagramu detekujeme signál, který nastává před plánovaným časem údržby. Tento signál je však falešný, proces zůstává ve stavu pod statistickou kontrolou. V tomto případě provádíme náhradní údržbu. V daném scénáři uvažujeme náklady na vyhledávání a zjištění příčiny falešného signálu a náklady na provedení náhradní údržby.

Ve scénáři (\mathcal{S}_5) nastane zjistitelná příčina v intervalu mezi j -tou a $(j + 1)$ -ní inspekcí, která posune proces do stavu mimo statistickou kontrolu. Proces plynule pokračuje bez zastavení až do $(j + i)$ -té inspekce, kdy regulační diagram signalizuje stav mimo statistickou kontrolu. Ověříme, zda je signál oprávněný, zjistíme zjistitelnou příčinu a provedeme reaktivní údržbu. Náklady v tomto případě zahrnují kromě nákladů na vlastní inspekce a vyhodnocení jejich výsledků i náklady na vyhledání příčiny signálu a náklady na reaktivní údržbu.

Ve scénáři (\mathcal{S}_6) proces zůstává po celou dobu ve stavu pod statistickou kontrolou. Nedojde-li k signálu po j -té inspekci (na konci $(j + 1)$ -ního výběrového intervalu) se uskuteční plánovaná údržba. Ta má za úkol zabránit poruše procesu. Činnosti spojené s plánovanou údržbou jsou méně nákladné než náklady spojené s reaktivní údržbou, protože příprava činností může být vedena mimo výrobní linku před plánovanou údržbou. Po dokončení plánované údržby se proces obnovuje.

Ve scénáři (\mathcal{S}_7) se proces posune do stavu mimo statistickou kontrolu, ale regulační diagram nevyše žádný signál. Předpokládejme, že posun v procesu do stavu mimo statistickou kontrolu nastane v j -tém intervalu mezi inspekcemi. Proces plynule běží dál, protože regulační diagram nedetekoval stav mimo statistickou kontrolu. V $(m_p + 1)$ -ním výběrovém intervalu začíná údržba, která identifikuje stav mimo statistickou kontrolu. Jelikož nastal stav mimo statistickou kontrolu před plánovanou údržbou, provádíme reaktivní údržbu. Náklady budou způsobeny identifikací a odstraněním zjistitelné příčiny a ztráty z kontrol.

Na konci každého z uvedených scénářů se proces vrací do stavu pod statistickou kontrolou.

Ekonomicko-statistická analýza

Při této analýze opět vycházíme ze vzorce (3.0.4.1). Očekávanou délku cyklu vyjádříme jako součet všech dob cyklu vynásobených pravděpodobnostmi jednotlivých scénářů, která je dána vztahem:

$$E(T) = E[T|\mathcal{S}_4]P(\mathcal{S}_4) + E[T|\mathcal{S}_5]P(\mathcal{S}_5) + E[T|\mathcal{S}_6]P(\mathcal{S}_6) + E[T|\mathcal{S}_7]P(\mathcal{S}_7),$$

Podobně, očekávané náklady za cyklus jsou součtem očekávaných nákladů z jednotlivých scénářů, které násobíme pravděpodobnostmi jednotlivých scénářů. Můžeme je vyjádřit následovně:

$$E(C) = E[C|\mathcal{S}_4]P(\mathcal{S}_4) + E[C|\mathcal{S}_5]P(\mathcal{S}_5) + E[C|\mathcal{S}_6]P(\mathcal{S}_6) + E[C|\mathcal{S}_7]P(\mathcal{S}_7).$$

kde

$$\begin{aligned}
P(\mathcal{S}_4) &= \sum_{i=1}^{m_p} P(\text{ve stavu pod kontrolou} \cap \text{byl vyslán signál}) \\
&= \sum_{i=1}^{m_p} P(\text{ve stavu pod kontrolou} \mid \text{byl vyslán signál}) P(\text{byl vyslán signál}) \\
&= \sum_{i=1}^{m_p} p_i^I (1 - F(ih)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\mathcal{S}_5) &= \sum_{i=1}^{m_p} P(\text{ve stavu mimo kontrolu} \cap \text{byl vyslán signál}) \\
&= \sum_{i=1}^{m_p} P(\text{ve stavu mimo kontrolu} \mid \text{byl vyslán signál}) P(\text{byl vyslán signál}) \\
&= \sum_{i=1}^{m_p} [F(ih) - F((i-1)h)] \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j^I\right) \sum_{l=1}^{m_p-i+1} p_l^0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\mathcal{S}_6) &= \sum_{i=1}^{m_p} P(\text{ve stavu pod kontrolou} \cap \text{nebyl vyslán signál}) \\
&= \sum_{i=1}^{m_p} P(\text{ve stavu pod kontrolou} \mid \text{nebyl vyslán signál}) P(\text{nebyl vyslán signál}) \\
&= (1 - F(m_p h)) - \sum_{i=1}^{m_p} p_i^I (1 - F(ih)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\mathcal{S}_7) &= \sum_{i=1}^{m_p} P(\text{ve stavu mimo kontrolu} \cap \text{nebyl vyslán signál}) \\
&= \sum_{i=1}^{m_p} P(\text{ve stavu mimo kontrolu} \mid \text{nebyl vyslán signál}) P(\text{nebyl vyslán signál}) \\
&= F(m_p h) - \sum_{i=1}^{m_p} [F(ih) - F((i-1)h)] \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j^I\right) \sum_{l=1}^{m_p-i+1} p_l^0.
\end{aligned}$$

kde $p_i^I = \alpha(1 - \alpha)^{i-1}$, $p_i^O = (1 - \beta)\beta^{i-1}$, $\beta = \int_{-k-\delta\sqrt{n}}^{k-\delta\sqrt{n}} \phi(z) dz$, $\alpha = 2 \int_k^\infty \phi(z) dz$.

Pro pravděpodobnosti jednotlivých scénářů se obvykle používá Weibullovo rozdělení pravděpodobnosti s distribuční funkcí $F(t)$, hustotou $f(t)$ a hustotou useknutého Weibullova rozdělení $f^{Tr}(t)$.

Očekávaná délka cyklu obnovy v jednotlivých typech scénářů je rovna:

$$\begin{aligned}
E[T|\mathcal{S}_4] &= h \sum_{i=1}^{m_p} ip_i^I (1 - F(ih)) + T_z + T_C, \\
E[T|\mathcal{S}_5] &= \int_0^{m_ph} tf^{Tr}(t; m_p + 1)dt + hARL_\delta - \nu + T_{gn} + T_z + T_R, \\
E[T|\mathcal{S}_6] &= (m_p + 1)h + T_P, \\
E[T|\mathcal{S}_7] &= (m_p + 1)h + T_R.
\end{aligned}$$

Náklady za cyklus se dělí do tří druhů:

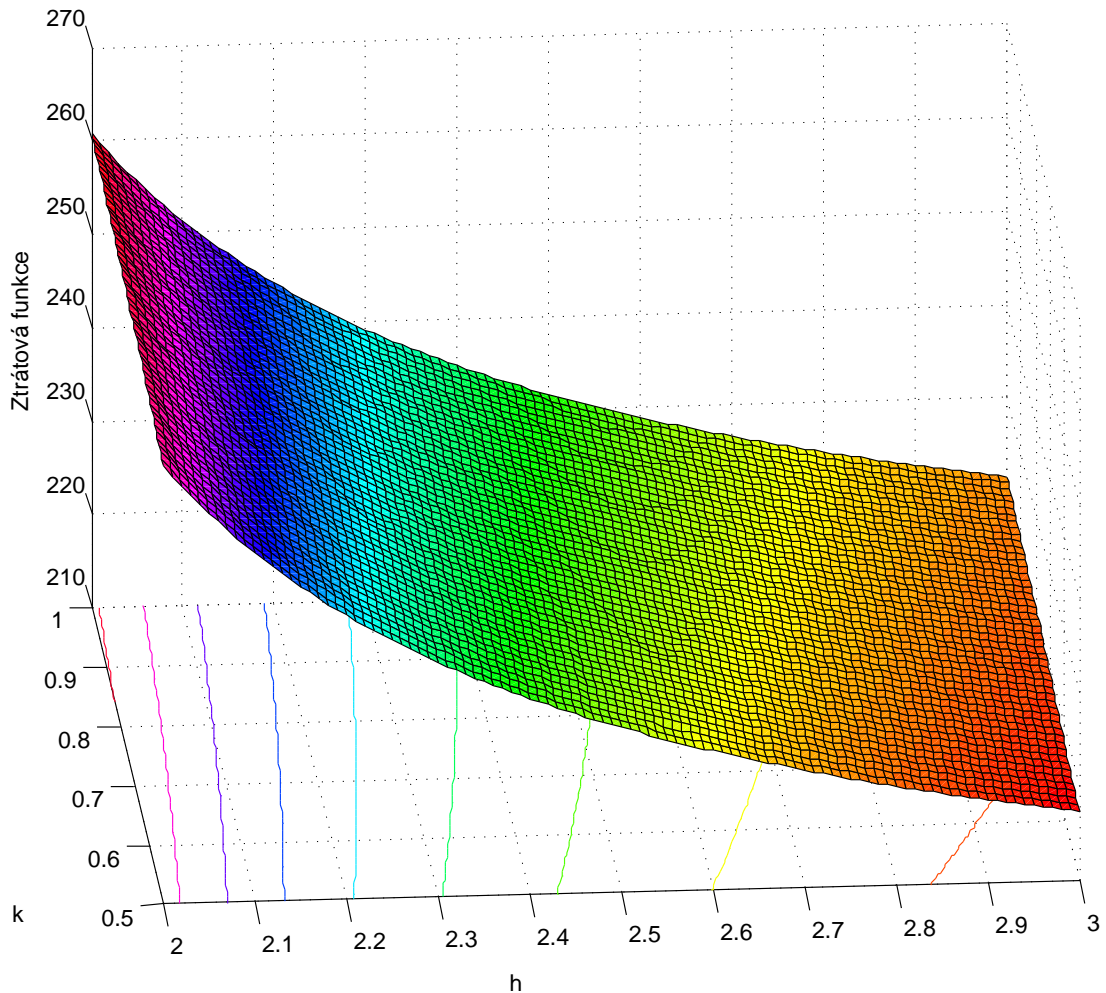
- náklady ze ztráty kvality způsobené v důsledku stavu procesu C_I a C_O ,
- náklady na inspekci jsou dány součtem $C_s = C_F + C_V m$,
- náklady na údržbu C_C, C_R a C_P .

Očekávané náklady v jednotlivých typech scénářů jsou rovny:

$$\begin{aligned}
E[C|\mathcal{S}_4] &= C_O \left[h \sum_{i=0}^{m_p} ip_i^I (1 - F(ih)) + \gamma_C T_C \right] + C_s \sum_{i=0}^{m_p} ip_i^I (1 - F(ih)) + C_f + C_C, \\
E[C|\mathcal{S}_5] &= C_O \int_0^{m_ph} tf^{Tr}(t; m_p + 1)dt + C_I \left[hARL_\delta - \nu + T_{gn} + \gamma_z T_z + \gamma_R T_R \right] \\
&\quad + \frac{1}{h} E[T|\mathcal{S}_5] C_s + C_R, \\
E[C|\mathcal{S}_6] &= C_O \left[(m_p + 1)h + \gamma_P T_P \right] + m_p C_s + C_P, \\
E[C|\mathcal{S}_7] &= C_O \int_0^{m_ph} tf^{Tr}(t; m_p + 1)dt + C_I \left[(m_p + 1)h - \int_0^{m_ph} tf^{Tr}(t; m_p + 1)dt + \gamma_R T_R \right] \\
&\quad + m_p C_s + C_R.
\end{aligned}$$

Příklad: Uvažujme proces řízený Shewhartovým regulačním diagramem, kde předpokládáme vstupní parametry procesu, z kterých vypočítáme optimální ztrátovou funkci daného výrobního procesu. Předpokládáme posunutí ve střední hodnotě $\delta = 2$, pravděpodobnost doby vzniku do poruchy má Weibullovo rozdělení s parametrem měřítka $\lambda = 0.05$ a tvaru $\rho = 1$. Mezi známé parametry, které se týkají nákladů jsou: náklady za hodinu procesu ve stavu mimo statistickou kontrolu $C_O = 200$ Kč, náklady za hodinu procesu ve stavu pod statistickou kontrolou $C_I = 10$ Kč, náklady na falešný signál $C_f = 100$ Kč, náklady na vyhledání a odstranění zjistitelné příčiny $C_{zr} = 25$ Kč, náklady na provedení reaktivní

údržby $C_R = 50$ Kč, náklady na provedení plánované údržby $C_P = 75$ Kč, náklady na provedení náhradní údržby $C_C = 100$ Kč, náklady závislé na odebrání počtu vzorků a zakreslení výběrového bodu do regulačního digramu $C_V = 1.0$ Kč a náklady, které nezávisí na počtu odběru vzorků $C_F = 5$ Kč. Předpokládáme, že známe dobu potřebnou k zakreslení a výpočtu standardních testů jednoho výsledku při inspekci, je-li proces mimo statistickou kontrolu $T_g = 0.05$ h, dobu k nalezení zjistitelné příčiny $T_r = 2$ h, dobu na vyhledání falešného signálu $T_f = 1$ h, dobu na vyhledání zjistitelné příčiny $T_z = 1$ h, dobu k provedení reaktivní údržby $T_R = 3$ h a dobu k provedení plánované údržby $T_P = 8$ h. Pokračuje-li proces během vyhledávání zjistitelné příčiny, reaktivní údržby a plánované údržby stanovíme parametr $\gamma_z = \gamma_R = \gamma_P = \gamma_C = 1$. Také předpokládáme, že známe počet vzorků před plánovanou údržbou $m_p = 100$. Pomocí Nelder-Meadovy metody byly získány optimální hodnoty pro rozsah výběru $m = 5$, interval mezi inspekcemi $h = 1.5$ a šířka regulačních mezí $k = 2$. Z daného Obr. 3.19 vyšla hodnota ztrátové funkce $L = 217.4586$.

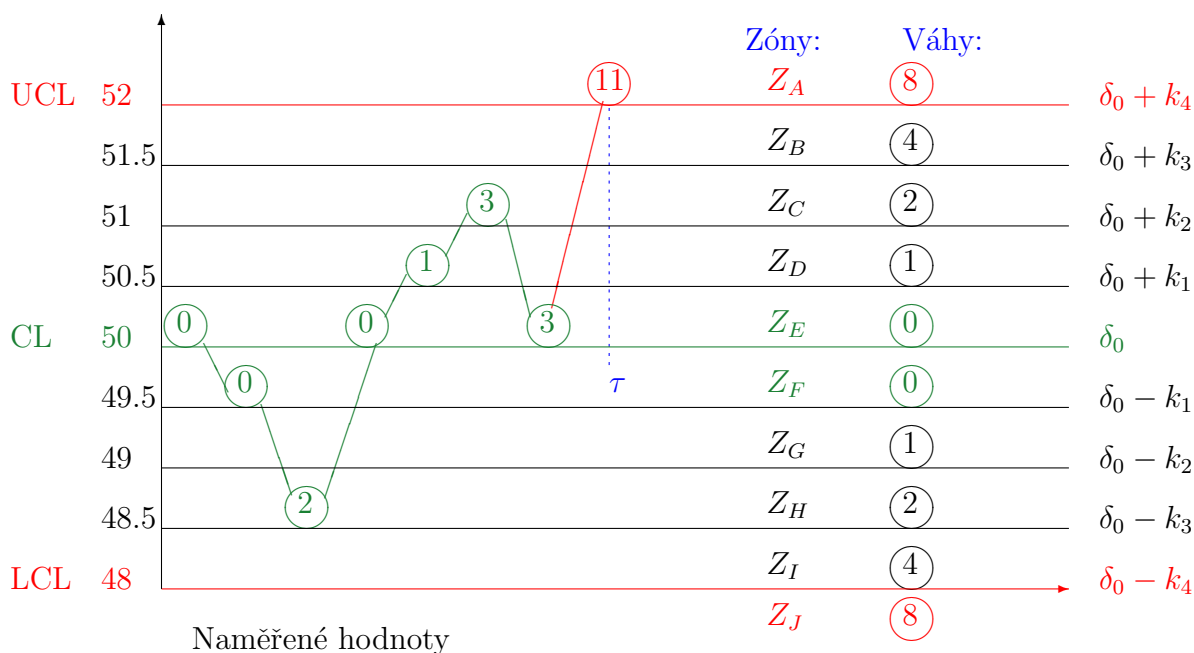


Obr. 3.19: Průběh ztrátové funkce pro rozšířený ekonomicko-statistický model pro hodnotu rozsahu výběru $m = 5$.

Kapitola 4

Návrh a analýza vlastností nového zónového regulačního diagramu

V kapitole 2 jsme si popsali zónový regulační diagram s osmi zónami, viz [3], [4]. Návrh nového typu zónového regulačního diagramu vychází z původního zónového regulačního diagramu s tím rozdílem, že původní návrh je rozšířen o zónu s nulovým skóre symetricky rozloženého kolem centrální přímky. Tento regulační diagram je schematicky znázorněn na Obr. 4.1. Nově navrhovaný zónový regulační diagram počítá s deseti zónami. Je definován centrální přímkou CL a čtyřmi mezemi $\pm k_1, \pm k_2, \pm k_3$ a $\pm k_4$, které symetricky rozdělují regulační diagram do pěti zón nad CL, to je na zóny Z_E, Z_D, Z_C, Z_B, Z_A , a pěti zón pod CL to je na zóny Z_F, Z_G, Z_H, Z_I, Z_J . Signál je vyslán, je-li hodnota skóre rovna osm nebo větší.



Obr. 4.1: Návrh nového zónového regulačního diagramu se skóry 0, 1, 2, 4.

V této kapitole budeme srovnávat účinnost původního a nově navrženého zónového regulačního diagramu. Tyto zónové regulační diagramy budeme porovnávat nejprve podle stejných šířek regulačních mezí, které nastavíme na 3σ . Na závěr této kapitoly srovnáme vlastnosti nově navrženého zónového regulačního diagramu s vybranými regulačními diagramy popsány dříve, především pak s těmi, jež jsou podrobně popsány v kapitole 2 a kapitole 3.

Do zónového regulačního diagramu navrhujeme zavést dvě pravidla, která jsou schématicky znázorněna na Obr. 4.2:

- **První pravidlo**, které označíme I , je stejné jako u původního zónového regulačního diagramu. Na začátku procesu začínáme ze stavu S_0 , to znamená, že máme hodnotu skóre rovnou nule. Pokud se sledovaná charakteristika nachází nad (pod) centrální přímkou se součtem skóre menším než 8 a následující hodnota sledované charakteristiky se bude nacházet na opačné straně centrální přímkou, celkové skóre bude odpovídat pouze nové hodnotě skóre z poslední zasažené zóny. To znamená, že při přechodu přes centrální přímkou se skóre „vynuluje“. Například padne-li předchozí sledovaná hodnota charakteristiky do zóny Z_B a následující hodnota do zóny Z_F , bude hodnota skóre 0. V tomto případě vynulujeme skóre, jelikož následující charakteristika přešla přes centrální přímkou, to znamená, dostala se na druhou stranu centrální přímkou, než kde se nacházelo předchozí pozorování.

Příklad: Výpočet hodnoty skóre pro pravidlo I

Vycházíme-li ze stavu S_7^- , to znamená, že se nacházíme pod centrální přímkou se skórem 7, následující sledovaná charakteristika padne do zóny Z_E , skóre se vynuluje a aktuální hodnota skóre je 0 (stav S_0^+).

$$S_7^- + S_0^+ \equiv S_0^+$$

Vycházíme-li ze stavu S_7^- , to znamená, že se nacházíme pod centrální přímkou se skórem 7, následující sledovaná charakteristika padne do zóny Z_F , skóre se nevynuluje a aktuální hodnota skóre je 7 (stav S_7^-).

$$S_7^- + S_0^- \equiv S_7^-$$

- **Druhé pravidlo**, které označíme jako II , na začátku procesu začínáme ze stavu S_0 , který má hodnotu skóre rovnou nule, je následující:
 - bude-li se sledovaná charakteristika nacházet v zóně Z_B nebo Z_C nebo Z_D a padne-li následně do zóny Z_G nebo Z_H nebo Z_I , skóre se vynuluje a budeme počítat s hodnotou aktuální zóny.
 - podobně, bude-li se sledovaná charakteristika nacházet v zóně Z_G nebo Z_H nebo Z_I a padne-li následně do zóny Z_B nebo Z_C nebo Z_D , skóre se vynuluje a budeme počítat s hodnotou aktuální zóny.

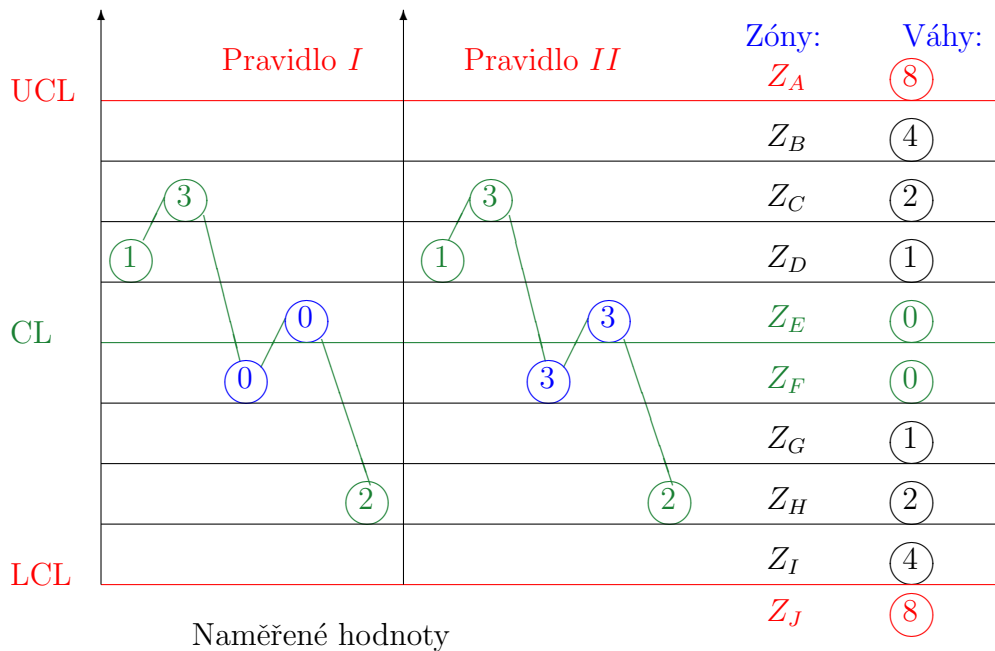
Příklad: Výpočet hodnoty skóre pro pravidlo *II*

Vycházíme-li ze stavu S_7^- , to znamená, že se nacházíme pod centrální přímkou se skórem 7, následující sledovaná charakteristika padne do zóny Z_E , aktuální hodnota skóre je 7 (stav S_7^-).

$$S_7^- + S_0^+ \equiv S_7^-$$

Vycházíme-li ze stavu S_7^- , to znamená, že se nacházíme pod centrální přímkou se skórem 7, následující sledovaná charakteristika padne do zóny Z_F , aktuální hodnota skóre je 7 (stav S_7^-).

$$S_7^- + S_0^- \equiv S_7^-$$



Obr. 4.2: Zónový regulační diagram pro pravidlo *I* a *II*.

4.1 Pravidlo *I* pro nově navržený zónový regulační diagram

V pravidle *I* statistická regulace procesu probíhá obvyklým způsobem: v pravidelných intervalech jsou prováděna měření sledované veličiny, z nich je vypočítána odpovídající charakteristika (průměr, rozpětí, rozptyl) a následně je zakreslena jako jeden bod do regulačního diagramu. Těmto bodům jsou přiřazována skóre jakožto součty vah jednotlivých zón po sobě jdoucích výsledků měření. Součet se počítá vždy pro nepřerušenu posloupnost po sobě jdoucích bodů na jedné straně CL. V okamžiku, kdy následující bod je na opačné straně CL než bod předchozí, součet je „vynulován“ a načítá se znovu. Signál o porušení stability je vyslán ve chvíli, kdy součet vah dosáhne hodnoty 8. Nulování znamená, že padne-li sledovaná charakteristika do oblasti s opačným znaménkem než je současné skóre, zapomeneme současné skóre a rovnou načteme skóre nové.

Označení zóny	Obor hodnot	Pravděpodobnost padnutí do zóny
Z_A	$k_4 - \delta < X < \infty$	p_A
Z_B	$k_3 - \delta < X < k_4 - \delta$	p_B
Z_C	$k_2 - \delta < X < k_3 - \delta$	p_C
Z_D	$k_1 - \delta < X < k_2 - \delta$	p_D
Z_E	$\delta < X < k_1 - \delta$	p_E
Z_F	$-k_1 - \delta < X < -\delta$	p_F
Z_G	$-k_2 - \delta < X < -k_1 - \delta$	p_G
Z_H	$-k_3 - \delta < X < -k_2 - \delta$	p_H
Z_I	$-k_4 - \delta < X < -k_3 - \delta$	p_I
Z_J	$-\infty < X < -k_4 - \delta$	p_J

Tab. 4.1: Označení pravděpodobností zón nového zónového regulačního diagramu

Na začátku regulovaného procesu vycházíme z fiktivního stavu S_0 , který má hodnotu skóre 0. Jednotlivé stavy S_7^-, \dots, S_7^+ odpovídají součtu skóre bodů nad respektive pod centrální přímkou se znaménkem +, respektive -. Je-li součet skóre bodů 8, dostáváme se do stavu S_8^+ , respektive S_8^- což znamená, že regulační diagram detekoval signál mimo statistickou kontrolu.

Předpokládejme markovský řetězec s těmito stavy $(S_7^-, S_6^-, \dots, S_0^-, S_0^+, \dots, S_7^+)$, kde S_8^-, S_8^+ jsou stavy absorpční. Rozdělení doby do absorpce (pohlčení) může být popsáno užitím PH rozdělení s parametry $(\vec{\pi}^0, A)$, kde $\vec{\pi}^0$ je vektor počátečního rozdělení pravděpodobnosti a A je matice pravděpodobností přechodů mezi přechodovými stavy. Potom můžeme vyjádřit průměrnou délku běhu jako $ARL = \vec{\pi}^0(E - A)^{-1}\vec{e}$, viz [46], kde E je jednotková matice a \vec{e} je vektor samých jedniček. Nechť X značí sledovanou charakteristiku. Pro libovolný posun δ jsme schopni ohodnotit následující pravděpodobnosti (užitím distribuční funkce $F(x)$ náhodné veličiny X), viz Tab. 4.1.

Pro srovnání návrhu nového typu zónového regulačního diagramu budeme v zóně Z_B , respektive Z_I měnit hodnotu skóre $(3, \dots, 7)$, kterými se budeme zabývat dále.

4.1.1 Návrh nového zónového regulačního diagramu pro hodnoty skóre 0, 1, 2, 3 dle pravidla I

U tohoto zónového regulačního diagramu se skóre 0, 1, 2, 3, který budeme dále označovat jako Z_{0123} , můžeme nastavit následující nová pravidla, která jsou podobná těm, která vydala společnost Western Electric v roce 1956, viz kapitola 2.4.1. Pro nová pravidla s * (jedna hvězdička) jsou pro horní polovinu regulačního diagramu a pravidla s ** (dvě hvězdičky) jsou pro dolní polovinu regulačního diagramu, viz Obr. 4.1.

- **V pravidle 1*** je vyslán signál, pokud nějaký bod sledované charakteristiky, padl do zóny Z_A .
- **V pravidle 2*** je vyslán signál, pokud tři po sobě jdoucí body sledované charakteristiky padly do zóny Z_B .

- **V pravidle 3*** je vyslán signál, pokud čtyři po sobě jdoucí body sledované charakteristiky padly do zóny Z_C .
- **V pravidle 4*** je vyslán signál, pokud osm po sobě jdoucích bodů sledované charakteristiky padly do zóny Z_D .

Podobně můžeme sestavit pravidla pro zóny Z_J, Z_I, Z_H, Z_G :

- **V pravidle 1**** je vyslán signál, pokud nějaký bod sledované charakteristiky, padl do zóny Z_J .
- **V pravidle 2**** je vyslán signál, pokud tři po sobě jdoucí body sledované charakteristiky padly do zóny Z_I .
- **V pravidle 3**** je vyslán signál, pokud čtyři po sobě jdoucí body sledované charakteristiky padly do zóny Z_H .
- **V pravidle 4**** je vyslán signál, pokud osm po sobě jdoucích bodů sledované charakteristiky padly do zóny Z_G .

K signálu nikdy nedojde za předpokladu, že sledovaná charakteristika bude ležet v zónách Z_E nebo Z_F . Kromě uvedených pravidel však může nastat ještě řada dalších situací, při kterých lze dosáhnout skóre vyššího než 8, a tedy bude vyslán signál, kdy se proces dostane mimo statistickou kontrolu.

Pro tento zónový regulační diagram s hodnotami skóru 0, 1, 2, 3 je sestavena matice pravděpodobností přechodů P . Předpokládáme, že vždy vycházíme ze stavu S_0 . V tomto případě předpokládáme dva absorpční stavy S_8^+ a S_8^- . Matice pravděpodobností přechodů P pro tento typ zónového regulačního diagramu je dána $P = (P_{II} \ P_I)$. Matice pravděpodobností přechodů P_I je v Tab. 4.2 a matice pravděpodobností přechodů P_{II} je v Tab. 4.3.

Nechť $m_i, i = 7^-, \dots, 0^-, 0, 0^+, \dots, 7^+$ je střední doba do pohlcení v absorpčních stavech S_8^+, S_8^- , kdy proces začne v některém přechodném stavu $S_i, i = 7^-, \dots, 0^-, 0, 0^+, \dots, 7^+$. Potom m_i musí vyhovovat soustavě rovnic:

$$\begin{aligned}
m_0 &= 1 + p_E m_{0^+} + p_D m_{1^+} + p_C m_{2^+} + p_B m_{3^+} + p_F m_{0^-} + p_G m_{1^-} + p_H m_{2^-} + p_I m_{3^-} \\
m_{0^+} &= 1 + p_E m_{0^+} + p_D m_{1^+} + p_C m_{2^+} + p_B m_{3^+} + p_F m_{0^-} + p_G m_{1^-} + p_H m_{2^-} + p_I m_{3^-} \\
m_{1^+} &= 1 + p_E m_{1^+} + p_D m_{2^+} + p_C m_{3^+} + p_B m_{4^+} + p_F m_{0^-} + p_G m_{1^-} + p_H m_{2^-} + p_I m_{3^-} \\
m_{2^+} &= 1 + p_E m_{2^+} + p_D m_{3^+} + p_C m_{4^+} + p_B m_{5^+} + p_F m_{0^-} + p_G m_{1^-} + p_H m_{2^-} + p_I m_{3^-} \\
m_{3^+} &= 1 + p_E m_{3^+} + p_D m_{4^+} + p_C m_{5^+} + p_B m_{6^+} + p_F m_{0^-} + p_G m_{1^-} + p_H m_{2^-} + p_I m_{3^-} \\
m_{4^+} &= 1 + p_E m_{4^+} + p_D m_{5^+} + p_C m_{6^+} + p_B m_{6^+} + p_F m_{0^-} + p_G m_{1^-} + p_H m_{2^-} + p_I m_{3^-} \\
m_{5^+} &= 1 + p_E m_{5^+} + p_D m_{6^+} + p_C m_{7^+} + p_F m_{0^-} + p_G m_{1^-} + p_H m_{2^-} + p_I m_{3^-}
\end{aligned}$$

	S_0	S_0^+	S_1^+	S_2^+	S_3^+	S_4^+	S_5^+	S_6^+	S_7^+	S_8^+	$\sum_{i=0}^8 S_i$
S_0	0	p_E	p_D	p_C	p_B	0	0	0	0	p_A	0.5
S_0^+	0	p_E	p_D	p_C	p_B	0	0	0	0	p_A	0.5
S_1^+	0	0	p_E	p_D	p_C	p_B	0	0	0	p_A	0.5
S_2^+	0	0	0	p_E	p_D	p_C	p_B	0	0	p_A	0.5
S_3^+	0	0	0	0	p_E	p_D	p_C	p_B	0	p_A	0.5
S_4^+	0	0	0	0	0	p_E	p_D	p_C	p_B	p_A	0.5
S_5^+	0	0	0	0	0	0	p_E	p_D	p_C	$p_B + p_A$	0.5
S_6^+	0	0	0	0	0	0	0	p_E	p_D	$p_C + p_B + p_A$	0.5
S_7^+	0	0	0	0	0	0	0	0	p_E	$p_D + p_C + p_B + p_A$	0.5
S_8^+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_E + p_D + p_C + p_B + p_A$	0.5
S_0^-	0	p_E	p_D	p_C	p_B	0	0	0	0	p_A	0.5
S_1^-	0	p_E	p_D	p_C	p_B	0	0	0	0	p_A	0.5
S_2^-	0	p_E	p_D	p_C	p_B	0	0	0	0	p_A	0.5
S_3^-	0	p_E	p_D	p_C	p_B	0	0	0	0	p_A	0.5
S_4^-	0	p_E	p_D	p_C	p_B	0	0	0	0	p_A	0.5
S_5^-	0	p_E	p_D	p_C	p_B	0	0	0	0	p_A	0.5
S_6^-	0	p_E	p_D	p_C	p_B	0	0	0	0	p_A	0.5
S_7^-	0	p_E	p_D	p_C	p_B	0	0	0	0	p_A	0.5
S_8^-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_E + p_D + p_C + p_B + p_A$	0.5

Tab. 4.2: Výřez matice pravděpodobností přechodů návrhu nového zónového regulačního diagramu pro hodnoty skóru 0, 1, 2, 3, kterou označíme P_I

$$m_{6+} = 1 + p_E m_{6+} + p_D m_{7+} + p_F m_{0-} + p_G m_{1-} + p_H m_{2-} + p_I m_{3-}$$

$$m_{7+} = 1 + p_E m_{7+} + p_F m_{0-} + p_G m_{1-} + p_H m_{2-} + p_I m_{3-}$$

$$m_{0-} = 1 + p_E m_{0+} + p_D m_{1+} + p_C m_{2+} + p_B m_{3+} + p_F m_{0-} + p_G m_{1-} + p_H m_{2-} + p_I m_{3-}$$

$$m_{1-} = 1 + p_E m_{0+} + p_D m_{1+} + p_C m_{2+} + p_B m_{3+} + p_F m_{1-} + p_G m_{2-} + p_H m_{3-} + p_I m_{4-}$$

$$m_{2-} = 1 + p_E m_{0+} + p_D m_{1+} + p_C m_{2+} + p_B m_{3+} + p_F m_{2-} + p_G m_{3-} + p_H m_{4-} + p_I m_{5-}$$

$$m_{3-} = 1 + p_E m_{0+} + p_D m_{1+} + p_C m_{2+} + p_B m_{3+} + p_F m_{3-} + p_G m_{4-} + p_H m_{5-} + p_I m_{6-}$$

$$m_{4-} = 1 + p_E m_{0+} + p_D m_{1+} + p_C m_{2+} + p_B m_{3+} + p_F m_{4-} + p_G m_{5-} + p_H m_{6-} + p_I m_{7-}$$

$$m_{5-} = 1 + p_E m_{0+} + p_D m_{1+} + p_C m_{2+} + p_B m_{3+} + p_F m_{5-} + p_G m_{6-} + p_H m_{7-}$$

$$m_{6-} = 1 + p_E m_{0+} + p_D m_{1+} + p_C m_{2+} + p_B m_{3+} + p_F m_{6-} + p_G m_{7-}$$

$$m_{7-} = 1 + p_E m_{0+} + p_D m_{1+} + p_C m_{2+} + p_B m_{3+} + p_F m_{7-}$$

Z uvedených rovnic použitých výše můžeme vyjádřit střední dobu do absorpce $m_i, i = 7^-, \dots, 0^-, 0^+, \dots, 7^+$, v tomto případě vycházíme vždy ze stavu S_0 , proto nám stačí pouze vyjádřit hodnotu m_0 z této soustavy rovnic.

Pro tento typ nově navrženého zónového regulačního diagramu pro hodnoty skóru 0, 1, 2, 3 byla v prostředí Matlab (viz příloha 6), vypočítána hodnota ARL, viz [46], jejíž výpočet je přehlednější než pomocí výše uvedených soustav rovnic. Výsledky hodnot pro různé ARL_δ jsou v Tab. 4.7 a Tab. 4.6.

	S_0^-	S_1^-	S_2^-	S_3^-	S_4^-	S_5^-	S_6^-	S_7^-	S_8^-	$\sum_{i=0}^8 S_i$
S_0	p_F	p_G	p_H	p_I	0	0	0	0	p_J	0.5
S_0^+	p_F	p_G	p_H	p_I	0	0	0	0	p_J	0.5
S_1^+	p_F	p_G	p_H	p_I	0	0	0	0	p_J	0.5
S_2^+	p_F	p_G	p_H	p_I	0	0	0	0	p_J	0.5
S_3^+	p_F	p_G	p_H	p_I	0	0	0	0	p_J	0.5
S_4^+	p_F	p_G	p_H	p_I	0	0	0	0	p_J	0.5
S_5^+	p_F	p_G	p_H	p_I	0	0	0	0	p_J	0.5
S_6^+	p_F	p_G	p_H	p_I	0	0	0	0	p_J	0.5
S_7^+	p_F	p_G	p_H	p_I	0	0	0	0	p_J	0.5
S_8^+	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_F + p_G + p_H + p_I + p_J$	0.5
S_0^-	p_F	p_G	p_H	p_I	0	0	0	0	p_J	0.5
S_1^-	0	p_F	p_G	p_H	p_I	0	0	0	p_J	0.5
S_2^-	0	0	p_F	p_G	p_H	p_I	0	0	p_J	0.5
S_3^-	0	0	0	p_F	p_G	p_H	p_I	0	p_J	0.5
S_4^-	0	0	0	0	p_F	p_G	p_H	p_I	p_J	0.5
S_5^-	0	0	0	0	0	p_F	p_G	p_H	$p_I + p_J$	0.5
S_6^-	0	0	0	0	0	0	p_F	p_G	$p_H + p_I + p_J$	0.5
S_7^-	0	0	0	0	0	0	0	p_F	$p_G + p_H + p_I + p_J$	0.5
S_8^-	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_F + p_G + p_H + p_I + p_J$	0.5

Tab. 4.3: Výřez matice pravděpodobností přechodů návrhu nového zónového regulačního diagramu pro hodnoty skórů 0, 1, 2, 3, kterou označíme P_{II}

4.1.2 Návrh nového zónového regulačního diagramu pro hodnoty skórů 0, 1, 2, 4 dle pravidla I

U tohoto zónového regulačního diagramu se skóry 0, 1, 2, 4, který budeme dále označovat jako Z_{0124} , můžeme nastavit následující nová pravidla, která jsou podobná těm, která vydala společnost Western Electric v roce 1956, viz kapitola 2.4.1. Pro nová pravidla s * (jedna hvězdička) jsou pro horní polovinu regulačního diagramu a pravidla s ** (dvě hvězdičky) jsou pro dolní polovinu regulačního diagramu, viz Obr. 4.1.

- V **pravidle 1*** je vyslán signál, pokud nějaký bod sledované charakteristiky, padl do zóny Z_A .
- V **pravidle 2*** je vyslán signál, pokud dva po sobě jdoucí body sledované charakteristiky padly do zóny Z_B .
- V **pravidle 3*** je vyslán signál, pokud čtyři po sobě jdoucí body sledované charakteristiky padly do zóny Z_C .
- V **pravidle 4*** je vyslán signál, pokud osm po sobě jdoucích bodů sledované charakteristiky padly do zóny Z_D .

Podobně můžeme sestavit pravidla pro zóny Z_J, Z_I, Z_H, Z_G :

- **V pravidle 1**** je vyslán signál, pokud nějaký bod sledované charakteristiky, padl do zóny Z_J .
- **V pravidle 2**** je vyslán signál, pokud dva po sobě jdoucí body sledované charakteristiky padly do zóny Z_I .
- **V pravidle 3**** je vyslán signál, pokud čtyři po sobě jdoucí body sledované charakteristiky padly do zóny Z_H .
- **V pravidle 4**** je vyslán signál, pokud osm po sobě jdoucích bodů sledované charakteristiky padly do zóny Z_G .

K signálu nikdy nedojde, za předpokladu, že sledovaná charakteristika bude ležet v zónách Z_E nebo Z_F . Kromě uvedených pravidel však může nastat ještě řada dalších situací, při kterých lze dosáhnout skóre vyššího než 8, a tedy bude vyslán signál, kdy se dostal proces mimo statistickou kontrolu. Matice pravděpodobností přechodů P pro tento typ zónového regulačního diagramu je dána $P = (P_{IV} \ P_{III})$. Matice pravděpodobností přechodů P_{III} je v Tab. 4.4 a matice pravděpodobností přechodů P_{IV} je v Tab. 4.5. Předpokládáme, že vždy vycházíme ze stavu S_0 . V tomto případě předpokládáme dva absorpční stavy S_8^+ a S_8^- .

	S_0	S_0^+	S_1^+	S_2^+	S_3^+	S_4^+	S_5^+	S_6^+	S_7^+	S_8^+	$\sum_{i=0}^8 S_i$
S_0	0	p_E	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A	0.5
S_0^+	0	p_E	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A	0.5
S_1^+	0	0	p_E	p_D	p_C	0	p_B	0	0	p_A	0.5
S_2^+	0	0	0	p_E	p_D	p_C	0	p_B	0	p_A	0.5
S_3^+	0	0	0	0	p_E	p_D	p_C	0	p_B	p_A	0.5
S_4^+	0	0	0	0	0	p_E	p_D	p_C	0	$p_B + p_A$	0.5
S_5^+	0	0	0	0	0	0	p_E	p_D	p_C	$p_B + p_A$	0.5
S_6^+	0	0	0	0	0	0	0	p_E	p_D	$p_C + p_B + p_A$	0.5
S_7^+	0	0	0	0	0	0	0	0	p_E	$p_D + p_C + p_B + p_A$	0.5
S_8^+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_E + p_D + p_C + p_B + p_A$	0.5
S_0^-	0	p_E	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A	0.5
S_1^-	0	p_E	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A	0.5
S_2^-	0	p_E	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A	0.5
S_3^-	0	p_E	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A	0.5
S_4^-	0	p_E	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A	0.5
S_5^-	0	p_E	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A	0.5
S_6^-	0	p_E	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A	0.5
S_7^-	0	p_E	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A	0.5
S_8^-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_E + p_D + p_C + p_B + p_A$	0.5

Tab. 4.4: Výřez matice pravděpodobností přechodů návrhu nového zónového regulačního diagramu pro hodnoty skóre 0, 1, 2, 4, kterou označíme P_{III}

Podobné matice pravděpodobností přechodů sestavíme pro zónové regulační diagramy $Z_{0125}, Z_{0126}, Z_{0127}$, jejichž výsledky jsou shrnuty v tabulkách Tab. 4.6 a Tab. 4.7

	S_0^-	S_1^-	S_2^-	S_3^-	S_4^-	S_5^-	S_6^-	S_7^-	S_8^-	$\sum_{i=0}^8 S_i$
S_0	p_F	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J	0.5
S_0^+	p_F	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J	0.5
S_1^+	p_F	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J	0.5
S_2^+	p_F	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J	0.5
S_3^+	p_F	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J	0.5
S_4^+	p_F	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J	0.5
S_5^+	p_F	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J	0.5
S_6^+	p_F	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J	0.5
S_7^+	p_F	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J	0.5
S_8^+	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_F + p_G + p_H + p_I + p_J$	0.5
S_0^-	p_F	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J	0.5
S_1^-	0	p_F	p_G	p_H	0	p_I	0	0	p_J	0.5
S_2^-	0	0	p_F	p_G	p_H	0	p_I	0	p_J	0.5
S_3^-	0	0	0	p_F	p_G	p_H	0	p_I	p_J	0.5
S_4^-	0	0	0	0	p_F	p_G	p_H	0	$p_I + p_J$	0.5
S_5^-	0	0	0	0	0	p_F	p_G	p_H	$p_I + p_J$	0.5
S_6^-	0	0	0	0	0	0	p_F	p_G	$p_H + p_I + p_J$	0.5
S_7^-	0	0	0	0	0	0	0	p_F	$p_G + p_H + p_I + p_J$	0.5
S_8^-	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_F + p_G + p_H + p_I + p_J$	0.5

Tab. 4.5: Výřez matice pravděpodobností přechodů návrhu nového zónového regulačního diagramu pro hodnoty skóre 0, 1, 2, 4, kterou označíme P_{IV}

4.1.3 Srovnání účinnosti nově navrhovaných zónových regulačních diagramů dle pravidla I

Nově navržený zónový regulační diagram má lepší vlastnosti než původní zónový regulační diagram. Vykazuje rychlejší reakci při malém posunu ve střední hodnotě sledované charakteristiky, je tedy lepší než Shewhartův regulační diagram. V případě, že dochází k velkým posunům ve střední hodnotě sledované charakteristiky, rychleji reaguje oproti regulačnímu diagramu CUSUM a EWMA. Navíc je jeho použití jednodušší než v případě Shewhartova regulačního diagramu s dodatečnými pravidly nebo regulačního diagramu CUSUM či regulačního diagramu EWMA, které jsou pro malé posuny nevhodnější.

V Tab. 4.6 je srovnání nově navrženého zónového regulačního diagramu s deseti zónami spolu se zónovým regulačním diagramem s osmi zónami. Zónový regulační diagram s osmi zónami má vysoký poměr falešných signálů při nulovém posunu. Abychom mohli porovnat tyto dva typy regulačních diagramů, byly nastaveny meze na 3σ . V Tab. 4.6 bylo zkoumáno, jak se změní hodnota ARL_δ při různé hodnotě posunu δ (vyjádřeno v násobcích σ , kde $\sigma^2 = 1$). Dalším srovnávacím parametrem byla změna v hodnotě posledního skóre nově navrženého zónového regulačního diagramu od hodnoty 3 do 7, jejichž srovnání je uvedeno v Tab. 4.6. Zónový regulační diagram s hodnotami skóre 0, 1, 2, 7 vykazuje při hodnotě posunu $\delta = 0$ vysoký poměr falešných signálů oproti zónovému regulačnímu diagramu s hodnotami skóre 0, 1, 2, 3, který vykazuje mnohem lepší vlastnosti.

δ	Z_{0123} $k_1 = 0.75\sigma$ $k_2 = 1.5\sigma$ $k_3 = 2.25\sigma$ $k_4 = 3\sigma$	Z_{0124} $k_1 = 0.75\sigma$ $k_2 = 1.5\sigma$ $k_3 = 2.25\sigma$ $k_4 = 3\sigma$	Z_{0125} $k_1 = 0.75\sigma$ $k_2 = 1.5\sigma$ $k_3 = 2.25\sigma$ $k_4 = 3\sigma$	Z_{0126} $k_1 = 0.75\sigma$ $k_2 = 1.5\sigma$ $k_3 = 2.25\sigma$ $k_4 = 3\sigma$	Z_{0127} $k_1 = 0.75\sigma$ $k_2 = 1.5\sigma$ $k_3 = 2.25\sigma$ $k_4 = 3\sigma$	Z_{124} $k_1 = 1\sigma$ $k_2 = 2\sigma$ $k_3 = 3\sigma$	Z_{024} $k_1 = 1\sigma$ $k_2 = 2\sigma$ $k_3 = 3\sigma$
0.00	242.0231	194.5201	151.1202	102.9990	69.6934	39.8400	95.0500
0.50	49.1679	41.8398	36.0898	30.1649	25.6316	15.9500	26.0000
1.00	11.9465	10.7785	9.9305	9.0452	8.4129	6.6700	8.1900
1.50	5.6617	5.1734	4.8614	4.4840	4.2383	3.9900	4.2900
2.00	3.5732	3.2588	3.1051	2.8487	2.7044	2.8100	2.8600
2.50	2.4948	2.2877	2.2262	2.0515	1.9732	2.1100	2.1100
3.00	1.8258	1.7117	1.6965	1.6032	1.5723	1.6500	1.6500
3.50	1.4148	1.3665	1.3645	1.3303	1.3222	1.3500	1.3500
4.00	1.1847	1.1700	1.1699	1.1618	1.1605	1.1700	1.1700

Tab. 4.6: Srovnání nově navrženého zónového regulačního diagramu s různými hodnotami skóru při pevném nastavení regulačních mezí.

Tento přístup není nejvhodnější, protože regulační diagramy lze porovnávat pouze při stejném nastavení například $ARL_0 = 370$.

Proto v Tab. 4.7 porovnááme pomocí ARL_0 nově navržený zónový regulační diagram s různými hodnotami skóru, kde šířky regulačních mezí jsou voleny pro $\delta = 0$ tak, aby hodnota ARL_0 byla $ARL_0 = 370$. Z dané tabulky vybereme nejlepší typ zónového regulačního diagramu, který při velkém posunu nejrychleji reaguje na velký posun $\delta = 4$, v daném případě se jedná o zónový regulační diagram s hodnotami skóru 0, 1, 2, 4. Tento typ zónového regulačního diagramu použijeme dále pro srovnání s běžně používanými regulačními diagramy.

δ	Z_{0123} $k_1 = 0.521932$ $k_2 = 1.521932$ $k_3 = 2.521932$ $k_4 = 3.521932$	Z_{0124} $k_1 = 0.564593$ $k_2 = 1.564593$ $k_3 = 2.564593$ $k_4 = 3.564593$	Z_{0125} $k_1 = 0.622358$ $k_2 = 1.622358$ $k_3 = 2.622358$ $k_4 = 3.622358$	Z_{0126} $k_1 = 0.70837$ $k_2 = 1.70837$ $k_3 = 2.70837$ $k_4 = 3.70837$	Z_{0127} $k_1 = 0.821459$ $k_2 = 1.821459$ $k_3 = 2.821459$ $k_4 = 3.821459$
0.00	370.0160	370.0007	370.0069	370.0313	370.0085
0.50	51.1480	51.1752	53.3617	59.6217	72.8057
1.00	12.6494	12.3834	12.5591	13.3589	15.1977
1.50	6.3431	6.0696	6.0186	6.1370	6.6066
2.00	4.2646	3.9767	3.8996	3.8289	3.9961
2.50	3.1597	2.8859	2.8530	2.7039	2.7668
3.00	2.3821	2.1761	2.1960	2.0601	2.0974
3.50	1.8093	1.6939	1.7304	1.6667	1.7084
4.00	1.4215	1.3773	1.4059	1.4022	1.4456

Tab. 4.7: Srovnání nově navrženého zónového regulačního diagramu s různými hodnotami skóru při počátečním nastavení $ARL_0 = 370$.

4.2 Pravidlo *II* pro nově navržený zónový regulační diagram

Toto pravidlo *II* bylo blíže popsáno v úvodu této kapitoly. Pro pravidlo *II* můžeme tedy sestavit matici pravděpodobností přechodů $P = (P_V \ P_{VI})$. Matice pravděpodobností přechodů P_V je v Tab. 4.8 a matice pravděpodobností přechodů P_{VI} je v Tab. 4.9. Předpokládáme, že vždy vycházíme ze stavu S_0 . V tomto případě opět předpokládáme dva absorpční stavy S_8^+ a S_8^- .

	S_0	S_0^+	S_1^+	S_2^+	S_3^+	S_4^+	S_5^+	S_6^+	S_7^+	S_8^+
S_0	0	p_E	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A
S_0^+	0	$p_E + p_F$	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A
S_1^+	0	0	$p_E + p_F$	p_D	p_C	0	p_B	0	0	p_A
S_2^+	0	0	0	$p_E + p_F$	p_D	p_C	0	p_B	0	p_A
S_3^+	0	0	0	0	$p_E + p_F$	p_D	p_C	0	p_B	p_A
S_4^+	0	0	0	0	0	$p_E + p_F$	p_D	p_C	0	$p_B + p_A$
S_5^+	0	0	0	0	0	0	$p_E + p_F$	p_D	p_C	$p_B + p_A$
S_6^+	0	0	0	0	0	0	0	$p_E + p_F$	p_D	$p_C + p_B + p_A$
S_7^+	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_E + p_F$	$p_D + p_C + p_B + p_A$
S_8^+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_E + p_F + p_D + p_C + p_B + p_A$
S_0^-	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A
S_1^-	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A
S_2^-	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A
S_3^-	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A
S_4^-	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A
S_5^-	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A
S_6^-	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A
S_7^-	0	0	p_D	p_C	0	p_B	0	0	0	p_A
S_8^-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_D + p_C + p_B + p_A$

Tab. 4.8: Výřez matice pravděpodobností přechodů návrhu nového zónového regulačního diagramu pro hodnoty skóru 0, 1, 2, 4, kterou označíme P_V

Pro pravidlo *II* z výše sestavené matice pravděpodobností přechodu a vypočteme odpovídající ARL pro hodnotu posunu δ , kde počáteční hodnota ARL_0 byla nastavena na hodnotu $ARL_0 = 370$.

	S_0^-	S_1^-	S_2^-	S_3^-	S_4^-	S_5^-	S_6^-	S_7^-	S_8^-
S_0	p_F	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J
S_0^+	0	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J
S_1^+	0	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J
S_2^+	0	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J
S_3^+	0	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J
S_4^+	0	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J
S_5^+	0	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J
S_6^+	0	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J
S_7^+	0	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J
S_8^+	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_G + p_H + p_I + p_J$
S_0^-	$p_E + p_F$	p_G	p_H	0	p_I	0	0	0	p_J
S_1^-	0	$p_E + p_F$	p_G	p_H	0	p_I	0	0	p_J
S_2^-	0	0	$p_E + p_F$	p_G	p_H	0	p_I	0	p_J
S_3^-	0	0	0	$p_E + p_F$	p_G	p_H	0	p_I	p_J
S_4^-	0	0	0	0	$p_E + p_F$	p_G	p_H	0	$p_I + p_J$
S_5^-	0	0	0	0	0	$p_E + p_F$	p_G	p_H	$p_I + p_J$
S_6^-	0	0	0	0	0	0	$p_E + p_F$	p_G	$p_H + p_I + p_J$
S_7^-	0	0	0	0	0	0	0	$p_E + p_F$	$p_G + p_H + p_I + p_J$
S_8^-	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_E + p_F + p_G + p_H + p_I + p_J$

Tab. 4.9: Výřez matice pravděpodobností přechodů návrhu nového zónového regulačního diagramu pro hodnoty skóreů 0, 1, 2, 4, kterou označíme P_{VI}

δ	Z_{0124}
	$k_1 = 1.068921$
	$k_2 = 2.068921$
	$k_3 = 3.068921$
	$k_4 = 4.068921$
0.00	370.0711
0.50	40.7174
1.00	14.0760
1.50	8.0487
2.00	5.4042
2.50	3.8850
3.00	2.8808
3.50	2.1800
4.00	1.6973

Tab. 4.10: Nově navržený zónový regulační diagram se skóre 0, 1, 2, 4 při počátečním nastavení $ARL_0 = 370$ pro pravidlo II .

Pravidlo II nevedlo k výraznému zlepšení sledovaných parametrů, proto se tímto typem zónového regulačního diagramu nebudeme dále zabývat.

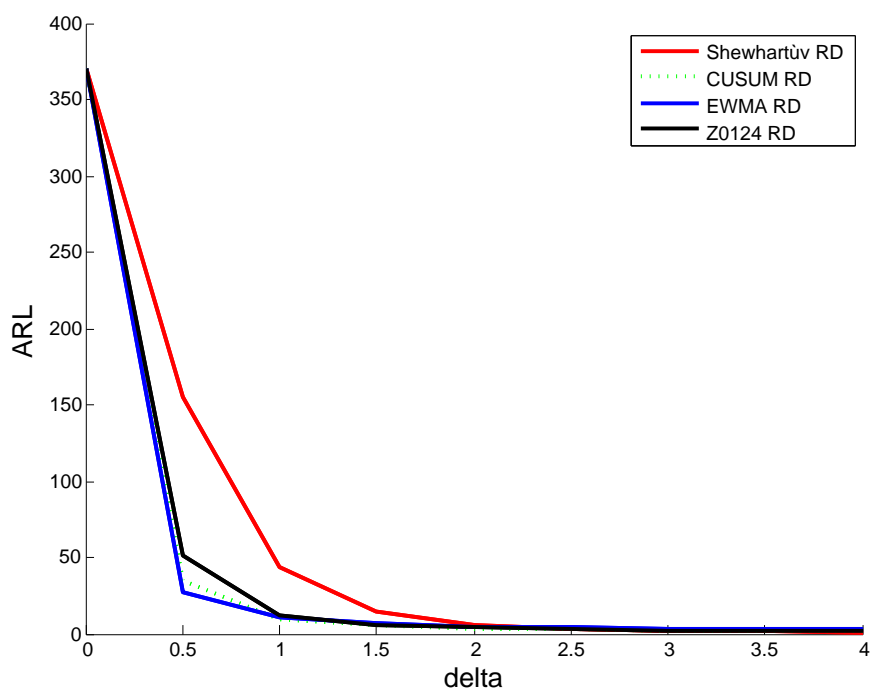
4.3 Srovnání účinnosti různých typů regulačních diagramů

V této části budeme srovnávat regulační diagramy, které byly popsány v kapitole 3 s nově navrženým zónovým regulačním diagramem. Následující Tab. 4.11 ukazuje srovnání různých typů regulačních diagramů, kde je nastavena počáteční hodnota ARL_0 a k ní jsou dopočítány šířky regulačních mezí. Je zřejmé, že pro různé hodnoty posunu δ (vyjádřeno v násobcích σ), dávají různé typy regulačních diagramů rozdílné výsledky. Hodnoty v Tab. 4.11 byly spočteny pro $\sigma^2 = 1$. Pro malý posun $\delta = 0.5$ se zdá být nejlepší volbou regulační diagram EWMA. Pro střední posun $1 \leq \delta \leq 2.5$ bychom volili regulační diagram CUSUM. Pro větší posun $3 \leq \delta \leq 4$ vychází nejlépe Shewhartův regulační diagram, ale pro malý posun není nejvhodnější. Tato porovnání jsou graficky znázorněna na Obr. 4.3. Nově navržený zónový regulační diagram vykazuje nejvíce přijatelné hodnoty v porovnání s ostatními typy regulačních diagramů. Porovnáme-li ho s Shewhartovým regulačním diagramem, je nejlepší pro detekování malého posunu. Budeme-li zónový regulační diagram porovnávat s regulačním diagramem CUSUM, bude nejrychlejší v detekování velkého posunu.

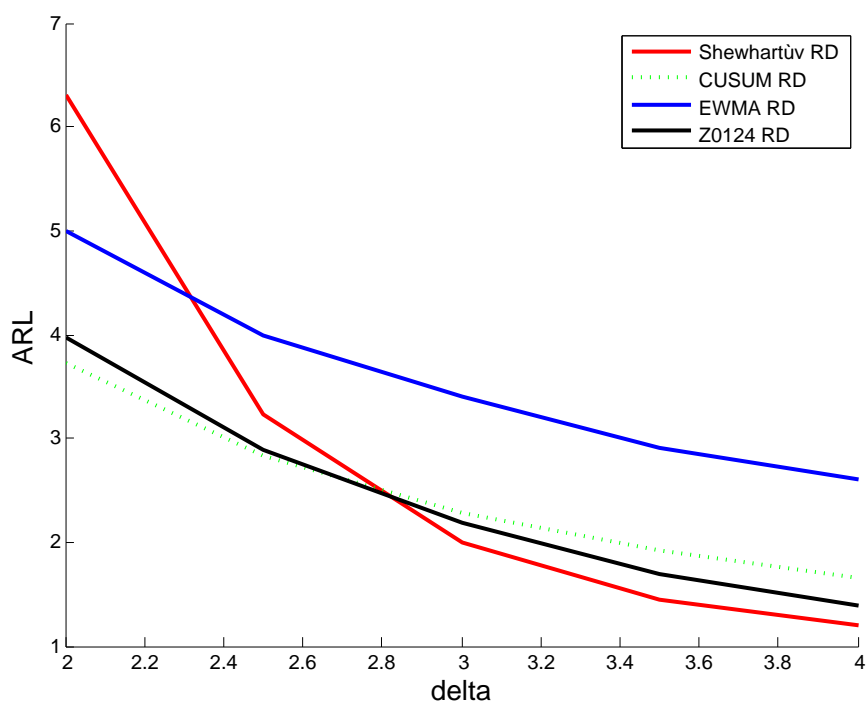
δ	Shewhart $k_1 = 1\sigma$ $k_2 = 2\sigma$ $k_3 = 3\sigma$	CUSUM $H_C = 4.766$ $\kappa = 0.5$	EWMA $V = 2.5$ $\lambda = 0.5$	Zone Z_{0124} $k_1 = 0.564593$ $k_2 = 1.564593$ $k_3 = 2.564593$ $k_4 = 3.564593$
0.00	370.00	370.00	370.00	370.00
± 0.50	155.22	35.17	26.60	51.17
± 1.00	43.89	9.87	10.80	12.38
± 1.50	14.97	5.43	6.80	6.07
± 2.00	6.30	3.73	5.00	3.98
± 2.50	3.24	2.84	4.00	2.89
± 3.00	2.00	2.29	3.4	2.18
± 3.50	1.45	1.92	2.90	1.69
± 4.00	1.19	1.65	2.60	1.38

Tab. 4.11: Srovnání nově navrženého zónového regulačního diagramu s různými typy regulačních diagramů při počátečním nastavení $ARL_0 = 370$ pro hodnoty ARL_δ .

Na Obr. 4.3 je zobrazeno srovnání různých typů regulačních diagramů pomocí ARL_0 . Pro větší přehlednost je na Obr. 4.4 znázorněn detail srovnání různých typů regulačních diagramů pro větší posun δ . Pro proces, u kterého předem neznáme hodnotu posunu v procesu, je vhodnější než Shewhartův regulační diagram, protože Shewhartův postup při malém posunu detekuje chybu později než nově navržený zónový regulační diagram. Při středně velké hodnotě posunu jsou jeho hodnoty srovnatelné s těmi nejlepšími regulačními diagramy při vyhodnocování účinnosti pomocí ARL_δ .



Obr. 4.3: Srovnání různých typů regulačních diagramů pomocí ARL_{δ} s nově navrženým zónovým regulačním diagramem.



Obr. 4.4: Detail srovnání různých typů regulačních diagramů pomocí ARL_{δ} v rozmezí δ (2,4).

4.4 Ekonomicko-statistická optimalizace různých typů regulačních diagramů bez modelu údržby

V této části provedeme ekonomicko-statistickou optimalizaci dříve popsáných regulačních diagramů, na které použijeme rozšířený ekonomicko-statistický model bez údržby, který byl popsán v kapitole 3.3.2.

Pro výpočet byly použity hodnoty z Tab. 4.11. Tyto jednotlivé modely porovnáváme pomocí ARL_δ . V daném případě je ARL_0 pro všechny typy regulačních diagramů stejné a pro výpočet používáme tedy různé hodnoty ARL_δ , které byly vypočítány v kapitole 3.1.

Příklad: Pro výpočet ekonomicko-statistické optimalizace využijeme výsledků z Tab. 4.11 pro hodnoty ARL_δ a provedeme ekonomicko-statistickou optimalizaci pro výše uvedené regulační diagramy. V daném případě budeme měnit pouze hodnotu δ (vyjádřeno v násobcích σ , kde $\sigma^2 = 1$), která způsobí posun ve střední hodnotě. Pravděpodobnost doby do vzniku poruchy nechť má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda = 0.01$. Předpokládáme tyto typy nákladů, které vzniknou při výrobním procesu:

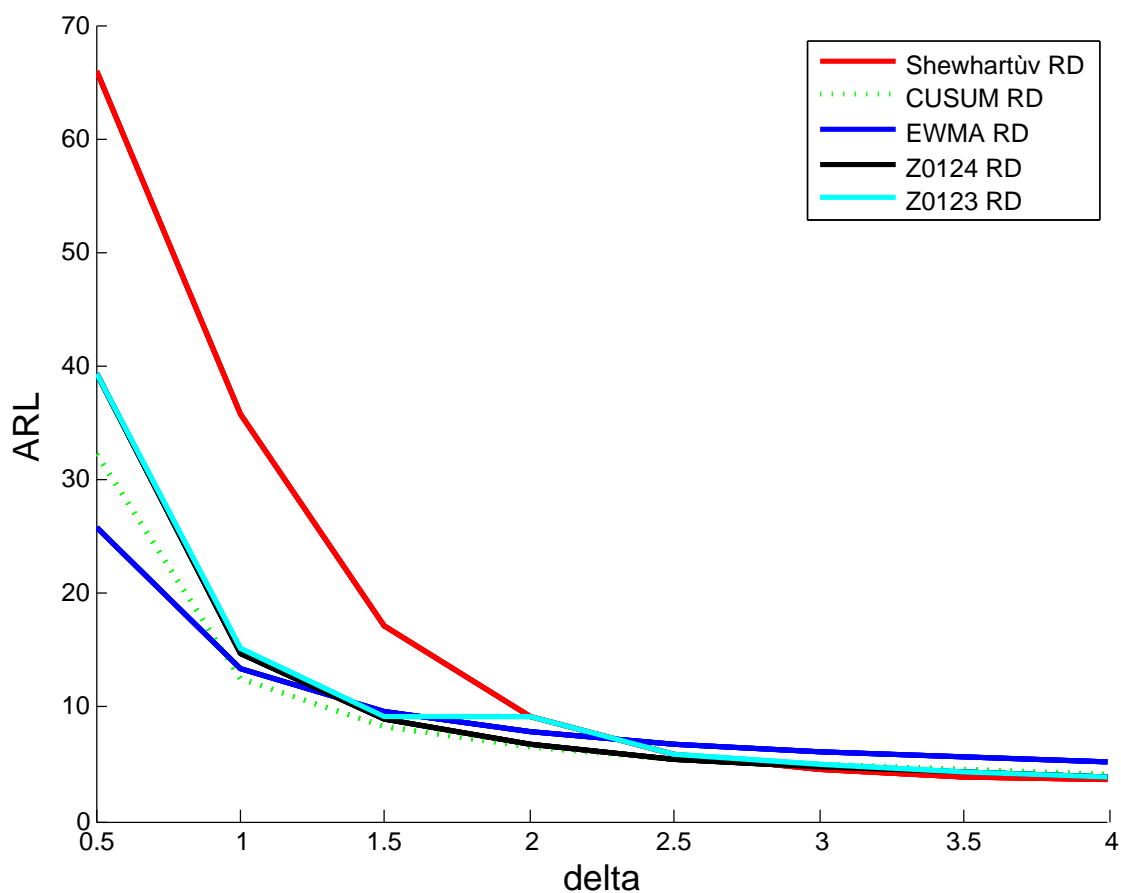
- náklady za hodinu v procesu pod statistickou kontrolou jsou $C_I = 0$ Kč,
- náklady za hodinu v procesu mimo statistickou kontrolu $C_O = 100$ Kč,
- náklady na vyhledání falešného signálu $C_f = 50$ Kč,
- náklady na vyhledání zjistitelné příčiny a její odstranění $C_{zr} = 25$ Kč,
- variabilní náklady za vzorek $C_V = 0.10$ Kč,
- fixní náklady za vzorek $C_F = 0.50$ Kč.

Předpokládejme dobu k zakreslení a výpočtu standardních testů jednoho výsledku při inspekcí, je-li proces mimo statistickou kontrolu, je $T_g = 0.05$ h a dobu k nalezení zjistitelné příčiny $T_r = 2$ h. Dobu na vyhledání falešného signálu T_f a dobu na vyhledání zjistitelné příčiny T_z neuvažujeme. V daném případě budeme optimalizovat rozsah výběru m a dobu mezi jednotlivými inspekcemi h .

V následující Tab. 4.12 je srovnání nákladů různých typů regulačních diagramů při různém posunu δ . Pro malý posun $\delta = 0.5$ je nejlepší volbou regulační diagram EWMA, kde uspoříme nemalé náklady oproti variantě využívající Shewhartův regulační diagram. Pro střední posun $1 \leq \delta \leq 2.5$ je nejlepší používat regulační diagram CUSUM, kde opět uspoříme nemalé náklady oproti volbě Shewhartova regulačního diagramu. Pro větší posun $3 \leq \delta \leq 4$ vyšla nízká hodnota ztrátové funkce u Shewhartova regulačního diagramu, ale v porovnání s ostatními regulačními diagramy uspoříme pouze malou část nákladů. Z toho jednoznačně vyplývá, že použijeme-li pro výpočet nákladů rozšířený ekonomicko-statistický model bez údržby, bude pro nízkou hodnotu δ u zvoleného regulačního diagramu vycházet nízká ztráta.

δ	Shewhart	CUSUM $H_C = 4.766, \kappa = 0.5$	EWMA $\lambda = 0.5, V = 2.5$	Zone Z_{0124}	Zone Z_{0123}
0.50	65.8692	32.1408	25.7929	39.318	39.3039
1.00	35.8500	12.5545	13.4123	14.8320	15.0700
1.50	17.0617	8.2145	9.5986	8.8663	9.1386
2.00	9.0983	6.4372	7.7713	6.7029	9.1386
2.50	5.9122	5.4792	6.7241	5.5335	5.8259
3.00	4.5569	4.8773	6.0843	4.7560	4.9763
3.50	3.9433	4.4681	5.5444	4.2120	4.3458
4.00	3.6504	4.1673	5.2175	3.8646	3.9096

Tab. 4.12: Ekonomicko-statistická optimalizace různých typů regulačních diagramů podle rozšířeného ekonomicko-statistického modelu bez údržby.



Obr. 4.5: Ekonomicko-statistická optimalizace různých typů regulačních diagramů podle rozšířeného ekonomicko-statistického modelu bez údržby.

4.5 Návrh nového typu zónového regulačního diagramu s proměnlivým skóre podle pravidla I

V předchozí části této kapitoly byl popsán nově navržený zónový regulační diagram s 10 zónami. V následujícím odstavci si sestavíme nový přístup k zónovému regulačnímu diagramu s 10 zónami, který je závislý na hodnotě skóre z předcházejícího měření. Pro nulování zónového regulačního diagramu budeme vycházet z pravidla I .

Příklad: Výpočet proměnlivého skóre zónového regulačního diagramu

Pro lepší názornost budeme vycházet ze stavu S_1^+ , to znamená, že se nacházíme nad centrální přímkou se skórem 1. Padne-li následující hodnota charakteristiky do zóny Z_B a následně poté padne do zóny Z_E , potom je skóre S_1^+ , to znamená

$$S_1^+ + S_4^+ + S_0^+ - S_4^+ \equiv S_1^+,$$

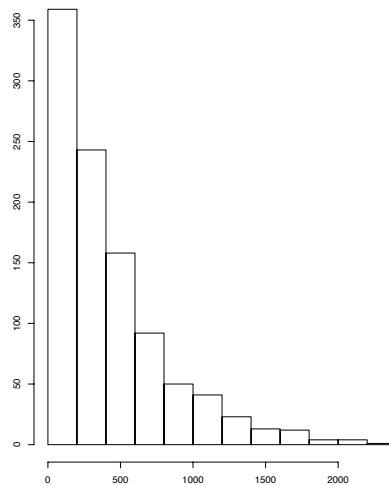
$$S_1^- + S_4^- + S_0^- - S_4^- \equiv S_1^-.$$

Tento přístup k zónovému regulačnímu diagramu s proměnlivým skóre popíšeme odečítáním hodnot skóre z předcházející hodnoty skóre, za podmínky, že daná hodnota padla do zóny Z_B , respektive Z_I a následně do zóny Z_E , respektive Z_F .

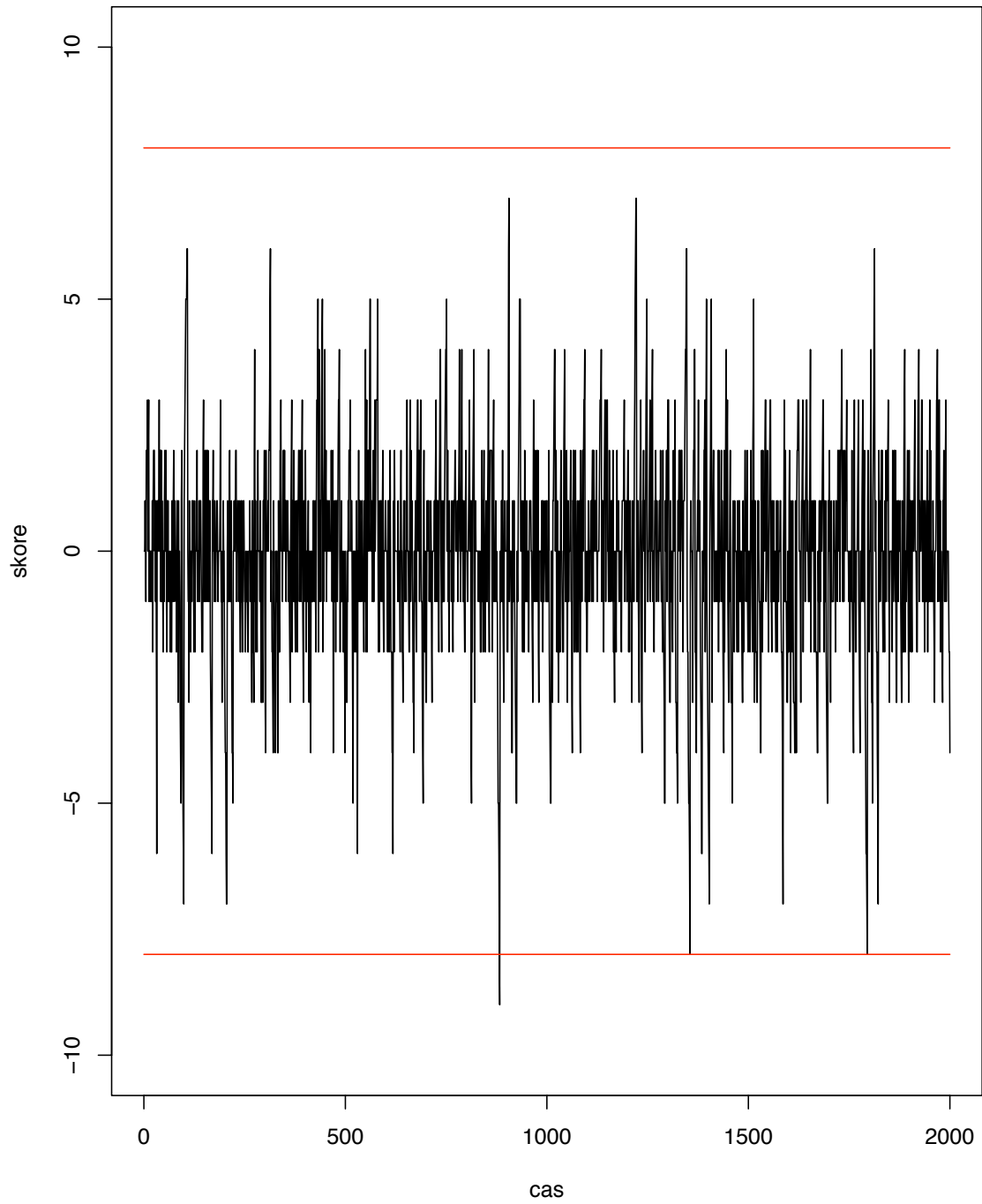
Výpočet ARL se ukázal jako neřešitelný pomocí markovských řetězců, které v daném okamžiku umíme řešit pouze pomocí simulace.

Pro získání představy o fungování nového typu zónového regulačního diagramu s proměnlivým skóre jsme provedli 1000 nezávislých simulací řetězce. Na Obr. 4.7 je znázorněna jedna simulace daného řetězce pro časový interval $(0, 2000)$ a na Obr. 4.8 je znázorněna část této simulace do času absorpce.

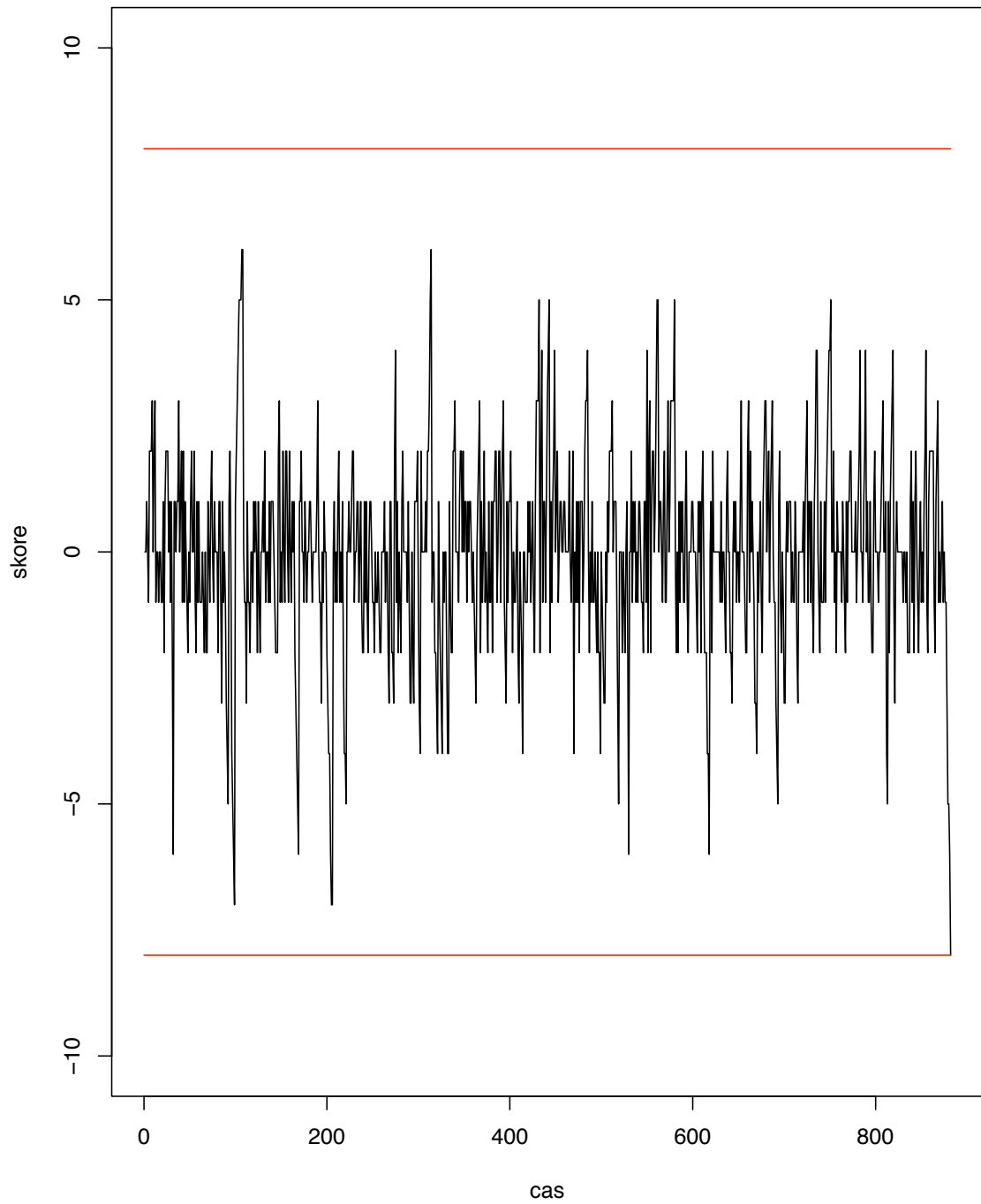
Obr. 4.6 ukazuje histogram časů absorpce získaných z 1000 simulací.



Obr. 4.6: Histogram času do absorpce, který byl tvořen z 1000 simulací



Obr. 4.7: Simulace vývoje skóre pro čas z intervalu (0, 2000)



Obr. 4.8: Simulace do času absorpce z Obr. 4.7

Závěr

5.1 Přínos a využitelnost navržených metod

Ekonomicko-statistická optimalizace regulačních diagramů je jednou ze základních podmínek pro jejich efektivní využití v praxi. V současné situaci, kdy v naprosté většině případů jsou využívány Shewhartovy regulační diagramy bez ohledu na splnění podmínek pro jejich použití, dochází k častým falešným signálům, regulace se prodražuje a je neúčinná. To vše vede k odmítání SPC ze strany vedení firem na straně jedné a k formálnímu přístupu zaměstnanců k provádění nařízené regulace na straně druhé. Řada odběratelů totiž vyžaduje na svých dodavatelích provádění SPC bez ohledu na jeho vhodnost v konkrétních výrobních podmínkách.

Statistická a ekonomická optimalizace spolu s odpovídajícím návrhem regulačního diagramu může řadu z výše zmíněných problémů odstranit nebo alespoň zmírnit. V této práci se zabýváme metodami především ekonomicko-statistické optimalizace základních používaných regulačních diagramů, kterými jsou diagramy Shewhartova typu, EWMA diagramy, CUSUM diagramy a zónové regulační diagramy. Práce obsahuje metody pro výpočet kvalitativních charakteristik regulačních diagramů jako je například průměrná délka běhu. Výpočty těchto charakteristik byly použity pro ekonomicko-statistickou optimalizaci regulačních diagramů. Základem jsou modely pro ekonomicko-statistickou optimalizaci navržené v 60. letech, které byly v této práci dále rozvíjeny.

Vhodně zvolený typ regulačního diagramu může zvýšit účinnost a snížit náklady na zavádění SPC. Náklady vynaložené na tuto ekonomicko-statistickou optimalizaci se výrobcí vrátí ve formě nižší ztráty z provozu SPC. Přínosem této práce je návrh nového typu zónového regulačního diagramu, který má srovnatelné vlastnosti s regulačním diagramem CUSUM nebo EWMA. Tento zónový regulační diagram je jednoduchý, srozumitelný a tedy vhodný i pro méně kvalifikovanou obsluhu.

5.2 Splnění cílů disertační práce

Zvolené cíle, blíže viz kapitola 1.1., byly splněny a získané výsledky byly publikovány v pracích [3] - [10]. U vybraných výsledků se v následujících odstavcích zastavíme podrobněji.

- Matematicko-statistický přístup k regulačním diagramům, který je základem statistické regulace procesu, je podrobně představen v první části třetí kapitoly. Tento přístup ukazuje možnosti výpočtu základních charakteristik regulačního diagramu nutných pro ekonomicko-statistickou optimalizaci.
- Ekonomicko-statistickou optimalizaci regulačních diagramů podle ekonomicko-statistických modelů s údržbou a bez údržby lze nalézt ve druhé části třetí kapitoly. Toto téma bylo doposud opomíjeno v praktických aplikacích, proto u každého modelu uvádím reálný příklad z praxe, viz [5], [6], [7], [8], [9], [10].
- Nový typ zónového regulačního diagramu je navržen ve čtvrté kapitole. Tento nový návrh zónového regulačního diagramu zlepšil svoji výkonnost oproti zónovému regulačnímu diagramu známému z literatury. Má srovnatelné vlastnosti s Shewhartovým regulačním diagramem, přičemž při malém posunu vykazuje mnohem rychlejší detekci posunu ve střední hodnotě. Při velkém posunu je srovnatelný s CUSUM a EWMA diagramem, viz [3], [4].
- Numerické výsledky ekonomicko-statistické optimalizace a výstupy ze simulací jsou podrobně shrnuty na konci čtvrté kapitoly, kde jsou též porovnány různé typy regulačních diagramů podle rozšířeného ekonomicko-statistického modelu bez údržby, viz [3], [9].

5.3 Možnosti směřování dalšího rozvoje

Metody, které popisují ve své práci vykazují poměrně dobré výsledky v simulačních studiích. Jejich hlavním cílem je však zavedení do praktického provozu. K tomu je třeba vytvořit rutinní softwarové nástroje, které budou relativně jednoduché a uživatelsky příjemné, aby jejich zavedení do praxe bylo přijatelné pro výrobní podniky.

Po teoretické stránce existuje poměrně velký prostor pro rozvíjení těchto metod ve vícerozměrných případech a v případech regulace srovnáváním. Stále častěji se používají metody SPC i v nevýrobních podmínkách, což představuje opět potenciální pole pro rozšiřování a rozvíjení stávajících metod.

Přílohy

Přílohy 1 – 5 obsahují hlavní myšlenky důkazů z kapitoly 3, které zde detailně nejsou odvozeny. Podrobné odvození důkazů lze nalézt v článcích a knihách citovaných v závěru této práce. V příloze 6 jsou uvedeny kódy programů v jazyce Matlab, použité při výpočtech v kapitole 3 a 4.

Příloha 1. Náhodná procházka

Nechť X_1, X_2, \dots jsou *iid* náhodné veličiny. Položme

$$S_0 = z \quad \text{a} \quad S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i, \quad n = 1, 2, \dots$$

Řadu S_n nazveme náhodnou procházkou začínající v bodě z . Náhodná veličina N je nazývána okamžikem zastavení procesu, pokud v případě $[N = n]$ závisí pouze na X_1, \dots, X_n to je, $[N = n] \in \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

Tvrzení 1

Wald (1947), viz [80] Necht' X_1, X_2, \dots jsou *iid* náhodné veličiny se střední hodnotou $EX_1 < \infty$ a necht' $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n = 1, 2, \dots$. Pokud N označíme jako okamžik zastavení procesu a jeho střední hodnota $EN < \infty$, pak

$$ES_N = EX_1 \cdot EN. \quad (5.3.0.1)$$

Necht' a, b jsou libovolná čísla taková, že $b < a$. V další části budeme definovat okamžik zastavení procesu N , který je dán vztahem:

$$N = \inf\{n \geq 1 | S_n \geq a \quad \text{nebo} \quad S_n \leq b\}. \quad (5.3.0.2)$$

Tvrzení 2

Stein(1946), viz [74] Necht X_1, X_2, \dots jsou náhodné veličiny pro něž $P(X_1 = 0) < 1$. Necht a, b a z jsou libovolná čísla taková, že $b < z < a$ a $S_n = z + \sum_{i=1}^n X_i$. Potom existují konstanty c a ρ , kde ρ je z intervalu $(0, 1)$ takové, že je-li okamžik zastavení procesu N definován vztahem (5.3.0.2), potom platí.

$$P(N < n) \leq c\rho^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Následkem toho jsou všechny časy konečné a $P(N < \infty) = 1$.

Předpokládejme, že veličiny X_1, X_2, \dots jsou spojité s hustotou $g(x)$. Potom S_1, S_2, \dots jsou také spojité a pro všechna $i = 1, 2, \dots$ podmíněná hustota S_{i+1} při daném $S_i = s$ je $g(x - s)$.

Tvrzení 3

Necht a, b a z jsou libovolná čísla taková, že $b < z < a$ a okamžik zastavení procesu N je dán vztahem (5.3.0.2). Funkce $P(z) = P(S_N \leq b | S_0 = z)$ a $N(z) = E(N | S_0 = z)$ splňují integrální rovnice

$$P(z) = \int_{-\infty}^b g(x - z) dx + \int_a^b P(x) g(x - z) dx,$$

$$N(z) = 1 + \int_a^b N(x) g(x - z) dx.$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} P(z) &= P(S_N \leq b | S_0 = z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq b \cap N = n | S_0 = z) = \\ &= P(S_1 \leq b | S_0 = z) + \sum_{n=2}^{\infty} P(S_n \leq b \cap N = n | S_0 = z) = \\ &= \int_{-\infty}^b g(x - z) dx + \sum_{n=2}^{\infty} \int_b^a P(S_n \leq b \cap N = n | S_1 = x, S_0 = z) g(x - z) dx = \\ &= \int_{-\infty}^b g(x - z) dx + \sum_{n=2}^{\infty} \int_b^a P(S_n \leq b \cap N = n | S_1 = x) g(x - z) dx = \\ &= \int_{-\infty}^b g(x - z) dx + \sum_{n=2}^{\infty} \int_b^a P(S_{n-1} \leq b \cap N = n - 1 | S_0 = x) g(x - z) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^b g(x-z) dx + \int_b^a \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq b \cap N = n \mid S_0 = x) g(x-z) dx = \\
&= \int_{-\infty}^b g(x-z) dx + \int_b^a P(x) g(x-z) dx.
\end{aligned}$$

Analogicky

$$\begin{aligned}
N(z) &= E(N \mid S_0 = z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N \geq n \mid S_0 = z) = \\
&= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_b^a P(N \geq n \mid S_1 = x, S_0 = z) g(x-z) dx = \\
&= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_b^a P(N \geq n \mid S_1 = x) g(x-z) dx = \\
&= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_b^a P(N \geq n-1 \mid S_0 = x) g(x-z) dx = \\
&= 1 + \int_b^a \sum_{n=1}^{\infty} P(N \geq n \mid S_0 = x) g(x-z) dx = \\
&= 1 + \int_b^a N(x) g(x-z) dx.
\end{aligned}$$

Příloha 2. Náhodné procesy

Z matematického hlediska SPC spočívá v detekci bodu změny sledovaného náhodného procesu, který je projekcí výrobního procesu.

Definice: Necht' (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor a $T \subseteq R$. Rodina reálných náhodných veličin $\{X(\omega, t), t \in T\}$ definovaných na (Ω, A, P) se nazývá **náhodný** (nebo také **stochastický**) **proces**.

Proměnnou $t \in T \subseteq R$ budeme interpretovat jako čas. V této práci náhodný vliv, který určuje hodnotu náhodné veličiny, označujeme symbolem ω . Tuto proměnnou ω obvykle vynecháme a pro náhodný proces budeme používat zkrácený zápis $\{X(t), t \in T\}$ nebo ještě úsporněji $\{X(t)\}$, viz [65].

Je-li indexová množina T nejvýše spočetná množina, potom hovoříme o *náhodné posloupnosti*, respektive o náhodném procesu s diskrétním časem. Pokud je T souvislý interval z R , hovoříme o *náhodném procesu se spojitém časem*.¹

Definice: Necht' $\{X(t), t \in T\}$ je náhodný proces takový, že pro každé $t \in T$ existuje střední hodnota $E(X(t))$. Potom funkce $\mu_t = E(X_t)$ definována na T se nazývá střední hodnota procesu $\{X_t\}$. Jestliže platí $E|X_t|^2 < \infty$ pro všechna $t \in T$, potom funkce dvou proměnných definována na $T \times T$ předpisem $C(s, t) = E(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)$ se nazývá autokovarianční funkce procesu $\{X_t\}$. Hodnota $C(t, t)$ se nazývá rozptyl procesu $\{X_t\}$ v čase t .

Definice: Korelační funkce stochastického procesu je funkce dvou proměnných $s, t \in T$ definovaná následujícím vztahem:

$$R(s, t) = \frac{C(s, t)}{\sqrt{C(s, s)C(t, t)}}, \quad s, t \in T,$$

kde $C(s, s) = Var(X(s))$ a $C(t, t) = Var(X(t))$.

Korelační funkce $R(s, t)$ je bezrozměrná veličina, její hodnoty se pohybují v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Pravděpodobnostní chování náhodného procesu je charakterizováno systémem konečně rozměrných distribučních funkcí:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{X(t_1) < x_1, \dots, X(t_n) < x_n\}.$$

Pokud pro tento systém platí:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n),$$

$$\lim_{x_{n+1} \rightarrow +\infty} F_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n),$$

¹Statistická analýza časových řad - Jiří Anděl, 1976

pro libovolné n -tice (x_1, \dots, x_n) , (t_1, \dots, t_n) a libovolné celé n , pak jej nazýváme konzistentním. Poznamenejme, že ke každému náhodnému procesu existuje konzistentní systém distribučních funkcí.

Definice: Náhodný proces se nazývá *striktně stacionární*, jestliže pro každé přirozené n , libovolná reálná x_1, \dots, x_n , libovolná t_1, \dots, t_n z T a h takové, že $t_i + h \in T$ platí:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n).$$

Definice. Náhodný proces se nazývá (*slabě*) *stacionárním*, je-li střední hodnota nezávislá na t a kovarianční funkce nezávisí na konkrétních časech s a t , ale je funkcí pouze jejich rozdílu:

$$R(s+h, t+h) = R(s, t) = r(t-s),$$

pro všechna $s, t, s+h, t+h$ z T . Slabě stacionární proces má konstantní střední hodnotu $\mu_t = \mu$ a rozptyl $\sigma_t^2 = \sigma^2$. Je-li proces striktně stacionární, je také slabě stacionární. Opačný vztah obecně neplatí.

Typickým příkladem stochastického procesu je proces tvořený hodnotami sledované veličiny ve výrobním procesu v čase. Pokud je výrobní proces stabilní (nepůsobí v něm jiné než náhodné vlivy), je sledovaný proces tvořený realizacemi regulované veličiny slabě stacionární.

Markovské procesy

Při analýze procesů zavádíme různé předpoklady týkající se nezávislosti v čase. Nej-silnějším předpokladem (a také nejvzdálenějším od reality) je vzájemná nezávislost veličin $X(t)$ pro různá t . V mnoha praktických situacích je však tento předpoklad nereálný. Jistý ústupek od úplné nezávislosti tvoří předpoklad takzvané markovské vlastnosti.

Uvažujme náhodnou posloupnost $X_i = X(t_i)$, kde časy $t_i \geq 0, i = 0, 1, \dots$ tvoří konečnou nebo spočetnou množinu $T \subset R$. Náhodné veličiny X_i mohou nabývat hodnot z nějaké konečné množiny stavů $\{S_0, S_1, \dots, S_N\}$.

Definice: Náhodná posloupnost $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ se nazývá *markovským řetězcem*, jestliže pro každé přirozené n , každou posloupnost přirozených čísel $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ a každou podmnožinu $\{x_1, \dots, x_{n-1}\} \subset S$ takovou, že $P(X_{i_1} = x_1, \dots, X_{i_{n-1}} = x_{n-1}) > 0$ platí:

$$P[X_{i_n} = x_n | X_{i_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{i_1} = x_1] = P[X_{i_n} = x_n | X_{i_{n-1}} = x_{n-1}].$$

Pravděpodobnost $p_{ij}(n)$ budeme nazývat pravděpodobností přechodů ze stavu i do stavu j , k němuž dojde mezi okamžiky n a $n+1$, který je definován jako:

$$p_{ij}(n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

Pravděpodobnosti přechodů tvoří matici pravděpodobností přechodů:

$$P(n) = (p_{ij}(n))_{i=1, \dots, N}^{j=1, \dots, N}.$$

Definice: Markovský řetězec, pro který pravděpodobnosti $p_{ij}(n)$ nezávisí na n , tedy platí $p_{ij}(n) = p_{ij}$, pro všechna $i, j \in \{0, 1, \dots, N\}$ a všechna $n \in N_0$, se nazývá *homogenní markovský řetězec*.

Definice: Matice pravděpodobností přechodů homogenního markovského řetězce je *stochastická matice*, která má tvar s $N + 1$ stavy:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{N0} & p_{N1} & p_{N2} & p_{NN} \end{pmatrix} \equiv (p_{ij})$$

(Vlastností matice pravděpodobností přechodů je, že součet prvků libovolného řádku matice je roven 1, to je $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ pro $0 \leq i \leq N$.)

Definice: Rozdělení náhodné veličiny X_n nazveme rozdělením markovské posloupnosti v čase $t = n$ a označíme $P[X_n = i] = p_i(n)$. Rozdělení pravděpodobnosti prvního členu markovské posloupnosti v čase $t = 0$ nazveme počátečním rozdělením. Počáteční rozdělení spolu s maticí pravděpodobností přechodu plně určuje pravděpodobnostní chování markovského řetězce.

Nechť markovská posloupnost má pravděpodobnosti přechodů $p_{ij}(n)$ pro každé $0 \leq i, j \leq N$ a $n \in N$ a nechť $p_i(n)$, $0 \leq i \leq N$, je její rozdělení v čase n . Pak rozdělení této náhodné posloupnosti v čase $n + 1$ je dáno vztahem:

$$p_i(n + 1) = \sum_{j \in S} p_j(n) p_{ji}(n),$$

pro každý stav $0 \leq i \leq N$ (takzvaná Chapman-Kolmogorovova rovnost).

Nechť $\{X_t\}_{t \in T}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených diskretních náhodných veličin. Pak tato posloupnost triviálně splňuje markovskou podmínku (budoucí hodnoty nezávisí na minulých). Platí $p_{ij}(n) = p_j(n) = p_j(0)$ pro každý stav $0 \leq i \leq N$ a každý časový okamžik $n \in T$.

Příklad: Uvažujme částici, která se pohybuje v celočíselných bodech na přímce tak, že se v každém kroku posune o jednotku vpravo s pravděpodobností $p \in (0, 1)$, nebo vlevo s pravděpodobností $q = 1 - p$, a to nezávisle na předchozích krocích. Toto je markovská posloupnost nazývaná **náhodná procházka**, a je určena pravděpodobnostmi přechodu $p_{ij}(n) = p$ pro $j = i + 1$, $p_{ij}(n) = q$ pro $j = i - 1$, $p_{ij}(n) = 0$ jinak (pro všechna $n \in N$).

Příloha 3. Testování statistických hypotéz

Klasický přístup

Statistickou hypotézou rozumíme například tvrzení o pravděpodobnostním rozdělení nebo parametru sledované náhodné veličiny. Z hlediska SPC se nulová hypotéza zpravidla formuluje tak, aby při jejím splnění byl proces ve statisticky zvládnutém stavu. Tato hypotéza se poté testuje pro výběry malého rozsahu. Její zamítnutí značí, že proces není ve statisticky zvládnutém stavu² a vyžaduje korekci. Hodnoty odpovídajících regulačních mezí potom závisí na hladině významnosti, viz [40], případně na *ARL*.

Uvažujme klasickou úlohu testování hypotézy H_0 : náhodná veličina X má rozdělení s hustotou $f_0(x)$ proti alternativní hypotéze H_1 : náhodná veličina X má rozdělení s hustotou $f_1(x)$, kde $f_0(x)$ a $f_1(x)$ jsou hustoty vzhledem k nějaké vhodné σ -konečné míře. V našem případě se typicky jedná o Lebesgueovu míru.

Zamítneme-li H_0 na hladině významnosti α , ačkoli je správná, dopouštíme se takzvané chyby 1. druhu. Nezamítneme-li H_0 ačkoli není správná, dopustíme se chyby 2. druhu. Pravděpodobnost chyb 1. a 2. druhu budeme označovat α , respektive β , to je,

$P(\text{zamítneme } H_0 \mid H_0 \text{ platí}) = \alpha$ a $P(\text{nezamítneme } H_0 \mid H_0 \text{ neplatí}) = \beta$. Při nesequenčním přístupu zvolíme rozsah výběru n a pravděpodobnost chyby 1. druhu a na základě realizace x_1, \dots, x_n náhodného výběru X_1, \dots, X_n provedeme test. Často zde použijeme test vycházející z Neyman-Pearsonova lemmatu, to je,

- H_0 zamítneme, jestliže $\prod_{i=1}^n \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} \geq c_\alpha$,
- H_0 nezamítneme, jestliže $\prod_{i=1}^n \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} < c_\alpha$,

kde číslo c_α je stanoveno tak, aby pravděpodobnost chyby 1. druhu byla nejvýše rovna zvolené hladině významnosti α .

Oproti tomu sekvenční analýza vychází z posloupnosti dílčích experimentů, jejichž délka není předem stanovena. Dílčí experimenty se provádějí jeden za druhým a po každém (či několika) se rozhodujeme, zda budeme dělat další dílčí experiment nebo zda sérii pokusů ukončíme a k vyřešení úlohy použijeme informaci obsaženou v dílčích experimentech dosud uskutečněných. Sekvenční analýza vede ke snížení nákladů na experiment. Nevýhoda sekvenční analýzy je, že neznáme předem rozsah výběru a v průběhu experimentu musíme činit částečná rozhodnutí, zda ukončit experiment nebo v něm pokračovat.

Waldův sekvenční přístup

Uvažujme úlohu sekvenčního testování hypotézy H_0 : náhodná veličina X má rozdělení s hustotou $f_0(x)$ proti alternativní hypotéze H_1 : náhodná veličina X má rozdělení s hustotou $f_1(x)$, kde $f_0(x)$ a $f_1(x)$ jsou hustoty vzhledem k σ -konečné míře.

²Regulovaný proces se považuje za statisticky stabilní, pokud regulovaná veličina nemění v čase své rozdělení pravděpodobnosti, to je, nemění se její střední hodnota ani rozptyl.

Zamítáme-li H_0 (to je přijmeme-li H_1) ačkoliv je správná, dopouštíme se takzvané chyby 1. druhu a přijmeme-li H_0 (to je zamítáme-li H_1), ačkoli je správná, dopustíme se chyby 2. druhu. Tyto pravděpodobnosti chyb 1. a 2. druhu budeme označovat α , respektive β . A. Wald navrhl následující sekvenční postup. Zvolíme pravděpodobnosti chyb:

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{přijmeme } H_1 \mid \text{platí } H_0), \\ \beta &= P(\text{přijmeme } H_0 \mid \text{platí } H_1).\end{aligned}$$

Postupně realizujeme náhodný výběr X_1, X_2, \dots . Na základě náhodného výběru X_1, \dots, X_n

- přijmeme H_0 , jestliže $\prod_{i=1}^n \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} \leq B$;
- pokračujeme v náhodném výběru, jestliže $B < \prod_{i=1}^n \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} < A$;
- přijmeme H_1 , jestliže $\prod_{i=1}^n \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} \geq A$;

kde čísla $B < A$ volíme tak, aby pravděpodobnosti chyb byly rovny předepsaným hodnotám α a β . Tedy při našem značení musí platit:

$$\alpha = P_0\left(\prod_{i=1}^n \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} \geq A\right) \quad \text{a} \quad \beta = P_1\left(\prod_{i=1}^n \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} \leq B\right),$$

kde P_0 , respektive P_1 značí pravděpodobnostní míry odpovídající rozdělením pravděpodobnosti s hustotami f_0 , respektive f_1 .

Postupně tedy získáváme pozorování a po n -tém se buď rozhodneme pro přijetí jedné z hypotéz, nebo pro další měření, to je $(n+1)$ -ního pozorování. Při sekvenčním přístupu není předem stanoven rozsah výběru. V tomto případě zastavovací pravidlo (stopping rule) N je náhodná veličina a lze pro ni psát:

$$N = \min \left\{ n \mid \prod_{i=1}^n \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} \notin (B, A) \right\}.$$

Čísla B, A lze dle [80] aproximovat například čísly spočtenými pomocí pravděpodobností chyb podle následujících vztahů:

$$B^* = \frac{\beta}{1 - \alpha} \quad \text{a} \quad A^* = \frac{1 - \beta}{\alpha},$$

kde α, β jsou dány. Výhodou této aproximace je, že nezávisí na rozdělení náhodných veličin a snadno se počítá. Vede pouze ke zvětšení počtu pozorování potřebných k rozhodnutí (ovšem nepodstatnému). Existuje řada přesnějších (a také složitějších) aproximací. Některé z nich uvádíme v kapitole 3.

Jev:

$$\{H_0 \text{ přijmeme}, N = n\} \equiv \left\{ B < \prod_{i=1}^k \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} < A, k = 1, \dots, n-1, \prod_{i=1}^n \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} \leq B \right\}$$

závisí jen na konečném počtu pozorování x_i . Označme $W_{on} = \{\text{přijmeme } H_0, N = n\}$. Potom platí:

$$\begin{aligned} & P(\text{přijmeme } H_0, N = n \mid H_1 \text{ platí}) \\ &= \int_{W_{on}} \dots \int \prod_{i=1}^n f_1(x_i) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n) = \int_{W_{on}} \dots \int \prod_{i=1}^n \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} \prod_{i=1}^n f_0(x_i) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n) \\ &\leq B \int_{W_{on}} \dots \int \prod_{i=1}^n f_0(x_i) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n) = B \cdot P(\text{přijmeme } H_0, N = n \mid H_0). \end{aligned}$$

Odtud využitím věty o úplné pravděpodobnosti dostaneme vztah:

$$\begin{aligned} P(\text{přijmeme } H_0 \mid H_1 \text{ platí}) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\text{přijmeme } H_0, N = n \mid H_1 \text{ platí}) \\ &\leq B \cdot P(\text{přijmeme } H_0 \mid H_0 \text{ platí}). \end{aligned} \quad (5.3.0.3)$$

Tento vztah je s přihlédnutím k definici chyb α a β ekvivalentní s nerovností $\frac{\beta}{1-\alpha} \leq B$.

Podobně dostaneme:

$$P(\text{přijmeme } H_1 \mid H_1 \text{ platí}) \geq A \cdot P(\text{přijmeme } H_1 \mid H_0 \text{ platí}).$$

Vztah (5.3.0.3) je naproti tomu ekvivalentní s nerovností $A \leq \frac{1-\beta}{\alpha}$.

Položme:

$$B^* = \frac{\beta}{1-\alpha} \leq B \quad \text{a} \quad A \leq \frac{1-\beta}{\alpha} = A^*.$$

Použijeme-li čísla B^*, A^* místo B, A , vede to ke zvýšení rozsahu výběru potřebného pro rozhodnutí. Dále nás bude zajímat, jak se změní pravděpodobnosti chyb. Označme si α^* a β^* pravděpodobnosti chyb odpovídající B^* a A^* . Potom platí:

$$\frac{\beta^*}{1-\alpha^*} \leq \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad \frac{1-\beta^*}{\alpha^*} \geq \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme:

$$\alpha^* \leq (1-\beta^*) \frac{\alpha}{1-\beta} < \frac{\alpha}{1-\beta} \quad \text{a} \quad \beta^* \leq \frac{\beta}{1-\alpha} (1-\alpha^*) < \frac{\beta}{1-\alpha},$$

takže

$$\alpha + \beta \geq \alpha^* + \beta^*,$$

to je, součet pravděpodobnosti chyb se nezvětší. Tedy například při $\alpha = \beta = 0.1$ platí:

$$\alpha^* \leq \frac{0.1}{0.9} = 0.111, \quad \beta^* < 0.111 \quad \text{a} \quad \alpha^* + \beta^* \leq 0.2.$$

Příloha 4. Věrohodnostní poměr sekvenčního testování

Waldův věrohodnostní poměr sekvenčního testování je navržen pomocí testování jednoduchých hypotéz oproti jednoduché alternativní hypotéze. Nechť X_1, X_2, \dots jsou *iid* s neznámým rozdělením pravděpodobnosti P . Nechť P_0 a P_1 jsou dány jiným rozdělením s hustotami f_0 a f_1 vzhledem k σ -konečné míře. Máme dvě hypotézy $H_i : P = P_i, i = 0, 1$. Definujeme věrohodnostní poměr v n -té fázi vzorkování

$$l_n = \prod_{j=1}^n \frac{f_1(X_j)}{f_0(X_j)}.$$

Test zahrnuje volbu reálných kladných čísel $A, B, B < A$, a definuje okamžik zastavení procesu vztahem

$$N = \inf \left\{ n \mid l_n \geq A \quad \text{nebo} \quad l_n \leq B \right\}.$$

Pokud $l_N \leq B$, rozhodneme se pro hypotézu H_0 . Pokud $l_N \geq A$, rozhodneme se pro hypotézu H_1 . Pokud $B < l_N < A$, vezmeme další pozorování.

Pravděpodobnosti chybných rozhodnutí jsou dány vztahy

$$\alpha = P_0(l_N \geq A), \quad \text{a} \quad \beta = P_1(l_N \leq B).$$

Často je vhodné test vyjádřit logaritmickým poměrem pravděpodobnosti, který má tvar

$$\tilde{S}_n = \log l_n = \sum_{j=1}^n \log \frac{f_1(X_j)}{f_0(X_j)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \tilde{S}_0 = 0.$$

Potom $\{\tilde{S}_n\}$ je náhodná procházka s počátkem v nule a

$$E_0 \frac{f_1(X_1)}{f_0(X_1)} < 0 < E_1 \frac{f_1(X_1)}{f_0(X_1)}.$$

Položme $a = \log A$ a $b = \log B$. Okamžik zastavení procesu N můžeme zformulovat jako

$$N = \inf \left\{ n \mid \tilde{S}_n \geq a \quad \text{nebo} \quad \tilde{S}_n \leq b \right\}.$$

Dále budeme předpokládat (jak je obvyklé), že $B < 1 < A$, takže $b < 0 < a$. Okamžik zastavení procesu N není pouze pro P_0 a P_1 , ale pro libovolnou pravděpodobnost P . Z toho vyplývá dle Steina (1946), viz [74], že pokud $P\{\log(f_1(X_1)/f_0(X_1)) = 0\} < 1$, potom $P(N < \infty) = 1$ a N má všechny momenty vzhledem k P . Tyto závěry platí zejména pro P_0 a P_1 , jelikož $\log(f_1(X_j)/f_0(X_j))$, $j = 1, 2, \dots$, nejsou degenerované pro pravděpodobnosti $P_i, i = 0, 1$. Proto také posloupnost logaritmických věrohodnostních testů skončí (rozhodne) v konečném čas s pravděpodobností 1, jak za P_0 tak za P_1 .

Položme $\alpha = P_0(l_N \geq A)$ a $\beta = P_1(l_N \leq B)$ do A a B . Necht' pro $n = 1, 2, \dots$ pomocí A_n označíme podmnožinu n -dimenzionálního prostoru, kde $B < l_k(x_1, \dots, x_k) < A$ pro $k = 1, \dots, n-1$ a $l_n(x_1, \dots, x_n) \geq A$. Z toho důvodu $\{N = n \cap l_n \geq A\} = \{(X_1, \dots, X_n) \in A_n\}$. Přímým výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned}
\alpha &= P_0(l_N \geq A) = \sum_{n=1}^{\infty} P_0(N = n, l_n \geq A) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f_0(x_1) \dots f_0(x_n) dx_1 \dots dx_n = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \frac{f_0(x_1) \dots f_0(x_n)}{f_1(x_1) \dots f_1(x_n)} \cdot f_1(x_1) \dots f_1(x_n) dx_1 \dots dx_n = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \frac{1}{l_n(x_1, \dots, x_n)} \cdot f_1(x_1) \dots f_1(x_n) dx_1 \dots dx_n \leq \\
&= \frac{1}{A} \sum_{n=1}^{\infty} P_1\{N = n, l_n \geq A\} = \frac{1}{A} P_1(l_N \geq A) = \frac{1}{A} (1 - \beta),
\end{aligned}$$

takže

$$\frac{1 - \beta}{\alpha} \geq A \quad \text{a podobně} \quad \frac{\beta}{1 - \alpha} \leq B. \quad (5.3.0.4)$$

Pokud předpokládáme, že pravděpodobnost překročení hranic je zanedbatelná, potom nerovnosti (5.3.0.4) se stanou přibližně rovnostmi

$$\frac{1 - \beta}{\alpha} \sim A \quad \text{a} \quad \frac{\beta}{1 - \alpha} \sim B,$$

a proto

$$\alpha \sim \frac{1 - B}{A - B} \quad \text{a} \quad \beta \sim \frac{B(A - 1)}{A - B},$$

odtud pro a a b dostáváme

$$\alpha \sim \frac{1 - e^b}{e^a - e^b} \quad \text{a} \quad \beta \sim \frac{e^b(e^a - 1)}{e^a - e^b}.$$

Na závěr je třeba se vrátit k aproximaci E_0N a E_1N . Zanedbáme-li opět pravděpodobnost „překročení“ (overshoot), potom máme přibližně $\tilde{S}_N = b$ nebo a a navíc

$$P_0(\tilde{S}_N = b) \sim 1 - \alpha \quad \text{a} \quad P_0(\tilde{S}_N = a) \sim \alpha,$$

$$P_1(\tilde{S}_N = b) \sim \beta \quad \text{a} \quad P_1(\tilde{S}_N = a) \sim 1 - \beta.$$

Odtud

$$E_0\tilde{S}_N \sim \alpha a + (1 - \alpha)b \quad \text{a} \quad E_1\tilde{S}_N \sim (1 - \beta)a + \beta b$$

nebo

$$E_0\tilde{S}_N \sim \frac{1 - e^b}{e^a - e^b}a + \left(1 - \frac{1 - e^b}{e^a - e^b}\right)b,$$

$$E_1\tilde{S}_N \sim \left(1 - \frac{e^b(e^a - 1)}{e^a - e^b}\right)a + \frac{e^b(e^a - 1)}{e^a - e^b}b.$$

Podobně z Waldových rovností (5.3.0.1)

$$E_0N \sim \frac{E_0\tilde{S}_N}{E_0 \log \frac{f_1(X_1)}{f_0(X_0)}} = \frac{1}{E_0 \log \frac{f_1(X_1)}{f_0(X_0)}} \left[\frac{1 - e^b}{e^a - e^b}a + \left(1 - \frac{1 - e^b}{e^a - e^b}\right)b \right]$$

a

$$E_1N \sim \frac{E_1\tilde{S}_N}{E_1 \log \frac{f_1(X_1)}{f_0(X_0)}} = \frac{1}{E_1 \log \frac{f_1(X_1)}{f_0(X_0)}} \left[\left(1 - \frac{e^b(e^a - 1)}{e^a - e^b}\right)a + \frac{e^b(e^a - 1)}{e^a - e^b}b \right].$$

Tyto aproximace jsou nazývány Waldovou aproximací.

Příklad: Necht' X_1, X_2, \dots jsou *iid* kopie náhodné veličiny X rozdělené podle $N(\delta, 1)$. Uvažujeme sekvenční test

$$H_0 : \delta = \delta_0 = 0 \quad \text{oproti} \quad H_1 : \delta > 0.$$

Poměr věrohodnosti odpovídá zřejmě k -té fázi vzorkování, který zformulujeme následovně

$$l_k = \prod_{i=1}^k \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} = \exp \left\{ \delta \sum_{i=1}^k X_i - \delta^2 \frac{k}{2} \right\}.$$

Necht' α a β jsou pevné pravděpodobnosti chyb. Ze sekvenční analýzy vyplývá následující pravidlo:

- přijmeme H_0 iff $\log l_k \leq \log \frac{\beta}{1-\alpha} \equiv \delta \sum_{i=1}^k X_i - \frac{k}{2}\delta^2 \leq \log \frac{\beta}{1-\alpha}$,

- přijmeme H_1 iff $\log l_k \geq \log \frac{1-\beta}{\alpha} \equiv \delta \sum_{i=1}^k X_i - \frac{k}{2} \delta^2 \geq \log \frac{1-\beta}{\alpha}$,
- vezmeme další pozorování iff $\log \frac{\beta}{1-\alpha} < \log l_k < \log \frac{1-\beta}{\alpha}$,

kde iff značí „tehdy a jen tehdy“.

Hraniční oblast pro přijetí hypotézy H_1 je dána přímkou

$$y = \frac{1}{\delta} \log \frac{1-\beta}{\alpha} + k \frac{\delta}{2}, \quad (5.3.0.5)$$

a podobně, hraniční oblast pro přijetí hypotézy H_0 je dána přímkou

$$y = \frac{1}{\delta} \log \frac{\beta}{1-\alpha} + k \frac{\delta}{2}.$$

Tyto přímky jsou evidentně rovnoběžné a jejich sklon odpovídá úhlu

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\delta}{2} \right).$$

Navíc, vzdálenost d mezi protnutím přímky (5.3.0.5) s horizontální osou a počátkem souřadnic je

$$d = \frac{2}{\delta^2} \log \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

Jelikož hodnota $\log(1-\beta)$ je obvykle malá, někteří autoři a vývojáři softwarovů počítají d podle vztahu

$$d \sim \frac{2}{\delta^2} \log \frac{1}{\alpha}.$$

Toto je zobrazeno na Obr. 3.6.

Příloha 5. Aproximace $E_0\tau$ a $E_1\tau$ pro metodu CUSUM

Přidáním Waldovy aproximace odvodíme $E_i, i = 0, 1$, střední doby do okamžiku zastavení procesu pro CUSUM

$$\tau = \inf \left\{ n \left| \tilde{S}_n - \min_{0 \leq j \leq n} \tilde{S}_j \geq \widetilde{H}_C \right. \right\}.$$

Označme

$$N = \inf \left\{ n \geq 1 \left| \tilde{S}_n \in (0, \widetilde{H}_C) \right. \right\}.$$

Bohužel, nemůžeme užít Waldovu aproximaci k výpočtu $P_i(\tilde{S}_N \geq H_C)$ a $E_i N, i = 0, 1$ jako spodní hranici intervalu $(0, \tilde{h})$, která je nula. Můžeme ale definovat

$$N(\varepsilon) = \inf \left\{ n \geq 1 \left| \tilde{S}_n \in (-\varepsilon, \widetilde{H}_C) \right. \right\}$$

a předpokládat, že $\varepsilon \searrow 0$. Přidáním Waldovy aproximace dostaneme

$$P_0(\tilde{S}_{N(\varepsilon)} \geq \widetilde{H}_C) \sim \frac{1 - e^{-\varepsilon}}{e^{\widetilde{H}_C} - e^{-\varepsilon}}, P_1(\tilde{S}_{N(\varepsilon)} \geq \widetilde{H}_C) \sim e^{\widetilde{H}_C} \frac{1 - e^{-\varepsilon}}{e^{\widetilde{H}_C} - e^{-\varepsilon}},$$

a

$$E_0 \tilde{S}_{N(\varepsilon)} \sim \widetilde{H}_C \frac{1 - e^{-\varepsilon}}{e^{\widetilde{H}_C} - e^{-\varepsilon}} + (-\varepsilon) \frac{e^{\widetilde{H}_C} - 1}{e^{\widetilde{H}_C} - e^{-\varepsilon}},$$

$$E_1 \tilde{S}_{N(\varepsilon)} \sim \widetilde{H}_C e^{\widetilde{H}_C} \frac{1 - e^{-\varepsilon}}{e^{\widetilde{H}_C} - e^{-\varepsilon}} + (-\varepsilon) e^{-\varepsilon} \frac{e^{\widetilde{H}_C} - 1}{e^{\widetilde{H}_C} - e^{-\varepsilon}}.$$

Nechme $\varepsilon \searrow 0$, potom dostaneme (za předpokladu, že limita existuje)

$$E_0\tau = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{E_0 N(\varepsilon)}{P_0(\tilde{S}_{N(\varepsilon)} \geq \widetilde{H}_C)} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{E_0 \tilde{S}_{N(\varepsilon)}}{\left(E_0 \log \frac{f_1(X)}{f_0(X)} \right) P_0(\tilde{S}_{N(\varepsilon)} > \widetilde{H}_C)} \sim$$

$$\sim \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\widetilde{H}_C \frac{1 - e^{-\varepsilon}}{e^{\widetilde{H}_C} - e^{-\varepsilon}} + (-\varepsilon) \frac{e^{\widetilde{H}_C} - 1}{e^{\widetilde{H}_C} - e^{-\varepsilon}}}{\left(\mathbb{E}_0 \log \frac{f_1(X)}{f_0(X)} \right) \frac{1 - e^{-\varepsilon}}{e^{\widetilde{H}_C} - e^{-\varepsilon}}} = \frac{\widetilde{H}_C + 1 - e^{\widetilde{H}_C}}{E_0 \log \frac{f_1(X)}{f_0(X)}},$$

$$E_1\tau = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{E_1 N(\varepsilon)}{P_1(\tilde{S}_{N(\varepsilon)} \geq \widetilde{H}_C)} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{E_1 \tilde{S}_{N(\varepsilon)}}{\left(E_1 \log \frac{f_1(X)}{f_0(X)} \right) P_1(\tilde{S}_{N(\varepsilon)} > \widetilde{H}_C)} \sim$$

$$\sim \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\widetilde{H}_C e^{\widetilde{H}_C} \frac{1 - e^{-\varepsilon}}{e^{\widetilde{H}_C} - e^{-\varepsilon}} + (-\varepsilon) e^{-\varepsilon} \frac{e^{\widetilde{H}_C} - 1}{e^{\widetilde{H}_C} - e^{-\varepsilon}}}{\left(E_1 \log \frac{f_1(X)}{f_0(X)} \right) e^{\widetilde{H}_C} \frac{1 - e^{-\varepsilon}}{e^{\widetilde{H}_C} - e^{-\varepsilon}}} = \frac{\widetilde{H}_C - 1 + e^{-\widetilde{H}_C}}{E_1 \log \frac{f_1(X)}{f_0(X)}}.$$

Příloha 6. Kódy vybraných programů v jazyce Matlab a R

Ekonomicko-statistická optimalizace nemůže být prováděna bez využití počítačů, za tímto účelem byla napsána řada matematických maker v programu Matlab a R, které lze využít na reálných datech z praxe. Lze pomocí nich spočítat:

- průměrnou délku běhu pro zónový regulační diagram pro 8 zón
- průměrnou délku běhu pro zónový regulační diagram pro 10 zón s hodnotami skóru 0, 1, 2, 3
- průměrnou délku běhu pro zónový regulační diagram pro 10 zón s hodnotami skóru 0, 1, 2, 4
- optimalizační algoritmus pro výpočet ztrátové funkce v základním ekonomicko-statistickém modelu bez údržby
- optimalizační algoritmus pro výpočet ztrátové funkce v rozšířeném ekonomicko-statistickém modelu bez údržby
- optimalizační algoritmus pro výpočet ztrátové funkce v základním ekonomicko-statistickém modelu s údržbou
- optimalizační algoritmus pro výpočet ztrátové funkce v rozšířeném ekonomicko-statistickém modelu s údržbou
- simulace nového typu zónového regulačního diagramu s proměnlivým skóre

Poznámka: % je vysvětlující deskripce

Výpočet *ARL* pro zónový regulační diagram s 8 zónami

% Výpočet *ARL* pro zónový regulační diagram s 8 zónami, který je blíže popsán v kapitole 2.4.4.

```
function[arl1] = ARL
```

```
% posun
```

```
delta = 0
```

```
% nastavení mezí zónového regulačního diagramu
```

```
k = [1 2 3]
```

```
sigma=1;
```

```
% výpočet pravděpodobností v zóně G
```

```
G = normcdf((-delta-k(2))*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta-k(3))*sigma,0,sigma);
```

```
% výpočet pravděpodobností v zóně F
```

```
F = normcdf((-delta-k(1))*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta-k(2))*sigma,0,sigma);
```

```
% výpočet pravděpodobností v zóně E
```

```
E = normcdf(-delta*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta-k(1))*sigma,0,sigma);
```

```
% výpočet pravděpodobností v zóně D
```

```
D = normcdf((-delta+k(1))*sigma,0,sigma) - normcdf(-delta*sigma,0,sigma);
```

```
% výpočet pravděpodobností v zóně C
```

```
C = normcdf((-delta+k(2))*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta+k(1))*sigma,0,sigma);
```

```
% výpočet pravděpodobností v zóně B
```

```
B = normcdf((-delta+k(3))*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta+k(2))*sigma,0,sigma);
```

```
% výpočet matice pravděpodobností přechodů
```

```
P = [ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 D C 0 B 0 0 0;
```

```
E 0 0 0 0 0 0 0 0 D C 0 B 0 0 0;
```

```
F E 0 0 0 0 0 0 0 D C 0 B 0 0 0;
```

```
0 F E 0 0 0 0 0 0 0 D C 0 B 0 0 0;
```

```
G 0 F E 0 0 0 0 0 0 0 D C 0 B 0 0 0;
```

```
0 G 0 F E 0 0 0 0 0 0 0 D C 0 B 0 0 0;
```

```
0 0 G 0 F E 0 0 0 0 0 0 0 D C 0 B 0 0 0;
```

```

0 0 0 G 0 F E 0 D C 0 B 0 0 0;
0 0 0 G 0 F E 0 0 D C 0 B 0 0;
0 0 0 G 0 F E 0 0 0 D C 0 B 0;
0 0 0 G 0 F E 0 0 0 0 D C 0 B;
0 0 0 G 0 F E 0 0 0 0 0 D C 0;
0 0 0 G 0 F E 0 0 0 0 0 0 D C;
0 0 0 G 0 F E 0 0 0 0 0 0 0 D;
0 0 0 G 0 F E 0 0 0 0 0 0 0 0]
% výpočet ARL
AR= inv(eye(15) - P)
ARL= [0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]*AR*[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]'
% Konec programu výpočtu ARL pro zónový regulační diagram s 8 zónami

```

Výpočet *ARL* pro nově navržený zónový regulační diagram s 10 zónami

% Výpočet *ARL* pro zónový regulační diagram s 10 zónami, který je popsán v kapitole 4.

```
function[V] = ARL1
```

```
% posun
```

```
delta = 0
```

```
% nastavení mezí nově navrženého regulačního diagramu
```

```
k = [0.564593 1.564593 2.564593 3.564593]
```

```
sigma=1;
```

```
% výpočet pravděpodobností v zóně I
```

```
I = normcdf((-delta-k(3))*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta-k(4))*sigma,0,sigma);
```

```
% výpočet pravděpodobností v zóně H
```

```
H = normcdf((-delta-k(2))*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta-k(3))*sigma,0,sigma);
```

```
% výpočet pravděpodobností v zóně G
```

```
G = normcdf((-delta-k(1))*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta-k(2))*sigma,0,sigma);
```

```
% výpočet pravděpodobností v zóně F
```

```
F = normcdf(-delta*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta-k(1))*sigma,0,sigma);
```

```
% výpočet pravděpodobností v zóně E
```

```
E = normcdf((-delta+k(1))*sigma,0,sigma) - normcdf(-delta*sigma,0,sigma);
```

```
% výpočet pravděpodobností v zóně D
```

```
D = normcdf((-delta+k(2))*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta+k(1))*sigma,0,sigma);
```

```
% výpočet pravděpodobností v zóně C
```

```
C= normcdf((-delta+k(3))*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta+k(2))*sigma,0,sigma);
```

```
% výpočet pravděpodobností v zóně B
```

```
B= normcdf((-delta+k(4))*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta+k(3))*sigma,0,sigma);
```

```
% výpočet matice pravděpodobností přechodů
```

```
P = [ F 0 0 0 0 0 0 0 0 E D C 0 B 0 0 0;
```

```
G F 0 0 0 0 0 0 0 E D C 0 B 0 0 0;
```

```
H G F 0 0 0 0 0 0 E D C 0 B 0 0 0;
```

```

0 H G F 0 0 0 0 0 E D C 0 B 0 0 0;
I 0 H G F 0 0 0 0 0 E D C 0 B 0 0 0;
0 I 0 H G F 0 0 0 0 0 E D C 0 B 0 0 0;
0 0 I 0 H G F 0 0 0 0 0 E D C 0 B 0 0 0;
0 0 0 I 0 H G F 0 0 0 0 0 E D C 0 B 0 0 0;
0 0 0 I 0 H G F 0 0 0 0 0 E D C 0 B 0 0 0;
0 0 0 I 0 H G F 0 0 0 0 0 E D C 0 B 0 0 0;
0 0 0 I 0 H G F 0 0 0 0 0 E D C 0 B 0 0;
0 0 0 I 0 H G F 0 0 0 0 0 E D C 0 B;
0 0 0 I 0 H G F 0 0 0 0 0 E D C 0;
0 0 0 I 0 H G F 0 0 0 0 0 0 E D C;
0 0 0 I 0 H G F 0 0 0 0 0 0 0 E D;
0 0 0 I 0 H G F 0 0 0 0 0 0 0 0 E];

```

% výpočet ARL

$AR = \text{inv}(\text{eye}(17) - P)$

% konec programu výpočtu ARL pro zónový regulační diagram

$V = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] * AR * [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]'$

% Konec programu výpočtu ARL pro nově navržený zónový regulační diagram s 10 zónami pro hodnoty skóre 0, 1, 2, 4

Výpočet *ARL* pro nově navržený zónový regulační diagram s 10 zónami

Výpočet *ARL* pro zónový regulační diagram s 10 zónami pro hodnoty skóre 0, 1, 2, 3, který je popsán v kapitole 4.

```
function[V] = ARL1

% posun

delta = 0

% nastavení mezí nově navrženého regulačního diagramu

k = [0.521932 1.521932 2.521932 3.521932]

sigma=1;

% výpočet pravděpodobností v zóně I

I = normcdf((-delta-k(3))*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta-k(4))*sigma,0,sigma);

% výpočet pravděpodobností v zóně H

H = normcdf((-delta-k(2))*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta-k(3))*sigma,0,sigma);

% výpočet pravděpodobností v zóně G

G = normcdf((-delta-k(1))*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta-k(2))*sigma,0,sigma);

% výpočet pravděpodobností v zóně F

F = normcdf(-delta*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta-k(1))*sigma,0,sigma);

% výpočet pravděpodobností v zóně E

E = normcdf((-delta+k(1))*sigma,0,sigma) - normcdf(-delta*sigma,0,sigma);

% výpočet pravděpodobností v zóně D

D = normcdf((-delta+k(2))*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta+k(1))*sigma,0,sigma);

% výpočet pravděpodobností v zóně C

C= normcdf((-delta+k(3))*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta+k(2))*sigma,0,sigma);

% výpočet pravděpodobností v zóně B

B= normcdf((-delta+k(4))*sigma,0,sigma) - normcdf((-delta+k(3))*sigma,0,sigma);

% výpočet matice pravděpodobností přechodů

P = [ F 0 0 0 0 0 0 0 0 E D C B 0 0 0 0;
      G F 0 0 0 0 0 0 0 E D C B 0 0 0 0;
      H G F 0 0 0 0 0 0 E D C B 0 0 0 0;
```

```

I H G F 0 0 0 0 0 E D C B 0 0 0 0;
0 I H G F 0 0 0 0 0 E D C B 0 0 0 0;
0 0 I H G F 0 0 0 0 0 E D C B 0 0 0 0;
0 0 0 I H G F 0 0 0 0 0 E D C B 0 0 0 0;
0 0 0 0 I H G F 0 0 0 0 0 E D C B 0 0 0 0;
0 0 0 0 I H G F 0 0 0 0 0 E D C B 0 0 0 0;
0 0 0 0 I H G F 0 0 0 0 0 E D C B 0 0 0 0;
0 0 0 0 I H G F 0 0 0 0 0 E D C B 0 0 0 0;
0 0 0 0 I H G F 0 0 0 0 0 E D C B 0 0 0 0;
0 0 0 0 I H G F 0 0 0 0 0 E D C B 0 0 0 0;
0 0 0 0 I H G F 0 0 0 0 0 E D C B 0 0 0 0;
0 0 0 0 I H G F 0 0 0 0 0 0 E D C B;
0 0 0 0 I H G F 0 0 0 0 0 0 0 E D C;
0 0 0 0 I H G F 0 0 0 0 0 0 0 0 E D;
0 0 0 0 I H G F 0 0 0 0 0 0 0 0 0 E];

```

% výpočet ARL

```
AR = inv(eye(17) - P)
```

% konec programu výpočtu ARL pro zónový regulační diagram

```
V = [0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0]*AR*[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]'
```

% Konec programu výpočtu ARL pro nově navržený zónový regulační diagram s 10 zónami pro hodnoty skóre 0, 1, 2, 3.

Výpočet ztrátové funkce v základním ekonomicko-statistickém modelu bez údržby *DLmodel.m*

% Výpočet ztrátové funkce základního ekonomicko-statistického modelu bez údržby viz. kapitola 3.3.1.

% Vstupní optimalizované proměnné jsou m rozsah výběru, h interval mezi inspekcemi, k šířka regulačních mezí v násobcích směrodatné odchylky.

% Výpočet funkce v základním ekonomicko-statistickém modelu bez údržby

```
function [DLValue] = DLmodel (m, h, k)
```

% Vstupní proměnné pro výpočet ztrátové funkce v základním ekonomicko-statistickém modelu bez údržby

% intenzita poruch za jednotku času

```
lambda = 0.01;
```

% náklady za hodinu procesu ve stavu pod kontrolou snižené o náklady mimo kontrolu

```
M = 100;
```

% doba mezi inspekcemi

```
Tg = 0.05;
```

% doba na opravu zjistitelné příčiny

```
Tr = 2;
```

% náklady na falešný signál

```
Cf = 50;
```

% náklady na vyhledání a opravení zjistitelné příčiny

```
Czr = 25;
```

% fixní náklady

```
CF = 0.5;
```

% variabilní náklady

```
CV = 0.1;
```

% posun v procesu

```
delta = 2;
```

% Výpočet ztrátové funkce L

```
%%%%%%%%%
```



```

% výpočet pravděpodobnosti procesu pod kontrolou, kdy došlo k falešnému signálu
ALPHA = 2.*(1 - normcdf(k));
% výpočet pravděpodobnosti beta
P = normcdf((delta .* sqrt(m)) - k)+normcdf((delta .* sqrt(m)) + k)-1;
% výpočet doby, kdy je proces mimo statistickou kontrolu
TOut = ((1./P - 0.5). * h) + ((lambda. * h.^2)./12) + (Tg. * m) + Tr;
% výpočet ztrátové funkce L
DLValue =((lambda.*M.*TOut) + ((ALPHA.*Cf)./h) +
+ ( lambda.*Czr))./ ((1+lambda.*TOut) + (CF./h+CV.*m./h));
% Konec funkce v DLmodelu

```

Výpočet proměnné m, h a k *DLValue.m*

```
% Pomocný optimalizační skript pro výpočet funkce DLmodel.m

DL = Inf;
step = 0.1;
steph = 0.1;
solution = zeros(3,1);
% nastavení rozsahu výběru
for m = 4:6
% nastavení šířky regulačních mezí
for k = 2.9:step:3.2;
% nastavení intervalu mezi inspekci
for h = 1:steph:1.6;
value = DLmodel(m,h,k);
if DL > value;
DL = value;
solution = [m,h,k];
end
end
end
end
DL
solution
% Konec skriptu DLValue.m
```

Výpočet proměnné m, h a k podle metody Nelder-Mead *NelderMead.m*

% Skript pro výpočet optimálních hodnot pro rozsah výběru m , šířku regulačních mezí k a dobu mezi inspekcemi h .

```
clear % vyčištění paměti
p=3; % dimenze (p+1=počet vrcholů)
Nds=60; % maximální počet iterací k výrobě
beta=1; % koeficient odrazu (standardní výběr)
gamma=1; % koeficient rozšíření (standardní výběr)
alpha=0.5; % koeficient kontrakce (standardní výběr)
% definování počátečních vrcholů simplexu
% Definujeme počáteční vrcholy simplexu jako sloupce matice P:
P(:,1)=[ 4 5 6 7 ; 0.8 1.2 1.5 2.0 ; 2.4 2.9 3.1 3.5 ];
Pnew(:,:)= zeros(p, p+1);
% Start hlavní smyčky
% Nejprve spočteme hodnoty všech vrcholů
for j=1:Nds
% Spočteme hodnoty ztrátové funkce J(i,j) pro všechny vrcholy
for i=1:p+1
J(i,j)=DLmodel(P(1,i,j),P(2,i,j),P(3,i,j));
end
% Najdeme indexy nejhoršího a nejlepšího vrcholu:
[Jmax(j),maxvertex(j)]=max(J(:,j));
[Jmin(j),minvertex(j)]=min(J(:,j));
% Nejhorší a nejlepší vrcholy:
thetamax(:,j)=P(:,maxvertex(j),j);
thetamin(:,j)=P(:,minvertex(j),j);
thetacent(:,j)= zeros(p,1);
% Najdeme střed thetacent(:,j) všech vrcholů kromě nejhoršího
for i=1:p+1
```

```

thetacent(:,j)=thetacent(:,j)+P(:,i,j);
end
thetacent(:,j)=(1/p)*(thetacent(:,j)-thetamax(:,j));
% Výpočet reflexního bodu thetaref(:,j) s koeficientem beta:
thetaref(:,j)=thetacent(:,j)+beta*(thetacent(:,j)-thetamax(:,j));
% ... a hodnoty ztrátové funkce v něm:
Jref(j)=DLmodel(thetaref(1,j), thetaref(2,j), thetaref(3,j));
% Najdeme druhý nejhorší vrchol:
% ... uložíme hodnotu nejhoršího
temp1=J(maxvertex(j),j);
% a zařídíme, aby nemohl být vybrán v dalším kroku
J(maxvertex(j),j)=-Inf;
% v němž najdeme druhý nejhorší
[Jmaxwm(j),maxvertexwm(j)]=max(J(:,j));
% a ten nejhorší zase vrátíme zpět.
J(maxvertex(j),j)=temp1;
% Nyní otestujeme reflexní bod:
% 1) je-li nejlepší, provedeme expanzi
if Jmin(j)>Jref(j),
thetaexp(:,j)=thetaref(:,j)+gamma*(thetaref(:,j)-thetacent(:,j));
Jexp(j)=DLmodel(thetaexp(1,j), thetaexp(2,j), thetaexp(3,j));
% a rozhodneme o novém vrcholu
if Jexp(j)<Jref(j),
thetaneu(:,j)=thetaexp(:,j);
Jnew(j)=Jexp(j);
else
thetaneu(:,j)=thetaref(:,j);
Jnew(j)=Jref(j);
end
end

```

```

% S=1
Pnew(:,:)=P(:,:,j);
Pnew(:,maxvertex(j))= thetanew(:,j);
end
% 2) je-li horší než nejlepší a lepší než druhý nejhorší,
% položíme nový vrchol reflexnímu
if Jmaxwm(j)>Jref(j) & Jref(j)>=Jmin(j),
thetanew(:,j)=thetaref(:,j);
Jnew(j)=Jref(j);
% S=2
Pnew(:,:)=P(:,:,j);
Pnew(:,maxvertex(j))= thetanew(:,j);
end
% 3) je-li horší než druhý nejhorší, provedeme kontrakci
if Jref(j)>=Jmaxwm(j),
% a to buď vnitřní
if Jmax(j)<=Jref(j)
thetanew(:,j)=alpha*thetamax(:,j)+(1-alpha)*thetacent(:,j);
% nebo vnější
else
thetanew(:,j)=alpha*thetaref(:,j)+(1-alpha)*thetacent(:,j);
end
Jnew(j)=DLmodel(thetanew(1,j), thetanew(2,j), thetanew(3,j));
% S=3
Pnew(:,:)=P(:,:,j);
Pnew(:,maxvertex(j))= thetanew(:,j);
% Pokud je nový vrchol i po kontrakci nejhorší ...
if Jnew(j)>Jmax(j),
for i=1:p+1 % ... provedeme zkrácení k nejlepšímu vrcholu

```

```
Pnew(:,i)=0.5*(P(:,i,j)+thetamin(:,j));  
% S=4  
end  
end  
end  
P(:,j+1)=Pnew;  
end  
Min = Jnew(Nds)  
m = thetanew(1,Nds)  
h = thetanew(2,Nds)  
k = thetanew(3,Nds)  
% Konec skriptu Nelder-Mead
```

Vykreslení grafu pro základní ekonomicko-statistický model bez údržby z kapitoly 3 *DGgraf.m*

% Vykreslení grafu pro ztrátovou funkci v základním ekonomicko-statistickém modelu bez údržby pro dva volené parametry h interval mezi inspekcemi, k šířkou regulačních mezí a pevným rozsahem výběru $m = 4$.

```
[h,k] = meshgrid(0.8:0.01:2.0,2.5:0.01:3.7);
```

```
colormap hsv
```

```
q = DLmodel4(h,k);
```

```
mesh(h,k,q);
```

% Vykreslení grafu pro ztrátovou funkci v základním ekonomicko-statistickém modelu bez údržby pro dva volené parametry h interval mezi inspekcemi, k šířkou regulačních mezí a pevným rozsahem výběru $m = 5$.

```
[h,k] = meshgrid(0.8:0.01:2.0,2.5:0.01:3.7);
```

```
colormap hsv
```

```
v = DLmodel(5,h,k);
```

```
surfc(h,k,v);
```

% Vykreslení grafu pro ztrátovou funkci v základním ekonomicko-statistickém modelu bez údržby pro dva volené parametry h interval mezi inspekcemi, k šířkou regulačních mezí a pevným rozsahem výběru $m = 6$.

```
[H,K] = meshgrid(0.8:0.01:2.0,2.5:0.01:3.7);
```

```
Z = DLmodel6(H,K);
```

```
mesh(h,k,q), hold, surfc(h,k,v), plot3(H,K,Z),
```

```
hold off
```

% Popis os ztrátové funkce v základním ekonomicko-statistickém modelu bez údržby

```
xlabel('h'),ylabel('k'), zlabel('Ztrátová funkce')
```

```
text(1.9,3.7,4.7, 'm = 6')
```

```
text(1.9,3.7,4.48, 'm = 5')
```

```
text(1.9,3.7,4.1, 'm = 4')
```

% Konec vykreslení grafu pro ztrátovou funkci v základním ekonomicko-statistickém modelu bez údržby

Výpočet ztrátové funkce v rozšířeném ekonomicko-statistickém modelu bez údržby *LVmodel.m*

% Výpočet ztrátové funkce v rozšířeném ekonomicko-statistickém modelu bez údržby viz. kapitola 3.3.2.

% Vstupní optimalizované proměnné jsou m rozsah výběru, h interval mezi inspekcemi, k šířka regulačních mezí v násobcích směrodatné odchylky.

% Výpočet ztrátové funkce v rozšířeném ekonomicko-statistickém modelu bez údržby

function [LValue] = LVmodel (m, h, k)

% Vstupní proměnné pro výpočet ztrátové funkce v rozšířeném ekonomicko-statistickém modelu bez údržby

% náklady na vyhledání falešného signálu

Cf = 50;

% intenzita poruch

lambda = 0.01;

% fixní náklady

CF = 0.50;

% variabilní náklady

CV = 0.1;

% doba mezi odebráním vzorků

Tg = 0.05;

% proces běží během vyhledávání příčiny

gammaz = 1;

% proces běží během opravy

gammar = 1;

% doba na vyhledání falešného alarmu

Tf = 0;

% doba na vyhledání zjistitelné příčiny

Tz = 0;

% doba na opravení zjistitelné příčiny

Tr = 2;


```

% náklady na kvalitu mimo kontrolu
CO = 100;

% náklady na kvalitu pod kontrolou
CI = 0;

% náklady na vyhledání a opravení zjistitelné příčiny
Czr = 25;

% posun v procesu
delta = 2;

% Výpočet ztrátové funkce L
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% výpočet pravděpodobnosti procesu pod kontrolou, kdy došlo k falešnému signálu
ALPHA = 2.*(1 - normcdf(k));

% výpočet pravděpodobnosti beta
P = normcdf((delta .* sqrt(m)) - k)+normcdf((delta .* sqrt(m)) + k)-1;

% střední počet inspekci sledované charakteristiky, kdy je proces pod kontrolou
ARL0 = 1./ALPHA;

% střední počet inspekci sledované charakteristiky, kdy je proces mimo kontrolu
ARLd = 1./P;

% výpočet nákladů na jednu inspekci
Cs=(CF + CV.*m);

% předpokládaný počet inspekci do výskytu zjistitelné příčiny
S=exp(-(lambda.*h))./(1-exp(-(lambda.*h)));

% výpočet doby do výskytu zjistitelné příčiny
NU=1./lambda-h.*S;

% výpočet celkové délky cyklu procesu
T=1./lambda+(Tf.*(1 - gammar)./ARL0).*S-NU+m.*Tg+h.*ARLd+Tz+Tr;

% výpočet nákladů na kvalitu
CQ=CI./lambda+CO.*(-NU+m.*Tg+h.*ARLd+ (gammaz.*Tz) + (gammar.*Tr));

% výpočet nákladů na detekci zjistitelné příčiny

```

```
CD=S.*Cf./ARL0;  
% výpočet nákladů na odběr vzorků  
CS=(1./lambda+(-NU+m.*Tg+h.*ARLd+ (gammaz.*Tz) + (gammar.*Tr))).*Cs./h;  
% výpočet ztrátové funkce L  
LValue=(CQ+CD+Czr+CS)./T;  
% Konec skriptu LVmodel.m
```

Výpočet proměnných m, h a k v rozšířeném ekonomicko-statistickém modelu bez údržby *LValue.m*

```
% Pomocný optimalizační skript pro výpočet funkce LVmodel.m

DL = Inf;

step = 0.1;

steph = 0.1;

solution = zeros(3,1);

% nastavení rozsahu výběru

for m = 4:6

% nastavení šířky regulačních mezí

for k = 2.9:step:3.2;

% nastavení intervalu mezi inspekceci

for h = 1:steph:1.6;

value = LVmodel(m,h,k);

if DL > value;

DL = value;

solution = [m,h,k];

end

end

end

end

DL

solution

% Konec skriptu LValue.m
```

Výpočet proměnné m, h a k podle metody Nelder-Mead *NelderMead.m*

```
clear % vyčištění paměti
p=3; % dimenze (p+1=počet vrcholů)
Nds=60; % maximální počet iterací k výrobě
beta=1; % koeficient odrazu (standardní výběr)
gamma=1; % koeficient rozšíření (standardní výběr)
alpha=0.5; % koeficient kontrakce (standardní výběr)
% definování počátečních vrcholů simplexu
% Definujeme počáteční vrcholy simplexu jako sloupce matice P:
P(:,1)= [ 4 5 6 7 ; 0.8 1.2 1.5 2.0 ; 2.4 2.9 3.1 3.5 ];
Pnew(:,:)= zeros(p, p+1);
% Start hlavní smyčky
% Nejprve spočteme hodnoty všech vrcholů
for j=1:Nds
% Spočteme hodnoty ztrátové funkce J(i,j) pro všechny vrcholy
for i=1:p+1
J(i,j)=LVmodel(P(1,i,j),P(2,i,j),P(3,i,j));
end
% Najdeme indexy nejhoršího a nejlepšího vrcholu:
[Jmax(j),maxvertex(j)]=max(J(:,j));
[Jmin(j),minvertex(j)]=min(J(:,j));
% Nejhorší a nejlepší vrcholy:
thetamax(:,j)=P(:,maxvertex(j),j);
thetamin(:,j)=P(:,minvertex(j),j);
thetacent(:,j)= zeros(p,1);
% Najdeme střed thetacent(:,j) všech vrcholů kromě nejhoršího
for i=1:p+1
thetacent(:,j)=thetacent(:,j)+P(:,i,j);
end
end
```

```

thetacent(:,j)=(1/p)*(thetacent(:,j)-thetamax(:,j));
% Výpočet reflexního bodu thetaref(:,j) s koeficientem beta:
thetaref(:,j)=thetacent(:,j)+beta*(thetacent(:,j)-thetamax(:,j));
% ... a hodnoty ztrátové funkce v něm:
Jref(j)=LVmodel(thetaref(1,j), thetaref(2,j), thetaref(3,j));
%Najdeme druhý nejhorší vrchol:
% ... uložíme hodnotu nejhoršího
temp1=J(maxvertex(j),j);
% a zařídíme, aby nemohl být vybrán v dalším kroku
J(maxvertex(j),j)=-Inf;
% v němž najdeme druhý nejhorší
[Jmaxwm(j),maxvertexwm(j)]=max(J(:,j));
% a ten nejhorší zase vrátíme zpět.
J(maxvertex(j),j)=temp1;
% Nyní otestujeme reflexní bod:
% 1) je-li nejlepší, provedeme expanzi
if Jmin(j)>Jref(j),
thetaexp(:,j)=thetaref(:,j)+gamma*(thetaref(:,j)-thetacent(:,j));
Jexp(j)=LVmodel(thetaexp(1,j), thetaexp(2,j), thetaexp(3,j));
% a rozhodneme o novém vrcholu
if Jexp(j)<Jref(j),
thetaneu(:,j)=thetaexp(:,j);
Jnew(j)=Jexp(j);
else
thetaneu(:,j)=thetaref(:,j);
Jnew(j)=Jref(j);
end
% S=1
Pnew(:,j)=P(:,j);

```

```

Pnew(:,maxvertex(j))= thetanew(:,j);
end
% 2) je-li horší než nejlepší a lepší než druhý nejhorší,
% položíme nový vrchol reflexnímu
if Jmaxwm(j)>Jref(j) & Jref(j)>=Jmin(j),
thetanew(:,j)=thetaref(:,j);
Jnew(j)=Jref(j);
% S=2
Pnew(:,:)=P(:,:,j);
Pnew(:,maxvertex(j))= thetanew(:,j);
end
% 3) je-li horší než druhý nejhorší, provedeme kontrakci
if Jref(j)>=Jmaxwm(j),
% a to buď vnitřní
if Jmax(j)<=Jref(j)
thetanew(:,j)=alpha*thetamax(:,j)+(1-alpha)*thetacent(:,j);
% nebo vnější
else
thetanew(:,j)=alpha*thetaref(:,j)+(1-alpha)*thetacent(:,j);
end
Jnew(j)=LVmodel(thetanew(1,j), thetanew(2,j), thetanew(3,j));
% S=3
Pnew(:,:)=P(:,:,j);
Pnew(:,maxvertex(j))= thetanew(:,j);
% Pokud je nový vrchol i po kontrakci nejhorší ...
if Jnew(j)>Jmax(j),
% ... provedeme zkrácení k nejlepšímu vrcholu
for i=1:p+1
Pnew(:,i)=0.5*(P(:,i,j)+thetamin(:,j));

```

```
% S=4
end
end
end
P(:,j+1)=Pnew;
end
Min = Jnew(Nds)
m = thetanew(1,Nds)
h = thetanew(2,Nds)
k = thetanew(3,Nds)
% Konec skriptu Nelder-Mead
```

Vykreslení grafu *LGgraf.m*

% Vykreslení grafu pro ztrátovou funkci v rozšířeném ekonomicko-statistickém modelu bez údržby pro dva volené parametry h interval mezi inspekcemi a k šířkou regulačních mezí, kde rozsah výběru je stanoven na hodnotu $m = 5$.

```
[h,k] = meshgrid(0.8:0.01:2.0,2.5:0.01:3.7);
```

```
colormap hsv
```

```
q = LVmodel(5,h,k);
```

```
surf(h,k,q);
```

% Popis os ztrátové funkce v rozšířeném ekonomicko-statistickém modelu bez údržby

```
xlabel('h'),ylabel('k'), zlabel('Ztrátová funkce')
```

% Konec vykreslení grafu pro ztrátovou funkci v rozšířeném ekonomicko-statistickém modelu bez údržby

Výpočet ztrátové funkce pro základní ekonomicko-statistický model s údržbou *S1S3E.m*

% Výpočet ztrátové funkce pro základní ekonomicko-statistický model s údržbou viz. kapitola 3.4.1.

% Vstupní optimalizované proměnné jsou m rozsah výběru, h interval mezi inspekcemi, k šířka regulačních mezí v násobcích směrodatné odchylky.

% Výpočet ztrátové funkce pro základní ekonomicko-statistický model s údržbou

function [S1S3Value] = S1S3E(m,h,k)

% počet vzorků před plánovanou údržbou

mp = 300;

% předpokládaná doba na odběr vzorků a zakreslení do diagramu

Tg = 0.05;

% doba na vyhledání falešného signálu

Tf = 1;

% doba na vyhledání zjistitelné příčiny

Tz = 1;

% doba k provedení reaktivní údržby

TR = 3;

% doba k provedení plánované údržby

TP = 8;

% náklady mimo kontrolu

CO = 100;

% náklady pod kontrolou

CI = 0;

% náklady na vyhledání falešného signálu

Cf = 5;

% náklady na provedení reaktivní údržby

CR = 50;

% náklady na provedení plánované údržby

CP = 75;

```

% fixní náklady
CF = 5;

% variabilní náklady
CV = 1;

% posun v procesu
delta = 2;

% parametr měřítka (Weibullovo rozdělení)
lambda = 0.05;

% parametr tvaru (Weibullovo rozdělení)
rho = 1;

% Cs náklady na jednu inspekci
Cs = (CF + CV.*m);

% proces pokračuje během hledání příčiny
gammaz = 1;

% proces pokračuje během reaktivní údržby
gammaR = 1;

% proces pokračuje během plánované údržby
gammaP = 1;

% distribuční funkce Weibullova rozdělení
F = 1 - exp(-((mp + 1). * h. * lambda).^rho);

% výpočet integrálu pomocí skriptu Q.m, kde integrál je od 0 do (mp+1)h
Q3 = Q((mp+1).*h, lambda, rho);

% výpočet integrálu pomocí skriptu Q.m, kde integrál je od 0 do (mp+1)h
Q4 = Q3./F;

% výpočet integrálu pomocí skriptu Q.m, kde integrál je od 0 do mph
Q1 = Q(mp.*h, lambda, rho);
Q2 = Q1./F;

% výpočet s
s = 0;

```

```

for i = 1:mp;
s = s + exp(-(lambda. * i. * h).^rho);
end
s = s - mp. * exp(-(lambda. * (mp + 1). * h).^rho);
% výpočet NU (okamžik, kdy došlo ke zjistitelné příčině)
NU = (Q3 - h. * s);
if NU < 0
NU = 0;
end
% výpočet pravděpodobnosti procesu pod kontrolou, kdy došlo k falešnému signálu
ALPHA = 2.*(1 - normcdf(k));
% výpočet pravděpodobnosti beta
P = 1-normcdf((delta .* sqrt(m)) + k)+normcdf((delta .* sqrt(m)) - k);
% střední počet inspekcí sledované charakteristiky, kdy je proces pod kontrolou
ARL0 = 1./ALPHA;
% střední počet inspekcí sledované charakteristiky, kdy je proces mimo kontrolu
ARLd = 1./P;
% Pravděpodobnosti jednotlivých scénářů
% Výpočet pravděpodobnosti scénáře S1
P1 = wblcdf(mp.*h,lambda, rho).*P;
% Výpočet pravděpodobnosti scénáře S2
P2 = wblcdf((mp+1).*h,lambda, rho)-wblcdf(mp.*h,lambda, rho).*P;
% Výpočet pravděpodobnosti scénáře S3
P3 = 1 - wblcdf((mp+1).*h,lambda, rho);
% Scénář S1
% Výpočet střední doby cyklu obnovy ze scénáře S1
% doba procesu pod kontrolou S1
TI1 = Q2 + (1 - gammaz).*((s.*Tf)./ARL0);
% doba procesu mimo kontrolu scénáře S1

```

$TO1 = h \cdot ARLd - NU + Tg \cdot m + Tz + TR;$
 % Výpočet celkové doby ze scénáře S1
 $T1 = TI1 + TO1;$
 % Výpočet nákladů ze scénáře S1
 % výpočet nákladů na kvalitu ze scénáře S1
 $CQ1 = CI \cdot Q2 + CO \cdot (h \cdot ARLd - NU + Tg \cdot m + (\gamma_{maz} \cdot Tz) + (\gamma_{maR} \cdot TR));$
 % výpočet nákladů na odběr vzorků ze scénáře S1
 $CS1 = Cs \cdot (Q2 + h \cdot ARLd - NU + Tg \cdot m + (\gamma_{maz} \cdot Tz) + (\gamma_{maR} \cdot TR)) / h;$
 % výpočet nákladů na hledání falešného signálu ze scénáře S1
 $CD1 = (s \cdot Cf) / ARL0 + CR;$
 % Výpočet celkových nákladů ze scénáře S1
 $C1 = CQ1 + CS1 + CD1;$
 % Scénář S2
 % Výpočet střední doby cyklu obnovy ze scénáře S2
 % výpočet doby procesu pod kontrolou ze scénáře S2
 $TI2 = Q4 + ((1 - \gamma_{maz}) \cdot s \cdot Tf) / ARL0;$
 % výpočet doby procesu mimo kontrolu ze scénáře S2
 $TO2 = (mp + 1) \cdot h - Q4 + TR;$
 % Výpočet celkové doby ze scénáře S2
 $T2 = TI2 + TO2;$
 % Výpočet nákladů ze scénáře S2
 % výpočet nákladů na kvalitu ze scénáře S2
 $CQ2 = (CI \cdot Q4) + CO \cdot ((mp+1) \cdot h - Q3 + (\gamma_{maR} \cdot TR));$
 % výpočet nákladů na odběr vzorků ze scénáře S2
 $CS2 = mp \cdot Cs;$
 % výpočet nákladů na hledání falešného signálu ze scénáře S2
 $CD2 = (s \cdot Cf) / ARL0 + CR;$
 % Výpočet celkových nákladů ze scénáře S2
 $C2 = CQ2 + CS2 + CD2;$

```

% Scénář 3

% Výpočet střední doby cyklu obnovy ze scénáře S3

% výpočet doby procesu pod kontrolou ze scénáře S3
T3 = (mp + 1).*h + ((1 - gammaz).*((mp.*Tf)./ARL0)) + TP;

% Výpočet nákladů ze scénáře S3

% výpočet nákladů na kvalitu ze scénáře S3
CQ3 = CI.*((mp+1).*h+(gammaP.*TP));

% výpočet nákladů na odběr vzorků ze scénáře S3
CS3 = mp.*Cs;

% výpočet nákladů na hledání falešného signálu ze scénáře S3
CD3 = (mp.*Cf)./ARL0 + CP;

% Výpočet celkových nákladů ze scénáře S3
C3 = CQ3 + CS3 + CD3;

% Výpočet celkových nákladů z jednotlivých scénářů
C = (C1.*P1) + (C2.*P2) + (C3.*P3);

% Výpočet celkové střední doby cyklu procesu z jednotlivých scénářů
T = (T1.*P1) + (T2.*P2) + (T3.*P3);

% Výpočet ztrátové funkce pro tři scénáře
S1S3Value = C./T;

% Konec funkce S1S3E pro základní ekonomicko-statistický model s údržbou

```

Výpočet integrálu pro ekonomicko-statistické modely s údržbou $Q.m$

% pomocný skript pro výpočet integrálu ekonomicko-statistické modely s údržbou

function [Qw] = Q(x, lambda, rho)

% počítá střední hodnotu Weibullova rozdělení s parametry

% lambda (měřítko) a rho (tvar) na intervalu (0,x).

f = (t)((rho.(lambda.*t).^rho).*exp(-(lambda.*t).^rho));*

Qw = quadgk(f,0,x);

Vykreslení grafu funkce *S1S3Ggraf.m*

```
% Vykreslení grafu ztrátové funkce pro základní ekonomicko-statistický model s údržbou
% nastavení pevného rozsahu výběru
m = 5;
% nastavení intervalu mezi inspekci
hd = 0.01; h0 = 2.0; hh = 3.0;
% nastavení šířky regulačních mezí
kd = 0.01; k0 = 0.5; kh = 1.0;
% vykreslení grafu pro základní ekonomicko-statistický model s údržbou
[h,k] = meshgrid(h0:hd:hh,k0:kd:kh);
[mh mk] = size(h);
v=[];
Cmin= Inf; hmin=h0; kmin=k0;
colormap hsv
for ih = 1:mh
for ik = 1:mk
hx = h0 + (ih-1)*hd;
kx = k0 + (ik-1)*kd;
v(ih,ik) = S1S3E(m,hx,kx);
if v(ih,ik)<Cmin
Cmin=v(ih,ik);
hmin=hx;
kmin=kx;
end
end
end
[Cmin m kmin hmin ]
surfc(h,k,v);
% Popis os údržbové ztrátové funkce pro základní ekonomicko-statistický model s údržbou
```

```
xlabel('h'),ylabel('k'), zlabel('Ztrátová funkce')  
grid on  
% Konec vykreslení grafu ztrátové funkce pro základní ekonomicko-statistický model  
s údržbou
```


Výpočet ztrátové funkce pro rozšířený ekonomicko-statistický model s údržbou S4S7.m

% Výpočet ztrátové funkce pro rozšířený ekonomicko-statistický model s údržbou viz kapitola 3.4.2.

% Vstupní optimalizované proměnné jsou m rozsah výběru, h interval mezi inspekcemi, k šířka regulačních mezí v násobcích směrodatné odchylky.

% Výpočet ztrátové funkce pro rozšířený ekonomicko-statistický model s údržbou

```
function [S4S7Value] = S4S7(m,k,h)
```

% vyčištění paměti

```
clear []
```

% počet vzorků před plánovanou údržbou

```
mp = 100;
```

% předpokládaná doba na odběr vzorků a zakreslení do diagramu

```
Tg = 0.05;
```

% proces pokračuje během hledání zjistitelné příčiny

```
gammaz = 1;
```

% proces pokračuje během reaktivní údržby

```
gammaR = 1;
```

% proces pokračuje během plánované údržby

```
gammaP = 1;
```

% proces pokračuje během náhradní údržby

```
gammaC = 1;
```

% doba na vyhledání zjistitelné příčiny

```
Tz = 1;
```

% doba na určení a provedení náhradní údržby

```
TC = 1;
```

% doba na určení a provedení reaktivní údržby

```
TR = 3;
```

% doba na určení a provedení plánované údržby

```
TP = 8;
```

```

% náklady na kvalitu za hodinu procesu ve stavu pod kontrolou
CI = 10;
% náklady na kvalitu za hodinu procesu ve stavu mimo kontrolu
CO = 200;
% náklady na vyhledání falešného signálu
Cf = 100;
% náklady na provedení náhradní údržby
CC = 100;
% náklady na provedení reaktivní údržby
CR = 50;
% náklady na provedení plánované údržby
CP = 75;
% fixní náklady
CF = 5;
% variabilní náklady
CV = 1;
% posun v procesu
delta = 2;
% parametr měřítka (Weibullova rozdělení)
lambda = 0.05;
% parametr tvaru (Weibullova rozdělení)
rho = 1;
% Cs náklady na jednu inspekci
Cs=(CF + CV.*m);
% výpočet s
s = 0;
for i = 1:mp;
s = s + exp(-(lambda.*i.*h).^rho);
end

```

```

s = s - mp. * exp(-(lambda. * (mp + 1). * h).rho);
% výpočet distribuční funkce Weibullova rozdělení
F = 1 - exp(-((mp + 1). * h. * lambda).rho);
TAU=1./lambda-h.*s;
% výpočet integrálu pomocí skriptu Q.m, kde integrál je od 0 do (mp+1)*h
Q3 = Q((mp+1).*h, lambda, rho);
% výpočet integrálu pomocí skriptu Q.m, kde integrál je od 0 do (mp+1)*h
Q4 = Q3./F;
% výpočet integrálu pomocí skriptu Q.m, kde integrál je od 0 do mp*h
Q1 = Q(mp.*h, lambda, rho);
Q2 = Q1./F;
% výpočet NU (okamžik, kdy došlo ke zjistitelné příčině)
NU = (Q3 - h.*s);
if NU<0;
NU = 0;
end
% výpočet pravděpodobnosti procesu pod kontrolou, kdy došlo k falešnému signálu
ALPHA = 2.*(1 - normcdf(k));
% výpočet pravděpodobnosti beta
P = normcdf((k-delta .* sqrt(m)) )-normcdf((-k-delta .* sqrt(m)));
% střední počet inspekcí sledované charakteristiky, kdy je proces pod kontrolou
ARL0 = 1./ALPHA;
% střední počet inspekcí sledované charakteristiky, kdy je proces mimo kontrolu
ARLd = 1./P;
% výpočet pravděpodobnosti scénáře S4
S4 = 0;
for i = 1:mp;
S4 = S4 + (ALPHA. * (1 - ALPHA).(i-1). * (1 - wblcdf(i. * h, lambda, rho)));
end

```

% výpočet pravděpodobnosti scénáře S5

S5 = 0;

for i = 1:mp;

S51 = 1;

for j = 1:i-1;

S51 = S51 - ALPHA.* (1 - ALPHA).^(j-1);

end

S52 = 0;

for l = 1:mp-i+1;

S52 = S52 + (1 - P). * P.^(l-1);

end

S5 = S5 + (wblcdf(i.*h,lambda,rho) - wblcdf((i-1).*h,lambda,rho)).*S51.*S52;

end

% výpočet pravděpodobnosti scénáře S6

S6 = 0;

for i = 1:mp;

S6 = (1 - wblcdf(mp.*h,lambda,rho)) - S6 + (ALPHA.* (1 - ALPHA).⁽ⁱ⁻¹⁾. *
* (1 - wblcdf(i.*h,lambda,rho)));

end

% výpočet pravděpodobnosti scénáře S7

S7 = 0;

for i = 1:m;

S7 = wblcdf(mp.*h,lambda,rho) - S5;

end

% výpočet nákladů ze scénáře S4

C4 = 0;

for i = 1:mp;

C4 = CO.*(h.*C4+(i.*ALPHA.*(1-ALPHA).⁽ⁱ⁻¹⁾.*(1-wblcdf(i.*h,lambda,rho))))
+ gammaC.*TC + Cs.*C4 + Cf + CC;

end

% výpočet nákladů ze scénáře S5

$$C5 = CO.*Q2 + CI.*(h.*ARLd - NU + n.*Tg + gammaz.*Tz + \\ + gammaR.*TR)+1/h.*S5.*Cs+ CR;$$

% výpočet nákladů ze scénáře S6

$$C6 = CO.*((mp+1).*h + gammaP.*TP)+mp.*Cs + CP;$$

% výpočet nákladů ze scénáře S7

$$C7 = CO.*Q2 + CI.*((mp+1).*h - Q2 + gammaR.*TR) + mp.*Cs + CR;$$

% výpočet střední doby cyklu obnovy ze scénáře S4

$$T4 = 0;$$

for i = 1:mp;

$$T4 = h.*T4 + (i.*ALPHA.*(1 - ALPHA).^{(i-1)}.*(1 - F.*(i.*h))) + Tz + TC;$$

end

% výpočet střední doby cyklu obnovy ze scénáře S5

$$T5 = Q2 + h.*ARLd - NU + n.*Tg + Tz + TR;$$

% výpočet střední doby cyklu obnovy ze scénáře S6

$$T6 = (mp+1).*h + TP;$$

% výpočet střední doby cyklu obnovy ze scénáře S7

$$T7 = (mp+1).*h + TR;$$

% výpočet celkových nákladů z jednotlivých scénářů

$$C = C4.*S4 + C5.*S5 + C6.*S6 + C7.*S7;$$

% výpočet střední doby cyklu obnovy z jednotlivých scénářů

$$T = T4.*S4 + T5.*S5 + T6.*S6 + T7.*S7;$$

% Výpočet ztrátové funkce pro rozšířený ekonomicko-statistický model s údržbou

$$S4S7Value = C./T;$$

% Konec funkce S4S7 pro rozšířený ekonomicko-statistický model s údržbou

Výpočet simulace nového typu zónového regulačního diagramu s proměnlivým skóre v R

% Výpočet simulace nového typu zónového regulačního diagramu s proměnlivým skóre v R, který je blíže popsán v kapitole 4.5.

```
Nsim<-1000
```

```
Time<-3000
```

```
X<-array(0,c(Nsim,Time))
```

```
% hodnoty skóre
```

```
% pomocná proměnná, která určuje přírůstek skóre
```

```
x<-array(0,c(Nsim,Time))
```

```
% pomocná proměnná, která určuje, zda je přírůstek skóre kladný (xx=1) či záporný (xx=0)
```

```
xx<-array(0,c(Nsim,Time))
```

```
% pomocná proměnná pro čas absorpce
```

```
Tapom<-array(0,c(Nsim,Time))
```

```
% čas absorpce
```

```
Ta<-array(0,c(Nsim))
```

```
xxx<-array(0,c(Nsim,Time))
```

```
for(sim in 1:Nsim)
```

```
for (i in 1:Time)
```

```
xxx[sim,i]<-x[sim,i]
```

```
if (xx[sim,i]<0.5)xxx[sim,i]<-x[sim,i]
```

```
for (sim in 1:Nsim)
```

```
x[sim,]<-rnorm(Time)
```

```
x[sim,]<-abs(x[sim,])
```

```
xx[sim,]<-rbinom(n=Time,size=1,p=0.5)
```

```
for (sim in 1:Nsim)
```

```
for (i in 1:Time)
```

```
pom<-0
```

```
if (x[sim,i]>0.5)pom<-1
```

```

if (x[sim,i]>1.5)pom<-2
if (x[sim,i]>3)pom<-4
if (x[sim,i]>6)pom<-8
x[sim,i]<-pom
for (sim in 1:Nsim)
for (i in 2:Time)
% V předchozím stavu mám kladné skóre
if (X[sim,i-1]>-0.1)
% přírůstek skóre je kladný
if (xx[sim,i]>0.5)
X[sim,i]<-X[sim,i-1]+x[sim,i]
% v případě, že se vrátíme do nulového pásma
if (x[sim,i]<0.5)
% a předchozí krok byl 4 nebo 8 (8 je už irrelevantní)
if (x[sim,i-1]>3)
% odčítáme předchozí přírůstek skóre
X[sim,i]<-X[sim,i-1]-x[sim,i-1]
% přírůstek je záporný
if (xx[sim,i]<0.5)
% pak skóre je rovno zápornému přírůstku
X[sim,i]<-x[sim,i]
% V předchozím stavu mám záporné skóre
if (X[sim,i-1]<0.1)
% přírůstek skóre je záporný
if (xx[sim,i]<0.5)
X[sim,i]<-X[sim,i-1]-x[sim,i]
% v případě, že se vrátíme do nulového pásma
if (x[sim,i]<0.5)
% a předchozí krok byl 4 nebo 8 (8 je už irrelevantní)

```

```

if (x[sim,i-1]>3)
X[sim,i]<-X[sim,i]+x[sim,i-1]
% odčítáme předchozí přírůstek skóre
if (xx[sim,i]>0.5)
% přírůstek je záporný
X[sim,i]<-x[sim,i]
if (abs(X[sim,i])>7.5)Tapom[sim,i]<-1
for (sim in 1:Nsim)
Ta[sim]<-Time
for (i in 1:(Time-1))
if (Tapom[sim,Time-i]>0.5)Ta[sim]<-Time-i
%————— výstup - grafů —————
postscript(file="histogram.ps", width=10, height=10, horizontal=FALSE)
hist(Ta,xlab="",ylab="",main="")
dev.off()
q<-seq(1,T,by=1)
plot(-20,-5,xlim=c(0,T),ylim=c(-10,10))
lines(q,simulace)
lines(c(0,T),c(8,8),col="red")
lines(c(0,T),c(-8,-8),col="red")
T<-2000
simulace<-array(0,c(T))
for (i in 1:T) simulace[i]<-X[13,i]
q<-seq(1,T,by=1)
postscript(file="simulace1.ps", width=10, height=10, horizontal=FALSE)
plot(-20,-5,xlim=c(0,T),ylim=c(-10,10),xlab="cas",ylab="skore")
lines(q,simulace)
lines(c(0,T),c(8,8),col="red")
lines(c(0,T),c(-8,-8),col="red")

```



```
dev.off()
T<-Ta[13]
simulacej=array(0,c(T))
for (i in 1:T) simulace[i]<-X[13,i]
q<-seq(1,T,by=1)
postscript(file="simulace2.ps", width=10, height=10, horizontal=FALSE)
plot(-20,-5,xlim=c(0,T),ylim=c(-10,10),xlab="cas",ylab="skore")
lines(q,simulace)
lines(c(0,T),c(8,8),col="red")
lines(c(0,T),c(-8,-8),col="red")
dev.off()
% Konec simulace
```

Literatura

Seznam publikací autorky

- [1] Cézová E. (2006) *Statistické řízení finančních toků*. Robust 2006, Praha: Jednota českých matematiků a fyziků. pp. 43–50, ISBN 80-7015-073-4
- [2] Cézová E. (2007) *Metrologie v praxi*. Request 06, CQR, pp. 43–52, ISBN 978-80-01-03709-6
- [3] Cézová E. (2008) *Zónový regulační diagram*, Robust 2008, Praha: Jednota českých matematiků a fyziků. pp. 33–41, ISBN 978-80-7015-004-7
- [4] Cézová E. (2008) *Zone control charts*. In Current Trends in Statistics in V6, Praha, pp. 17–23, ISBN 978-80-904330-0-7
- [5] Cézová E. (2008) *Ekonomicko-statistický návrh regulačního diagramu*, Request 08, CQR VUT Brno, ISBN 978-80-214-3774-6
- [6] Cézová E. (2009) *Ekonomické aspekty statistické regulace*. dostupné online z: [http :
//www.isq.cz/npj/2009/](http://www.isq.cz/npj/2009/)
- [7] Cézová E. (2011) *Optimální regulační diagramy*. dostupné online z: http://www.isq.cz/npj/2011/06_2011.pdf
- [8] Cézová E. (2012) *Ekonomická analýza statistické regulace výrobního procesu s údržbou*. dostupné online z: http://www.isq.cz/npj/2012/09_CezovaNL2012.pdf
- [9] Cézová E. (2012) *Ekonomicko-statistický návrh regulačního diagramu*, Robust 2012, v tisku
- [10] Cézová E., Dohnal G. (2011) *Bayesovské adaptivní regulační diagramy*. Informační bulletin České statistické společnosti, DOI:10.5300/IB, Ročník 22, č. 2., pp. 26–34

Seznam použité literatury

- [11] Antoch J., Jarušková D. (2002) *On-line quality control*. In: Contributions in Statistics, C. Laury et al. eds., Springer, Heidelberg, pp. 87–124
- [12] Baud-Lavigne B., Bassetto S., Penz B. (2009) *A broader view of the economic design of the X-bar chart in semiconductor industry*. International Journal of Production Research, pp. 1–12
- [13] Case K. E. and Fang J. (1990) *Improving the zone control chart*. ASQC Quality congress transactions - Toronto, pp. 494–500
- [14] ČSN ISO 8258 (01 0271) (1993) *Shewhartovy regulační diagramy*, Praha, Český normalizační institut. 36 s.
- [15] ČSN ISO 7873 (01 0273) (1995) *Regulační diagramy pro aritmetický průměr s výstražnými mezemi*, Praha, Český normalizační institut. 18 s.
- [16] ČSN ISO 7966 (01 0274) (1995) *Přejímací regulační diagramy*, Praha, Český normalizační institut. 28 s.
- [17] ČSN ISO 7870-1(01 0272) (2010) *Regulační diagramy - Část 1: Všeobecné pokyny*, Praha, Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví. 20 s.
- [18] ČSN EN 61165 (01 0691) (2007) *Použití Markovových technik*, Praha, Český normalizační institut. 32 s.
- [19] ČSN EN ISO 9000 (01 0300) (2006) *Systémy managementu kvality - Základní principy a slovník*.
- [20] ČSN EN ISO 9001 (01 0321) (2009) *Systém managementu kvality - Požadavky*, Praha, Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví. 56 s.
- [21] ČSN IEC 50(191) (01 0102) (1993) *Medzinárodný elektrotechnický slovník, Kapitola 191: Spol'ahlivost' a akost' služieb*, Český normalizační institut, Praha 168 s.
- [22] Crowder S. V. (1987a) *Average run lengths of exponentially weighted moving average charts*. J. Quality Technology 19, pp. 161–164.
- [23] Crowder S., Hawkins D. M., Reynolds Jr. M. R. & Yashchin E. (1997) *Process Control and statistical Inference*. Journal of Quality Technology, 29, pp. 134–139
- [24] Dogan A. Serel (2009) *Economic design of EWMA control charts based on loss function*, Mathematical and Computer modelling 49, pp. 745–759
- [25] Dohnal G. (2008) *Design of control charts*, Proceedings of REQUEST '08, CQR (in Czech)
- [26] Dohnal G. (2009) *Charakteristiky kvality při statistickém řízení procesu*, REQUEST '09, CQR

- [27] Dohnal G. (2011) *Markovské modely ve spolehlivosti výrobních systémů*, profesorská přednáška
- [28] Dohnal G. (2008) *O optimalizaci regulačních diagramů*, Robust '2008, CQR, pp. 55–65, ISBN 978-80-7015-004-7
- [29] Dohnal G., *Soudobé trendy v hodnocení stability procesů*, CQR
- [30] Dohnal G. (2009) *Zpoždění při statistickém řízení jakosti*. Sborník přednášek Hradecké statistické dny 2009, IB ČStS 4
- [31] Dohnal G., *Delay in statistical control of systems with wear*. Quality and Reliability Engineering International, DOI:10.1002/qre.1265
- [32] Dohnal G. (1997) *Teorie hromadné obsluhy*, skriptum ČVUT v Praze
- [33] Duncan A. J. (1956) *The economic design of X-charts used to maintain current control of a process*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 51, No. 274, pp. 228–242
- [34] Duncan A. J. (1971) *The economic design of X-charts when there is a multiplicity of assignable causes*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 66, No. 333, pp. 107–121
- [35] Engin A. B. (2008) *Determination of optimum economic inspection by economic control chart design and by machine efficiency estimation: An application in weaving industry*. Simulation modelling practice and theory 16, pp. 147–170
- [36] Fabian F., Horálek V., Křepela J., Michálek J., Chmelík V., Choudounský J., Král J. (2007) *Statistické metody řízení jakosti*. Česká společnost pro jakost, ISBN 978-80-02-01897-1
- [37] Frehr H. U. (1995) *Total quality management*. 1. vyd. Brno: UNIS publishing. 258 s. ISBN 3-446-17135-5. Dodatek A. Statistické řízení procesů - SPC, s.234.
- [38] Hammer M., Champy J. (1996) *Reengineering - radikální pr. oměna firmy: Manifest revoluce v podnikání*. Vodáček Leo. 2. vyd. Praha: Management Press, 210 s. ISBN 80-85943-30-1.
- [39] Hunter S. (1986) *The Exponentially Weighted Moving Average*. J Quality Technology, Vol. 18, No. 4, pp. 203–207.
- [40] Hušková M., *Sekvenční analýza*. Univerzita Karlova v Praze, Praha
- [41] Charongrattanasakul P., Pongpullponsak A. (2011) *Minimizing the cost of integrated systems approach to process control and maintenance model by EWMA control chart using genetic algorithm*, Expert systems with applications 38, pp. 5178–5186
- [42] Chen Y., Hsieh K. (2007) *Hotteling's T^2 charts with variable sample size and control limit*. European Journal of Operational Research 182, pp. 1251–1262.

- [43] Issam B. K., Mohamed L. (2008) *Support vector regression based residual MCUSUM control chart for autocorrelated process*, Applied Mathematics and Computation, pp. 1–10
- [44] Jaehn A. H. (1989) *Zone control charts find new applications*. ASQC Quality congress transactions - Toronto, pp. 890-895
- [45] James R. Evans, William M. Lindsay (1993) *The Management and Control of Quality* ., Second Edition, West publishing Company, USA
- [46] Kemeny J. G., Snell J. L. (1984) *Finite Markov Chains*, Springer, Heidelberg.
- [47] Kemp K. W. (1961) *The average run length of the cumulative sum chart when a V-mask is used*. J. Royal Statistical Society B 23, pp. 149–153.
- [48] Lee H. CH., Apley D. W. (2011) *Improved design of robust exponentially weighted moving average control charts for autocorrelated processes*. Quality and Reliability Engineering International 27, pp. 337–352.
- [49] Linderman K., Anderson J. C., McKone-Sweet K. E. (2005) *An integrated systems approach to process control and maintenance*. European Journal of Operational Research 164, pp. 324–340
- [50] Linderman K., Choo A. S. (2002) *Robust economic control chart design*. IIE Transactions 34, 1069–1078.
- [51] Lorenzen T. J. a Vance, L. C. (1986) *The economic design of control charts: a unified approach*. Technometrics 28, pp. 3–10
- [52] MacGregor J. F. a Kourti T. (1995) *Statistical process control of multivariate processes*, Control Eng. Practice, Vol. 3, No. 3, pp. 403–414
- [53] McWilliams P. T. (1994) *Economic, statistical and economic-statistical X chart designs*. Journal of Quality Technology, vol. 26, No.3, pp. 227–238
- [54] McWilliams P. T., Saniga E.M., Davis D.J. (1995) *Economic, statistical and economic-statistical design of attribute charts*. Journal of Quality Technology, vol. 27, No.1, pp. 56–73
- [55] Douglas C. Montgomery (2001) *Introduction to Statistical Quality Control.*, Four Edition
- [56] Moskowitz H. and Plante R. (1994) *Effect of quality loss functions on the economic design of x process control charts*. European Journal of Operational Research 72, pp. 333–349
- [57] Nelder J. A., Mead R. (1965) *A simplex method for function minimization*. The computer journal 7(4), pp. 308–313
- [58] Nelson L. (1984) *The Shewhart control chart tests for special causes*. J. Quality Technology 16, pp. 237-239.

- [59] Nenes G., Tagaras G. (2007) *The economically designed two-sided Bayesian X control chart*. European Journal of Operational Research 183, pp. 263–277
- [60] Niaki S. T. A., Malaki M., Ershadi M. J. (2011) *A particle swarm optimization approach on economic and economic-statistical designs of MEWMA control charts*, Scientia Iranica E 18 (6), pp. 1529–1536
- [61] Page E. S. (1954) *Continuous inspection schemes*. Biometrika, 41, pp. 100–115
- [62] Page E. S. (1961) *Cumulative sum charts*. Technometrics, 3, pp. 1–9
- [63] Pan Xia (2005) *An alternative approach to multivariate EWMA control chart*. Journal of Applied Statistics, Vol. 32, No. 7, pp. 695–705
- [64] Prabhu S. S., Montgomery D. C., Runger G. C. (1997) *Economic-statistical design of an adaptive X chart*. Int. J. Production Economics 49, pp. 1–15
- [65] Prášková Z., Lachout P. (2005) *Základy náhodných procesů*. Univerzita Karlova v Praze, Praha
- [66] Reynolds M. R. Jr. (1975) *Approximations to the average run length in cumulative sum control charts*. Technometrics 17, pp. 65–71.
- [67] John H. Reynolds (1971) *The Run Sum Control Chart Procedure*. Journal of Quality Technology, vol. 3, No.1, pp. 23–27
- [68] Roberts S. W. (1996) *A Comparison of Some Control Chart Procedures*. Technometrics, vol. 8, No.3, pp. 411–430
- [69] Robins H. a Siegmund D. (1970) *Boundary crossing probabilities for the Wiener process and sample sums*. Annals of Mathematical Statistics 41, pp. 1410–1429.
- [70] Robson M., Ullah P. (1998) *Praktická příručka podnikového reengineeringu*. Management Press, Praha, ISBN 80-85943-64-6.
- [71] Runger G. C., Montgomery D. C. (1993) *Adaptive sampling Enhancements for Shewhart Control Charts* IIE Transactions, Vol. 25, 3, pp. 41–51
- [72] Shewhart W. A. (1931) *Economic control of quality of manufactured product*. New York: Van Nostrand.
- [73] Siegmund D. (1985) *Sequential Analysis: Test and Confidence Intervals*. J. Wiley, New York.
- [74] Stein C. (1946) *A note on cumulative sums*. Annals of Mathematical Statistics 17, pp. 498–499.
- [75] Taguchi G., Chowdhury S., Wu Y. (2005) *Taguchi's quality engineering handbook*, Wiley
- [76] Taguchi G. (1984) *Quality Evaluation for Quality Assurance*, American-Supplier Institute, Romulus MI

- [77] Tošenovský J., Noskiewičová D. (2000) *Statistické metody pro zlepšování jakosti*, MONTANEX, ISBN 80-7225-040-X
- [78] Tošenovský J., Noskiewičová D., Plura J., Petříková R., Nenadál J.(2008) *Moderní management jakosti, principy, postupy, metody*,
- [79] Vommi V. B., Seetala Murty, S. N. (2007) *A simple approach for robust economic design of control charts*. Computers & Operations Research 34, pp. 2001 – 2009
- [80] Wald A. (1947) *Sequential Analysis*. J. Wiley, New York.
- [81] Western Electric Company (1956) *Statistical Quality Control Handbook*. First Edition, USA
- [82] Donald J. W. (2004) *Advanced Topics in Statistical Process Control*., Second Edition
- [83] Woodall W. H. (2000) *Controversies and Contradictions in Statistical Process Control*. Journal of Quality Technology, 32, pp. 341 – 350
- [84] Woodall W. H. (1990) *Performance of the zone control chart*. Commun. Statist.-theory meth.,19(5), pp. 1581 – 1587
- [85] Woodall W. H. (1985) *The Statistical Design of Quality Control Charts* The Statistician 34, 155 – 160
- [86] Woodroffe M. (1982) *Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis*. SIAM, Philadelphia.
- [87] Yeh A. B., Lin D. K. J., Zhou H. & Venkataramani Ch. (2003) *A multivariate exponentially weighted moving average control chart for monitoring process variability*, Journal of Applied Statistics, Vol. 30, No. 5, pp. 507 – 536
- [88] Zhou W. , Zhu G. (2006) *Economic design of integrated model of control chart and maintenance management*. Mathematical and computer modelling, pp. 1 – 7