

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STROJNÍ

DISERTAČNÍ PRÁCE

2016

Ing. Vojtěch Běták

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STROJNÍ
ÚSTAV TECHNICKÉ MATEMATIKY

DISERTAČNÍ PRÁCE

**Modelování turbulentního proudění v OpenFOAMu
s využitím AUSM⁺up schématu a EARSM modelu turbulence**

Ing. Vojtěch Běták

Doktorský studijní program: Strojní inženýrství

Studijní obor: Matematické a fyzikální inženýrství

Školitel: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.

CZECH TECHNICAL UNIVERSITY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
DEPARTMENT OF TECHNICAL MATHEMATICS

DISSERTATION THESIS

**Modeling of turbulent flow field in OpenFOAM
by using AUSM⁺ up scheme and EARSM model of turbulence**

Ing. Vojtěch Běťák

Doctoral Study Program Mechanical Engineering

Field of Study: Mathematical and Physical Engineering

Supervisor: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.

Poděkování

Chtěl bych na tomto místě poděkovat všem, kteří mě podpořili při vzniku této práce. Zejména bych chtěl poděkovat svému školiteli Doc. Ing. Jirřimu Fürstovi za odborné vedení práce a řadu cenných odborných rad.

Abstract

Key words: CFD, AUSM+up, EARSM, OpenFOAM, compressible flow,
wide interval of velocities

This work deals with numerical simulation of turbulent compressible flow in wide interval of velocities on OpenFOAM platform. The turbulent flow field is modeled by Favre averaged Navier-Stokes equations complemented by low-Re non-linear turbulent model with anisotropy term proposed by Hellsten. Numerical solution of given problem is based on finite volume space discretization. Convective numerical fluxes and pressure on cell interface is computed by AUSM+up scheme which is suitable for solution of fluid problems with wide range of velocities. This scheme is complemented by Runge-Kutta replacement of time derivation and implicit residual smoothing for extension of stability region. Based on this is prepared an extension of OpenFOAM. This extension is tested on transonic case with complex structure of shock waves, on turbine blade and test facilities of impeller internal recirculation channel. The anisotropy turbulence model is tested on different cases with standard OpenFOAM solvers. In these cases are expected strong influence on turbulence anisotropy. The test cases are connected with flow ventilation, flow in curved channel, simulation of propeller effect or simulation of reacting flow field in combustion chamber of small jet engines.

Anotace

Klíčová slova: CFD, AUSM⁺up, EARSM, OpenFOAM, proudění stlačitelné tekutiny, široký interval rychlostí

Práce se zabývá numerickými simulacemi turbulentního proudění stlačitelné tekutiny v širokém intervalu rychlostí na platformě OpenFOAM. Turbulentní proudové pole je modelováno podle Favreho středování Navier-Stokesových rovnic doplněných low-Re nelineárním modelem turbulence s anisotropním členem navrženým Hellstenem. Numerické řešení daného problému je založeno na metodě konečných objemů pro nahrazení prostorových derivací. Na rozhraní buněk je definován numerický konvektivní tok a tlak pomocí AUSM⁺up schématu, které je vhodné pro řešení problémů proudící tekutiny v širokém rozsahu rychlostí. Toto schéma je doplněno o Runge-Kuttovu náhradu časové derivace a implicitní vyhlazování residuí pro rozšíření oblasti stability, na jejichž základě je připraveno rozšíření platformy OpenFOAM. Toto rozšíření je testováno na nadzvukovém příkladu, kde je v proudovém poli přítomna komplexní struktura rázových vln, dále na příkladu komplexní geometrie turbínové lopatky a testovacího zařízení recirkulačního kanálu záběrníku odstředivého kompresoru. Model turbulence je aplikován se standardními řešiči OpenFOAMu na několika průmyslových aplikacích, ve kterých je předpokládán silný vliv turbulentní anisotropie. Jedná se o problémy ventilace, proudění v zakřivených kanálech, simulaci vlivu vrtule nebo reaktivní proudění ve spalovacích komorách malých leteckých motorů.

Seznam tabulek

2.1	Modelové konstanty k-omega SST modelu turbulence	18
2.2	Modelové konstanty EARSM modelu turbulence I	20
2.3	Modelové konstanty EARSM modelu turbulence II	22
4.1	Nastavení okrajových podmínek	40
4.2	Srovnání maximálního stabilního časového kroku a časové náročnosti úlohy pro řešení časového intervalu délky 10 s	44
4.3	Nastavení okrajových podmínek	46
4.4	Srovnání maximálního stabilního časového kroku a časové náročnosti úlohy pro řešení časového intervalu délky 10 s	48
4.5	Nastavení okrajových podmínek	50
5.1	Srovnání vybraných veličin pro nereaktivní případ	73
5.2	Srovnání vybraných veličin pro reaktivní případ	74

Seznam ilustrací

3.1	Diskretizace oblasti	26
3.2	Závislost nárůstu stabilního časového kroku na volbě parametru vyhlazení	35
3.3	Implementace implicitního vyhlazování reziduí	36
4.1	Forward step - Okrajové podmínky	40
4.2	rhoCentralFoam - Machovo číslo	41
4.3	Struktura rázových vln - hustota [16]	41
4.4	AUSM+up + Euler - Machovo číslo	42
4.5	AUSM+up + Runge - Kutta - Machovo číslo	42
4.6	AUSM+up + Runge - Kutta + IRS - Machovo číslo	43
4.7	Srovnání průběhu tlaku na spodní stěně	43
4.8	Srovnání průběhu reziduí	44
4.9	SE-1050 geometrie	45
4.10	SE-1050 Kontury Machova čísla pro RK4	46
4.11	SE-1050 Kontury Machova čísla pro RK4 + IRS	47
4.12	SE-1050 Experimentální data[17]	47
4.13	SE-1050 Srovnání rozložení tlaku na stěně lopatky	48
4.14	Srovnání průběhu reziduí	49
4.15	SE 1050 - Výpočtová geometrie 3D lopatky	50
4.16	SE-1050 Rychlostní pole v polovině výšky lopatky	51
4.17	SE-1050 Pole velikosti anisotropie	51
4.18	Umístění traverzovací roviny	52
4.19	Srovnání ztrát po výšce lopatky	53
4.20	Experimentálního zařízení	54
4.21	Pole Machových čísel – celkový pohled	55
4.22	Pole Machových čísel – detail měřicího prostoru	55
4.23	Velikost tenzoru anizotropie – detail měřicího prostoru	56
4.24	Srovnání úhlu rozvíření (osa $x[^\circ]$) na vzdálenosti od stěny (osa y [mm])	56
5.1	Racková skříň - výpočtová geometrie	57
5.2	Proudové pole v rovině symetrie	58
5.3	Srovnání rychlostních profilů ve vzdálenosti 100 mm	59

5.4	Srovnání rychlostních profilů ve vzdálenosti 500 mm	59
5.5	Srovnání rychlostních profilů ve vzdálenosti 900 mm	60
5.6	Model výfuku leteckého motoru	61
5.7	Výfukové potrubí - proudové pole - k-omega SST	62
5.8	Výfukové potrubí - proudnice - k-omega SST	62
5.9	Výfukové potrubí - proudové pole - EARSM	62
5.10	Výfukové potrubí - proudnice - EARSM	63
5.11	Actuator disk	64
5.12	Rozložení tahu a krutu pro leteckou vrtuli [19]	65
5.13	Rozložení rychlosti ve volném proudu	65
5.14	Rychlostní pole pro k-omega SST model turbulence	66
5.15	Rychlostní pole pro EARSM model turbulence	66
5.16	Counter flow flame	68
5.17	Counter flow flame – Teplotní profily pro rozdílné modely turbulence	69
5.18	Sandia test case – Experimental setup	70
5.19	Kontury velikosti rychlosti vlevo k-epsilon, vpravo EARSM	70
5.20	Sandia test case – Teplotní profil $x/d = 5$	71
5.21	Sandia test case – Profil koncentrací oxidu uhelnatého $x/d = 5$	71
5.22	Komora JETIS - Teplotní pole pro nereaktivní proudění	72
5.23	Komora JETIS - L2 norma tenzoru anizotropie	73
5.24	Komora JETIS - Teplotní pole pro k-omega SST	74
5.25	Komora JETIS - Teplotní pole pro EARSM	75

Použité zkratky a symboly

Symbol	Popis	Jednotka
u_i	Komponenta vektoru rychlosti	$[m\ s^{-1}]$
p	Statický tlak	$[kg\ m^{-1}\ s^{-1}]$
T	Termodynamická teplota	$[K]$
ρ	Hustota	$[kg\ m^{-3}]$
Y_i	Hmotnostní podíl složky i	
$e = c_v T$	Vnitřní energie	$[m^2\ s^{-2}]$
$E = c_v T + \frac{1}{2} u_i u_i$	Celková energie	$[m^2\ s^{-2}]$
$H = E + \frac{p}{\rho}$	Celková entalpie	$[m^2\ s^{-2}]$
c_v	Měrná tepelná kapacita při konstantním objemu	$[m^2\ s^{-2}\ K^{-1}]$
c_p	Měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku	$[m^2\ s^{-2}\ K^{-1}]$
κ	Adiabatický součinitel	
r	Plynová konstanta	$[m^2\ s^{-2}\ kg^{-1}\ K^{-1}]$
t	Čas	$[s]$
x_i	Komponenta polohového vektoru	$[m]$
g_i	Komponenta gravitačního vektoru	$[m\ s^{-2}]$
Q/S_i	Zdrojový člen / Zdrojový člen složky i	
σ_{ij}	Složka ij tenzoru povrchových napětí	$[kg\ m\ s^{-2}]$
τ_{ij}	Složka ij tenzoru vazkých napětí	$[kg\ m\ s^{-2}]$
δ_{ij}	Kroneckerovo delta	
S_{ij}	Složka ij tenzoru rychlosti deformace	$[s^{-1}]$
Ω_{ij}	Složka ij tenzoru rychlosti vířivosti	$[s^{-1}]$
μ	Dynamická viskozita	$[kg\ m^{-1}\ s^{-1}]$
λ	Koefficient druhé vazkosti	$[kg\ m^{-1}\ s^{-1}]$
Pr	Prandtlovo číslo	
\bar{u}	Střední hodnota veličiny u	

\tilde{u}	Hmotnostně podmíněná střední hodnota veličiny u	
u' , u''	Flukтуаční část veličiny u	
μ_t	Turbulentní viskozita	$[kg\ m^{-1}\ s^{-1}]$
Pr_t	Turbulentní Prandtlovo číslo	
u_t	Rychlostní měřítko	$[m\ s^{-1}]$
L_t	Délkové měřítko	$[m]$
k	Kinetická energie turbulence	$[m^2\ s^{-2}]$
ϵ	Rychlost disipace	$[m^2\ s^{-3}]$
ω	Specifická rychlost disipace	$[s^{-1}]$
$P_{k/\epsilon/\omega}$	Produkční člen $k/\epsilon/\omega$	
$D_{k/\epsilon/\omega}$	Disipační člen $k/\epsilon/\omega$	
$\Omega_{ij}^{(r)}$	Přídavný člen tenzoru vířivosti	$[s^{-1}]$
$a_{ij}^{(ex)}$	Anizotropní část turbulentní vazkosti	
Ω	Výpočetní oblast ve 2D/3D	
Ω_i	Výpočetní buňka	
$ \Omega_i $	Obsah / Objem výpočetní buňky	$[m^2/m^3]$
n_{ij}	Normála stěny mezi výpočetními buňkami ij	
ΔS_{ij}	Plocha stěny mezi výpočetními buňkami ij	$[m/m^2]$
M	Machovo číslo	
a	Rychlost zvuku	$[m\ s^{-1}]$
a^*	Kritická rychlost zvuku	$[m\ s^{-1}]$
h	Prostorový krok	$[m]$
Δt	Časový krok	$[s]$
CFL	Courantovo-Friedrichsovo-Lévyho číslo	
$R(W^n)$	Reziduum v časovém kroku n	
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes equation	
LES	Large eddies simulations / Simulace velkých vířů	
DNS	Direct Numerical Simulation	

FAVRE	Favre averaging / Favreho středovní
SST	Shear Stress Transport / Transport smykových napětí
EARSM	Explicitní algebraický model Reynoldsových napětí
AUSM	Advection Upstream Splitting Method
IRS	Implicitní vyhlazování reziduí
IRC	Vnitřní recirkulační kanál záběrníku odstředivého kompresoru
VZLÚ	Výzkumný a Zkušební Letecký Ústav
HPC	High Performance Computing

Obsah

1	Úvod.....	1
1.1	Současný stav.....	2
1.2	Cíle práce.....	5
2	Matematický model turbulentního proudění.....	7
2.1	Popis proudící tekutiny.....	7
2.2	RANS model turbulence.....	11
2.3	Dvourovnicové modely turbulence.....	15
2.4	Anizotropní EARSM model.....	18
3	Numerické schéma pro řešení turbulentního proudění.....	25
3.1	Metoda konečných objemů.....	25
3.2	AUSM ⁺ up.....	28
3.3	Náhrada časové derivace.....	31
3.3.1	Explicitní schéma.....	31
3.3.2	Schéma typu Runge-Kutta.....	32
3.3.3	Implicitní vyhlazování reziduí.....	33
3.3.4	Lokální časový krok.....	37
4	Řešené případy.....	39
4.1	Forward step.....	39
4.2	Turbínová lopatka SE 1050.....	45
4.3	Zkušební zařízení IRC.....	54
5	Aplikace EARSM modelu na další případy.....	57
5.1	Simulace proudového pole za rackovou skříní.....	57
5.2	Proudění v zakřiveném kanálu.....	61
5.3	Proudění se zdrojovým členem.....	64
5.4	Reaktivní proudění.....	67
5.4.1	Counter flow flame.....	68
5.4.2	Sandia Jet Flames.....	70
5.4.3	Komora JETIS.....	72
6	Závěr.....	77
	Literatura.....	79

1 Úvod

Masivní rozvoj výpočetní techniky v posledních desetiletích rozšířil pole využití matematického modelování v technických disciplínách – od původních semiempirických modelů až po současně používané komplexní fyzikální modely umožňující simulovat obtékání složitých geometrických tvarů nebo řešit úlohy spojené s deformací pevných těles. Tím nám umožňuje lépe dosáhnout ekologických a bezpečnostních požadavků kladených na nové produkty a zároveň urychlit a zlevnit proces jejich vývoje. To vyžaduje lepší matematické a fyzikální modely, které umožní efektivně řešit kladené požadavky.

Řada úloh v rámci matematického modelování proudění je uvažována v úzkém rozsahu rychlostí. Při řešení problematiky jako je např. větrání nebo studie klimakomfortu se setkáváme s typickými rychlostmi proudění v řádech metrů za sekundu. Při popisu aerodynamiky vozidel nebo sportovních letadel jsou charakteristické rychlosti v řádech desítek metrů za sekundu. Pro popis podzvukových dopravních letadel nebo např. pro řešení podzvukového proudění ve stupni turbíny jsou charakteristické rychlosti v řádu 100-300 metrů za sekundu. Řešení nadzvukového proudění (> 330 m/s) je spojeno s řešením problémů například v nadzvukových turbínových stupních. Existuje ale řada aplikací, ve kterých je nutné řešit proudění v širokém rozsahu rychlostí. Jedná se například o proudění v radiálním kompresoru leteckých motorů nebo interakci turbínových stupňů.

Turbulence se využívá v řadě technických aplikací. Lze jí například zefektivnit přenos tepla nebo míšení směsí. Zároveň je důležitá pro popis odtrženého proudění. Z toho důvodu je nutná správná volba přístupu jak turbulenci modelovat, aby bylo možné zachytit co nejvíce informací o studovaném jevu a vlivu turbulence na něj. Turbulenci lze modelovat přímo s využitím DNS modelu, který je ale značně výpočetně náročný a není ji možné v současné době řešit. V technické praxi jsou proto voleny modely turbulence s nižšími výpočetními nároky. Nejčastěji se jedná o modely založené na RANS formulaci, které umožňují zachytit základní parametry turbulentního proudění. Pokud je potřeba zachytit více detailů (např. odtržení,

směšování více proudů) jsou voleny modely na základě formulace LES.

1.1 Současný stav

V současné době máme tři možnosti pro numerické simulace turbulentního proudění. První z nich je využití komerčních produktů jako je např. Fluent nebo StarCCM. Tyto produkty obvykle obsahují velmi dobře odzkoušené fyzikální a numerické modely, mají propracované uživatelské rozhraní, obsahují řadu podpůrných nástrojů a jsou dobře zdokumentované. To je důvod, proč jsou často využívány v technické praxi, ale mají omezené možnosti implementace nových modelů vhodných pro řešení specifických úloh.

Pro jejich řešení, implementaci nových modelů nebo ověření jejich vlastností, se často využívají většinou jednoúčelové řešiče, které jsou velmi často vytvářeny a používány úzkou skupinou lidí a umožňují implementovat pokročilé modely nebo optimalizovat efektivitu řešiče, ale širšímu použití často brání chybějící dokumentace a specifický systém zadávání podmínek pro simulaci.

Alternativou může být využití softwarových balíků založených na open-source licenci jako např. OpenFOAM nebo CodeSaturne, které umožňují sdílet zdrojový kód se širokou skupinou vývojářů a uživatelů. Obsahují širokou škálu modelů, mají v rámci platformy unifikované zadávání a zároveň umožňují poměrně široké modifikace zdrojového kódu a implementace nových modelů a schémat. Tato vlastnost umožňuje poměrně rychlý přesun nově vyvinutých rozšíření od vývojářů k uživatelům.

Pro účely této práce byla vybrána platforma OpenFOAM, která byla uvolněna pod open-source licencí v roce 2004 a má v současné době širokou komunitu uživatelů. Řešiče ve standardní instalaci jsou převážně založeny na „pressure-based“ schématech, jako jsou algoritmy PISO [25] a SIMPLE [26], které byly odvozeny pro řešení proudění nestlačitelné tekutiny a později byly rozšířeny pro řešení problémů proudění stlačitelné tekutiny. Výše jmenované „pressure-based“ algoritmy jsou postaveny na principu prediktor-korektor. V kroku prediktoru dojde k segregaci řešení jednotlivých proměnných a odhadu řešení pro komponenty vektoru rychlosti a energie. V korekčním kroku jsou pak na základě řešení rovnice pro tlak tyto odhady

korigovány.

Marcatonio v publikaci [36] srovnal řešiče implementované v OpenFOAMu pro řešení proudění stlačitelné tekutiny v oblasti transoniky. Srovnávanými řešiči byl „pressure-based“ řešič sonicFoam, využívající PISO algoritmu, a „density-based“ řešič rhoCentralFoam. V práci je uvedeno, že pro dosažení srovnatelných výsledků je potřeba použít pro výpočet pomocí sonicFoamu síť, která potřebuje více než trojnásobný počet buněk. Zároveň zjistil, že na stejné síti má sonicFoam vyšší časovou náročnost a výsledky nemusí odpovídat skutečnosti. Zároveň při studiu přestupu tepla do turbínové lopatky bylo zjištěno [37], že ve standardních řešičích je zanedbán člen popisující generování tepla skrz vazkost. Proto řada autorů rozšiřuje OpenFOAM o vlastní řešiče proudění stlačitelné tekutiny [38,39,40].

Řada těchto rozšíření je založena na „density-based“ přístupu, kdy jsou v jednom kroku řešeny rovnice pro hustotu, hybnost a měrné energie. Tyto algoritmy jsou oblíbené pro svou robustnost. U všech metod je vyjádření numerického toku skrz hranici buňky komplexnější než při použití nejjednodušší metody lineární interpolace. Jedná se například o metody založené na řešení Riemannova problému jako je Roeho schéma [53] nebo schéma typu HLL/HLLC [54]. Další možností je využít schémat typu AUSM [55], kde autoři rozdělili numerický tok na konvektivní a tlakovou část. Schéma bylo dále vylepšováno [56,27] a aplikováno na řadu problémů včetně řešení vícefázového proudění [57]. Mezi výhody tohoto schématu patří např. přesné zachycení rázové vlny a kontaktních diskontinuit nebo zachování positivity řešení.

Nevýhodou výše uvedených metod je, že při použití základní varianty schématu je omezena velikost časového kroku. To se projevuje zejména při řešení vazkého turbulentního proudění, protože časový krok je závislý na hodnotě Reynoldsova čísla a objemu výpočetní buňky. Je možné využít implicitní metodu, která je nepodmíněně stabilní. Její nevýhodou může být vyšší paměťová a časová náročnost při výpočtu jakobiánu. Zároveň je tuto metodu na některých platformách obtížnější implementovat. Dalším přístupem je využití implicitního vyhlazování reziduí [12]. Jeho hlavní výhodou je zejména nízká paměťová náročnost, minimální modifikace explicitního schématu a snadná kombinace s dalšími akceleračními metodami (např. Runge-Kutta, ...). Velikost časového kroku je závislá na parametru vyhlazení

a v krajním případě může vést až k nepodmíněně stabilnímu schématu.

OpenFOAM zároveň obsahuje soubor základních modelů turbulence, jako jsou například dvourovnicové RANS modely $k-\epsilon$ nebo $k-\omega$ SST, Tyto metody vycházejí z Boussinesqova předpokladu o izotropní turbulenci. Na řadě případů lze ukázat, že tento předpoklad není platný v oblastech s rozsáhlým odtržením proudu. Nejjednodušším případem je asymetrický difuzor, kde bylo ukázáno [41,42,43], že běžně užívané modely nedokáží přesně určit bod odtržení a správně předpovědět proudové pole. Dalšími případy může být proudění v zakřivených a lopatkových kanálech [44], v hořácích [45] nebo v případě simulace křídla v přistávací konfiguraci [46]. V uvedených případech by bylo vhodné zvolit vhodnější model turbulence, který lépe zachytí komplexnost proudového pole. Jednou z možností je využít nestacionární turbulentní model typu large eddy simulation (LES). Tyto modely mají vysoké nároky na kvalitu výpočetní sítě, zejména v oblasti mezní vrstvy, a potřebný výpočetní čas, jak je uvedeno např. v [47,48]. Další možností je využít RANS modelů Reynoldsových napětí jako je například model Laundera, Reece a Rodiho [49]. Zvolený model rozšíří Navier-Stokesův model o dalších 7 rovnic a je citlivý na volbu diskretizačních schémat. Rodi ve své práci [50] použil předpoklad, že pro případ s pomalou změnou anisotropie, lze systém transportních rovnic redukovat do podoby algebraického vztahu, jehož výpočet může být v některých aplikacích náročný. Pope ve své práci [51] navrhl explicitní variantu tohoto vztahu pro případ 2D proudění. Tento vztah byl dále rozšířen a upraven pro 3D proudění, jak je prezentováno v pracích [52,3,4].

1.2 Cíle práce

Na základě rozboru současného stavu byly stanoveny následující cíle disertační práce. **Jedná se konkrétně o vývoj vhodných numerických metod a modelů turbulence pro řešení problémů proudění stlačitelné tekutiny v širokém rozsahu Machových čísel s výrazným vlivem anisotropie turbulence.** K dosažení těchto cílů je nutné splnit následující dílčí body:

- rozšířit platformu OpenFOAM o schéma numerického toku AUSM⁺up [27], které umožňuje řešit problémy proudění stlačitelné tekutiny. Toto rozšíření následně otestovat na vybraných případech;
- navrhnout a otestovat vhodné rozšíření explicitní varianty AUSM⁺up schématu s cílem zvýšení jeho stability a zvětšení stabilního časového kroku;
- implementace nelineárního anisotropního EARSM [3] modelu turbulence do prostředí OpenFOAMu a analýza jeho vlastností ve spojení s AUSM⁺up schématem a standardními řešiči.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole je uveden popis modelu proudící kapaliny, středovaných rovnic pro popis turbulentního proudění a popis základních dvourovnicových modelů turbulence včetně implementovaného EARSM modelu. Ve druhé kapitole je obsažen popis metody konečných objemů, AUSM⁺up schématu včetně dalších implementovaných rozšíření jako je Runge-Kuttovo schéma, implicitní vyhlazování reziduí a lokálního časového kroku. Třetí kapitola obsahuje popis případů řešených pomocí implementovaných schémat. Čtvrtá kapitola se zabývá aplikací EARSM modelu turbulence se standardními řešiči OpenFOAMu na případy, kde by nasazení anisotropního modelu vedlo ke zpřesnění dosažených výsledků.

2 Matematický model turbulentního proudění

V následující kapitole je naznačeno odvození Navier-Stokesových rovnic popisující proudění stlačitelné tekutiny a principy Reynoldsova a Favreho středování. Dále jsou v této kapitole popsány základní dvourovnicové modely turbulence a explicitní algebraický model turbulence (EARSM), který vychází z $k-\omega$ SST modelu turbulence, který je často využíván v průmyslových aplikacích.

2.1 Popis proudící tekutiny

Proudící tekutina musí splňovat základní fyzikální zákony o zachování hmoty, hybnosti a energie [28,29]. Ty je možné pro libovolnou měrnou veličinu $\phi(x_i, t)$ v konstantní uzavřené kontrolní oblasti Ω zapsat pomocí bilanční rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, t) dV, \quad (2.1)$$

kde člen $-\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} dS$ představuje přírůstek veličiny $\phi(\mathbf{x}, t)$ konvektivním tokem $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ skrz hranici kontrolní oblasti $\partial\Omega$. Produkci (destrukci) veličiny $\phi(\mathbf{x}, t)$ v kontrolním objemu pak představuje člen $\int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, t) d\Omega$. Za platnosti předpokladu o konstantním objemu kontrolní oblasti a dostatečné hladkosti funkcí $\phi, \boldsymbol{\varphi}$ lze rovnici (2.1) přepsat pomocí Gaussovy věty do následujícího tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_i(\mathbf{x}, t) = Q(\mathbf{x}, t). \quad (2.2)$$

- **Zákon zachování hmotnosti**

Je definován pomocí hustoty proudícího média ρ v následujícím tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.3)$$

kde $\phi = \rho$ a konvektivní tok je definován jako $\varphi = \rho u_i$. V uvažovaném modelu jednosložkového plynu jsou zdrojové členy Q zanedbány. Tyto členy je nutné vzít v potaz, pokud v daném systému dochází k fázovým změnám popisující např. odpařování, pyrolýzu nebo kondenzaci.

- **Zákon zachování hybnosti**

Vychází z Newtonova druhého pohybového zákona, kde je hybnosti definována jako vektor $\phi = \rho \mathbf{u}$ a její konvektivní tok $\varphi = \rho u_i \mathbf{u}$. Hybnost je pak ovlivněna tenzorem povrchových napětí σ_{ij} a vektorem objemových sil $\varphi = \rho \mathbf{g}$, kde \mathbf{g} je vektor zrychlení

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i. \quad (2.4)$$

Tenzor povrchových napětí σ_{ij} je složen z tenzoru normálových tlakových napětí $p \delta_{ij}$ a tenzoru tečných napětí τ_{ij}

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}. \quad (2.5)$$

Tenzor tečných napětí je pro Newtonské kapaliny lineární funkcí tenzoru rychlosti deformace $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$. Pro případ proudění stlačitelné tekutiny,

kde platí $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \neq 0$, je tenzoru tečných napětí definován jako

$$\tau_{ij} = 2 \left(\mu S_{ij} + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right). \text{ Pro Newtonskou kapalinu s koeficientem } \lambda = -\frac{1}{3} \text{ pak}$$

získáme zákon zachování hybnosti ve formě

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right]. \quad (2.6)$$

- **Zákon zachování energie**

Proudící tekutina musí splnit první termodynamický zákon. Pro vyjádření tohoto zákona je vhodné využít například celkovou energii proudící tekutiny definovanou jako

$$E = c_v T + \frac{1}{2} u_i u_i, \quad (2.7)$$

kde c_v je měrná tepelná kapacita tekutiny při konstantním objemu a T je teplota kapaliny. Celková energie na jednotku objemu je definována jako $\phi = \rho E$ a její konvektivní tok $\Phi = \rho E \mathbf{u}$. Zdrojový člen pak obsahuje tepelné zdroje generované objemovými silami $\rho(\mathbf{g}, \mathbf{u})$, povrchovým napětím $\sigma_{ji} u_j$, vektorem tepelného toku \mathbf{q} skrz hranici a objemovým tepelným tokem \dot{q} . Zákon zachování energie pak získáme ve formě

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E u_j)}{\partial x_j} = \rho g_i u_i + \frac{\partial \sigma_{ij} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \dot{q}. \quad (2.8)$$

Vektor tepelného toku vyjádříme pomocí Fourierova zákona

$$q_i = -\frac{c_p \mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (2.9)$$

kde je součinitel tepelné vodivosti definován jako $\lambda = c_p \frac{\mu}{Pr}$. Pr představuje Prandtlovo podobnostní číslo a teplotu lze z definice vnitřní energie zapsat jako $e = c_v T$.

Kombinací výše uvedených vztahů pro normálová napětí a tepelný tok upravíme rovnici (2.8) do následujícího tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho H u_j)}{\partial x_j} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{c_p \mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

kde je celková entalpie definována $H = E + \frac{p}{\rho}$.

- **Stavová rovnice**

System rovnic popisující zákon zachování hmoty (2.3), hybnosti (2.6) a energie (2.10) je vyjádřen pomocí proměnných $\rho, \rho u_i, \rho E$. Zároveň je v nich použit tlak p a teplota T . Pro určení hodnot těchto proměnných je nutné využít stavovou rovnici ideálního jednosložkového plynu

$$\frac{p}{\rho T} = r, \quad (2.11)$$

kde r je plynová konstanta charakterizovaná proudícím médiem.

S využitím Mayerova vztahu

$$cp - cv = r \quad (2.12)$$

a poměru tepelných kapacita

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}. \quad (2.13)$$

Z definice celkové energie (2.7) lze rovnici (2.11) přepsat do následujícího tvaru

$$p = (\kappa - 1) \left(\rho E - \frac{1}{2} \rho u_i \rho u_i \right). \quad (2.14)$$

Teplotu T lze z definice celkové energie zapsat jako

$$T = \frac{1}{c_v} \frac{\rho E - \frac{1}{2} \rho u_i \rho u_i}{\rho}. \quad (2.15)$$

2.2 RANS model turbulence

Systém rovnic (2.3, 2.6, 2.10 a 2.15) je uzavřený a předpokládáme, že platí ve všech režimech proudění. V laminárním režimu lze numericky řešit tyto rovnice přímo. Se zvyšováním Reynoldsova čísla a přechodem do turbulentního proudění se toto řešení stává výpočetně náročnější, protože je potřeba volit prostorový a časový krok tak, aby respektoval Kolmogorovo turbulentní měřítko [1]. Pro přímou simulaci turbulentního proudění je potřeba vytvořit síť s $Re^{9/4}$ uzlových bodů [1]. To vede k omezení řešených problémů na Re v řádu 10^5 . Proto je nutné pro popis turbulentního proudění zvolit vhodnou aproximaci výše uvedených rovnic.

Jednou z možností je využití přístupu navrženého Reynoldsem. Ten spočívá v rozdělení veličiny na její střední hodnotu a flukтуаční složku

$$u = \bar{u} + u'. \quad (2.16)$$

Kde střední hodnota v čase je definována jako

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} u dt. \quad (2.17)$$

Střední hodnota flukтуаční složky je pak rovna 0.

Na základě předchozích vztahů lze stanovit následující vlastnosti středování

$$\overline{u+v} = \bar{u} + \bar{v}, \quad (2.18)$$

$$\overline{u'} = 0, \quad (2.19)$$

$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}, \quad (2.20)$$

$$\overline{u'v} = 0. \quad (2.21)$$

Pro případ proudění stlačitelné tekutiny je pak vhodné využít Favreho hmotnostně podmíněné středování (např. [1,2]) veličiny $u = \tilde{u} + u''$ se střední hodnotou \tilde{u} a flukтуаční složkou u'' , kde

$$\tilde{u} = \frac{\bar{\rho}u}{\bar{\rho}}, \quad (2.22)$$

pro které platí

$$\overline{uv''} = \overline{(\bar{u} + u')v''} = 0. \quad (2.23)$$

Důvodem pro zavedení hmotnostně podmíněného středování je odstranění fluktuací hustoty, které vede ke zjednodušení řešených rovnic, jak je ukázáno na příkladu rovnice kontinuity, která je středována konvenčním způsobem.

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')(u_j + u_j')}{\partial x_j} = 0 \quad (2.24)$$

Aplikací výše zmíněných pravidel dostáváme

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho' u_j'}}{\partial x_j} = 0, \quad (2.25)$$

kde je člen $\frac{\partial \overline{\rho' u_j'}}{\partial x_j} \neq 0$. Pokud je provedeno hmotnostně podmíněné středování

$$\frac{\partial (\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} + \rho') (\tilde{u}_j + u_j'')}{\partial x_j} = 0 \quad (2.26)$$

S využitím vlastností středování lze rovnici kontinuity 2.26 upravit do následující podoby

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2.27)$$

V případě hmotnostně podmíněného středování rovnice zachování hybnosti získáme následující vztah

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) - \overline{\rho u''_i u''_j} \right], \quad (2.28)$$

kde člen $-\overline{\rho u''_i u''_j}$ představuje složky tenzoru Reynoldsových napětí.

V upravené středované energetické rovnici se pak vyskytuje člen $c_p \overline{\rho u''_j T''}$, který představuje turbulentní tepelný tok.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{H} \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{c_p \mu}{Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \tilde{u}_i \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) - c_p \overline{\rho u''_j T''} \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Pravá strana rovnice (2.29) obsahuje ještě tři členy

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{(\rho u''_i u''_j)} \tilde{u}_i, \quad (2.30)$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial x_j} u''_i \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \text{ a} \quad (2.31)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{(\rho u''_i u''_i u''_j)}. \quad (2.32)$$

Po středování Navier-Stokesových rovnic zůstává pět členů, které musí být dále modelovány. Odvození a středování transportních rovnic pro tyto členy nevede k uzavření systému rovnic jak je ukázáno např. v [1]. Je nutné zvolit jiný způsob uzavření rovnic. V řadě současných modelů se využívá Boussinesquova aproximace

$$-\overline{\rho u''_i u''_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad (2.33)$$

kde μ_t je turbulentní viskozita a k představuje kinetickou energii turbulence

definovanou jako $k = \frac{1}{3} u''_i u''_i$.

U členu energetické rovnice $c_p \overline{\rho u''_j T''}$ je využito analogie s Boussinesquovou hypotézou a člen je modelován jako turbulentní tepelná vodivost

$$-c_p \overline{\rho u''_j T''} = \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}, \quad (2.34)$$

kde Pr_t je Prandtlovo turbulentní číslo, jehož hodnota je přibližně 0,91. Pro aproximaci členu (2.30) využijeme Boussinesquovu hypotézu a členy (2.31-2.32) nahradíme následovně

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i'' \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right)} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho u_i'' u_i'' u_j''} \right) = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Členy (2.30 - 2.32) můžou být pro řadu případů zanedbány [2].

2.3 Dvourovnicové modely turbulence

Byla odvozena řada modelů turbulentní viskozity. Řada z nich je uvedena například v [1,2]. Jedná se algebraické vztahy (např. Baldwin a Lomax), jednorovnicové modely (např. Saplart-Allmaras), dvou a vícerovnicové modely. V případě dvourovnicových modelů je často využito definice turbulentní viskozity, která je funkcí rychlostního u_t a délkového L_t měřítka

$$\mu_t = C_\mu \rho f(L_t, u_t). \quad (2.36)$$

Pro definici rychlostního měřítka lze využít kinetickou energii turbulence $u_t = \sqrt{k}$. Délkové měřítko pak lze vyjádřit pomocí rychlosti disipace nejmenších vírů ϵ

$$L_t = \frac{k^{1.5}}{\epsilon}. \quad (2.37)$$

Turbulentní vazkost je pak dána vztahem

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (2.38)$$

Dvourovnicový modelem turbulence $k-\epsilon$ [1] lze zapsat pomocí soustavy dvou transportních rovnic pro k a ϵ ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial \bar{\rho}k \tilde{u}_j}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + D_k, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\epsilon) + \frac{\partial \bar{\rho}\epsilon \tilde{u}_j}{\partial x_j} = P_\epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + D_\epsilon. \quad (2.40)$$

P_i definuje produkci a D_i disipaci složky i . Produkce a disipace turbulentní kinetické energie je definována jako

$$P_k = -\overline{\rho u''_i u''_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \quad \text{a} \quad D_k = -\bar{\rho}\epsilon. \quad (2.41)$$

Produkční a disipační členy v transportní rovnici rovnici pro rychlost disipace definujeme analogicky ke členům v rovnici pro kinetickou energii

$$P_\epsilon = \frac{\epsilon}{k} C_{\epsilon 1} P_k \quad \text{a} \quad D_\epsilon = \frac{\epsilon}{k} C_{\epsilon 2} D_k. \quad (2.42)$$

Model obsahuje pět empirických konstant, které musí být v souladu s experimenty.

Další možností jak vyjádřit délkové měřítko je využití specifické rychlosti deformace ω , která je definována jako

$$\omega = \frac{\epsilon}{C_\mu k}. \quad (2.43)$$

Turbulentní viskozita je pak dána vztahem

$$\mu_t = \bar{\rho} \frac{k}{\omega}. \quad (2.44)$$

Transportní rovnice pro specifickou rychlost disipace je v $k-\omega$ modelu turbulence definována následovně

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial \bar{\rho}\omega \tilde{u}_j}{\partial x_j} = P_\omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + D_\omega. \quad (2.45)$$

Produkční a disipační členy jsou definovány následovně

$$D_k = -\beta^* \bar{\rho} k \omega, \quad P_\omega = \frac{k}{\omega} P_k \quad \text{a} \quad D_\omega = -\beta \bar{\rho} \omega^2. \quad (2.46)$$

V práci [5] navrhl Menter využití dvouvrstvého modelu. V oblasti mezní vrstvy je využíváno předností $k-\omega$ modelu turbulence a v oblasti volného proudu $k-\epsilon$ model, který lépe predikuje charakteristiky proudového pole než $k-\omega$ modelem. Na základě úvahy o transportu smykového napětí definoval Menter turbulentní viskozitu $k-\omega SST$ modelu jako

$$\mu_t = \bar{\rho} \min \left(\frac{k}{\omega}, \frac{a_1 k}{\Omega F_2} \right). \quad (2.47)$$

Rovnice (2.45) je doplněna o člen zahrnující příčnou difuzi a modifikovaný člen produkce

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial \bar{\rho}\omega \tilde{u}_j}{\partial x_j} = & \frac{\gamma}{\mu_t} \bar{\rho} P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) \\ & + D_\omega + 2\bar{\rho} \sigma_2 (1 - F_1) \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Modelové konstanty jsou lineární kombinací konstant $k-\omega$ a $k-\epsilon$ podle vzorce

$$\Phi = F_1 \Phi_1 + (1 - F_1) \Phi_2. \quad (2.49)$$

Modelové funkce F_1 a F_2 jsou definovány následovně

$$F_1 = \tanh(\Gamma_1^4) \quad \text{a} \quad F_2 = \tanh(\Gamma_2^2). \quad (2.50)$$

Argumenty funkcí jsou pak definovány následovně

$$\Gamma_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500 \mu}{\bar{\rho} \omega y^2} \right), \frac{4 \bar{\rho} \sigma_2 k}{CD_\omega y^2} \right] \quad \text{a} \quad (2.51)$$

$$\Gamma_2 = \max \left(\frac{2\sqrt{k}}{0,09 \omega y}, \frac{500 \mu}{\bar{\rho} \omega y^2} \right),$$

se vzdáleností od stěny y a CD_ω kladnou částí členu příčné difuze

$$CD_\omega = \max \left(2 \bar{\rho} \sigma_2 \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right). \quad (2.52)$$

Jednotlivé modelové konstanty $k-\omega$ SST jsou definovány jako

Tab. 2.1.: Modelové konstanty $k-\omega$ SST modelu turbulence

	σ_k	σ_ω	β	γ	a_1	σ_2	β^*
Φ_1	0,85	0,5	0,075	5/9			
Φ_2	1,00	0,865	0,0828	0,44			
					0,31	0,865	0,09

2.4 Anizotropní EARSM model

Boussinesquova hypotéza není univerzálně platná, což lze doložit například na 2D případě asymetrického difuzoru [7,8]. Modely turbulence, které jsou založeny na Boussinesquově předpokladu o izotropní turbulenci a lineární závislosti turbulentní viskozity na tenzoru rychlosti deformace, mají problém se zachycením odtržení proudu v difuzoru. V práci Hellstena [3] a Wallina [4] je tenzor Reynoldsových napětí definován jako

$$-\overline{\rho u''_i u''_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - a_{ij}^{(ex)} \rho k, \quad (2.53)$$

kde $a_{ij}^{(ex)}$ představuje anizotropní část tenzoru Reynoldsových napětí a turbulentní

viskozita μ_t je funkcí gradientu rychlosti $\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}$.

EARSM model turbulence publikovaný Hellstenem vychází z Mentrova $k-\omega$ SST modelu turbulence

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} k) + \frac{\partial k \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = P_k - \bar{\rho} \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \omega) + \frac{\partial \omega \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = & C_{\omega 1} \frac{\omega}{k} P_k - \bar{\rho} C_{\omega 2} \omega^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t \sigma_\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \\ & + \bar{\rho} \frac{\sigma_d}{\omega} \max \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 0 \right). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Koeficienty použité v modelu využívají modifikované rovnice (2.49), ve které je funkce F_1 nahrazena funkcí f_{mix} definovanou jako

$$f_{mix} = \min[\max(\Gamma_1, \Gamma_2), \Gamma_3]. \quad (2.56)$$

Parametry funkce jsou pak definovány jako

$$\Gamma_1 = \frac{\sqrt{k}}{\omega y}, \quad (2.57)$$

$$\Gamma_2 = 500 \beta^* \frac{\mu}{\bar{\rho} \omega y^2}, \quad (2.58)$$

$$\Gamma_3 = \frac{20k}{\max \left(\frac{y^2}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 200 k_\infty \right)}. \quad (2.59)$$

Modelové koeficienty vychází pak z následujících hodnot

Tab. 2.2.: Modelové konstanty EARSM modelu turbulence I

	σ_k	σ_ω	σ_d	C_{ω_1}	C_{ω_2}	κ	β^*
Φ_1	1,10	0,53	1,00	0,518	0,0747		
Φ_2	1,10	1,00	0,40	0,44	0,0828		
						0,42	0,09

Turbulentní viskozita a tenzor anizotropie jsou pak definovány jako

$$\mu_t = -\frac{1}{2} \rho (\beta_1 + II_\Omega) \beta_6 \quad \text{a} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(ex)} = & \beta_3 \left(\Omega_{ik} \Omega_{kj} - \frac{1}{3} II_\Omega \delta_{ij} \right) + \beta_4 (S_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} S_{kj}) \\ & + \beta_6 \left(S_{ik} \Omega_{kl} \Omega_{lj} + \Omega_{ik} \Omega_{kl} S_{lj} - II_\Omega S_{ij} - \frac{2}{3} IV \delta_{ij} \right) \\ & + \beta_9 (\Omega_{ik} S_{kl} \Omega_{lm} \Omega_{mj} + \Omega_{ik} \Omega_{kl} S_{lm} \Omega_{mj}). \end{aligned} \quad (2.61)$$

V případě Helstenova EARSM modelu se uvažují bezrozměrné tenzory rychlosti deformace a vířivosti

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{a} \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\tau}{A_0} \Omega_{ij}^{(r)}. \quad (2.62)$$

kde τ je časové měřítko a $\Omega_{ij}^{(r)}$ je přídatný člen tenzoru vířivosti, který zohledňuje efekt zakřivení proudnic

$$\tau = \max \left(\frac{1}{\beta^* \omega}, 6.0 \sqrt{\frac{\mu}{\bar{\rho} \beta^* k \omega}} \right), \quad (2.63)$$

$$\Omega_{ij}^{(r)} = -e_{ijk} \frac{II_S^2 \delta_{km} + 12 III_S S_{km} + 6 II_S S_{kl} S_{lm}}{2 II_S^3 - 12 III_S^2} S_{pr} \dot{S}_{rq} e_{pqm}, \quad (2.64)$$

$$\dot{S}_{ij} = -(S_{ik} \Omega_{kj}^{(r)} - \Omega_{ik}^{(r)} S_{kj}). \quad (2.65)$$

Pro výpočet členu \dot{S}_{ij} se využívá tenzor smykových napětí z aktuální časové vrstvy a přídatný tenzor vířivosti $\Omega_{ij}^{(r)}$ z předchozí časové vrstvy.

Koeficienty β_i jsou definovány následovně

$$\beta_1 = -\frac{N}{Q}(2N^2 - 7H_\Omega), \quad (2.66)$$

$$\beta_3 = -12\frac{IV}{NQ}, \quad (2.67)$$

$$\beta_4 = -\frac{2}{Q}(N^2 - 2H_\Omega), \quad (2.68)$$

$$\beta_6 = -6\frac{N}{Q}, \quad (2.69)$$

$$\beta_9 = \frac{6}{Q}. \quad (2.70)$$

Parametry Q a N jsou pak definovány následovně

$$Q = \frac{5}{6}(N^2 - 2H_\Omega)(2N^2 - H_\Omega) \quad \text{a} \quad (2.71)$$

$$N \approx N_c + \frac{162[IV^2 + (V - 0.5H_s H_\Omega)]}{N_c^4(N_c - 0.5A_3') - H_\Omega(10N_c^3 + 15A_3'N_c^2) + 10A_3'H_\Omega^2}. \quad (2.72)$$

N_c je funkcí parametrů P_1 a P_2

$$P_1 = A_3' \left(\frac{A_3'}{27} + \frac{9}{20}H_s - \frac{2}{3}H_\Omega \right), \quad (2.73)$$

$$P_2 = P_1^2 - \left(\frac{A_3'}{9} + \frac{9}{10}H_s + \frac{2}{3}H_\Omega \right)^3, \quad (2.74)$$

která je řešením kubické rovnice viz [4]

$$N_c = \begin{cases} \frac{A_3'}{3} + (P_1 + \sqrt{P_2})^{1/3} + \text{sign}(P_1 - \sqrt{P_2}) |P_1 + \sqrt{P_2}|^{1/3} & P_2 \geq 0 \\ \frac{A_3'}{3} + 2(P_1^2 + P_2)^{1/6} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 + P_2}}\right) & P_2 < 0 \end{cases}, \quad (2.75)$$

Parametr A_3' je nakonec definován jako

$$A_3' = 1,8 + 2,25 C_{Diff} \max\left(1 - \frac{6}{5} II_S \frac{N^{eq}}{(N^{eq})^2 - 2 II_\Omega}, 0\right) \quad (2.76)$$

s následujícími modelovými konstantami

Tab. 2.3.: Modelové konstanty EARSM modelu turbulence II

A_0	N^{eq}	C_{Diff}
0,72	4,05	2,22

Invarianty tenzorů použité v modelu jsou definovány následovně

$$II_S = S_{kl} S_{lk}, \quad (2.77)$$

$$II_\Omega = \Omega_{kl} \Omega_{lk}, \quad (2.78)$$

$$III_S = S_{kl} S_{lm} S_{mk}, \quad (2.79)$$

$$IV = S_{kl} \Omega_{lm} \Omega_{mk}, \quad (2.80)$$

$$V = S_{kl} S_{lm} \Omega_{mn} \Omega_{nk}. \quad (2.81)$$

Okrajová podmínka na stěně je předepsána pro $k_w = 0$ a pro ω je definována jako

$$\omega_w = \beta^* \bar{\rho} \frac{u_\tau^2}{u} S_R, \quad (2.82)$$

kde třecí rychlost u_τ a parametr drsnosti stěny S_R jsou definovány následovně

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} \quad (2.83)$$

$$S_R = \begin{cases} \left[\frac{50}{\max(k_S^+, k_{S-min}^+)} \right]^2 & k_S^+ < 25 \\ \frac{100}{k_S^+} & k_S^+ \geq 25 \end{cases} \quad (2.84)$$

s bezrozměrnými parametry

$$k_S^+ = k_S \bar{\rho} \frac{u_\tau}{\mu} \quad \text{a} \quad k_{S-min}^+ = \min \left[2,4 \left(y \bar{\rho} \frac{u_\tau}{\mu} \right), 8 \right]. \quad (2.85)$$

3 Numerické schéma pro řešení turbulentního proudění

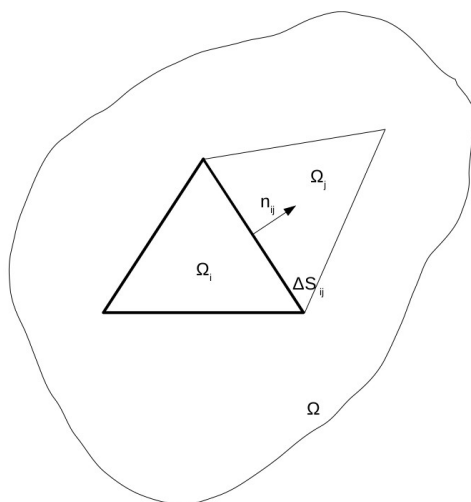
Ve třetí kapitole je popsána metoda konečných objemů, AUSM+up schéma pro určení numerického toku skrz hranici výpočetní buňky a metody pro náhradu časové derivace. Je zde popsáno explicitní Eulerovo, Runge-Kuttovo schéma a implicitní vyhlazování reziduí, u kterého je otestována stabilita schématu a srovnána se základní explicitní náhradou časové derivace.

3.1 Metoda konečných objemů

Zapišme rovnice (2.27,2.28,2.29,2.54 a 2.55) v následujícím formátu

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W}) + \mathbf{S}, \quad (3.1)$$

kde \mathbf{W} je vektor proměnných $(\bar{\rho}, \bar{\rho} \tilde{u}_i, \bar{\rho} \tilde{E}, \bar{\rho} k, \bar{\rho} \omega)$, vektor $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{W})$ popisuje konvektivní členy příslušných rovnic, $\nabla \mathbf{G}(\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W})$ členy popisující tečná napětí a \mathbf{S} zdrojové a disipační členy. Tento systém rovnic je nutné převést do diskrétní formy tak, aby nám umožnila řešit rovnici (3.1) na výpočetní oblasti $\Omega \subset R^3$, která je rozdělena na n navzájem disjunktních oblastí (buněk) Ω_i se společnými vrcholy a stěnami mezi sousedními buňkami.



Obr. 3.1: Diskretizace oblasti

Tuto transformaci lze provést pomocí metody konečných prvků [11] nebo objemů [10], pro jejíž odvození uvažujeme 2D rovnici advekce

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (3.2)$$

Tato rovnici je integrována na výpočetní buňce Ω_i

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial t} dV = - \int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} dV. \quad (3.3)$$

Na pravou stranu rovnice (3.3) je aplikována Gauss-Greenova věta

$$- \int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} dV = - \int_{\partial \Omega_i} u n dS. \quad (3.4)$$

Na výpočetní buňce lze pak rovnici (3.4) transformovat do tvaru

$$- \int_{\partial \Omega_i} u n dS = - \sum_{j=1}^n u_{ij} \mathbf{n}_{ij} \Delta S_{ij}, \quad (3.5)$$

kde na stěně mezi dvěma buňkami i a j je definován numerický tok veličiny u skrz příslušnou stěnu s normálou stěny \mathbf{n}_{ij} , plochou ΔS_{ij} a hodnotou veličiny na stěně u_{ij} .

Levou stranu rovnice (3.3) lze upravit pomocí věty o střední hodnotě do tvaru

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial t} dV = |\Omega_i| \frac{\partial u_i}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Následně kombinací rovnic (3.5) a (3.6) získáme finální diskrétní tvar rovnice (3.2).

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j=1}^n u_{ij} \mathbf{n}_{ij} \Delta S_{ij}. \quad (3.7)$$

Rovnici (3.1) lze pak pomocí metody konečných objemů transformovat do tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial t} = \frac{-1}{|\Omega_i|} \sum_j (\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{g}_{ij}) \cdot \mathbf{n}_{ij} \Delta S_{ij} + \mathbf{S}_i, \quad (3.8)$$

kde \mathbf{f}_{ij} představuje numerický tok aproximující konvektivní člen $\mathbf{F}(\mathbf{W})$ a \mathbf{g}_{ij} aproximující tečná napětí na rozhraní výpočetní buňky i a její sousední buňkou j .

Výpočet vazkých napětí použitý v OpenFOAMu je popsán v [32]. Pro určení konvektivních toků existuje řada přístupů. Jedním z možných přístupů je použití Advection Upstream Splitting Method (AUSM), které může být použito v širokém rozsahu rychlostí a mezi jeho výhody také patří například přesné zachycení rázových vln a diskontinuit nebo zachování positivity řešení. Detailní popis včetně odvození je uveden v [10].

3.2 AUSM⁺up

Soustavu rovnic (2.27,2.28,2.29,) lze upravit pro řešení proudění neviské stlačitelné tekutiny a zapsat ji v následujícím tvaru

$$W_t + \nabla \cdot F = 0 \quad (3.9)$$

Kde pro 1D $W = (\rho, \rho u, \rho E)^T$ je vektor konzervativních proměnných. Tento vektor lze následně rozšířit do 3D. Vektor F lze rozdělit na složku konvektivní $\phi \psi$ a složku tlakovou P

$$F = \phi \psi + P \quad (3.10)$$

$$\phi = \rho u, \quad \psi = (1, u, H)^T \text{ a } P = (0, p, 0)^T \quad (3.11)$$

Na základě metody konečných objemů můžeme definovat numerický tok hranic

$$f_{ij} = \phi_{ij} \psi_{ij} + P_{ij}, \quad (3.12)$$

kde

$$\psi_{ij} = \begin{cases} \psi_i & \text{pokud } \phi \geq 0 \\ \psi_j & \text{pokud } \phi < 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

je vektor $\psi = (1, u, H)^T$.

Hmotnostní tok skrz stěnu je pak definován v následující formě

$$\phi_{ij} = u_{ij} \rho_{ij} = a_{ij} M_{ij} \rho_{ij}, \quad \phi_{ij} = \begin{cases} \phi_i & \text{pokud } M_{ij} \geq 0 \\ \phi_j & \text{pokud } M_{ij} < 0 \end{cases}. \quad (3.14)$$

Kompletní postup odvození implementovaného schématu je možné nalézt v [27]. Pro účely této práce bude uveden pouze finální tvar schématu.

$$M_{ij} = \frac{u_{ij}}{a_{1/2}}. \quad (3.15)$$

Pro případ 2D/3D proudění je rychlost na rozhraní buněk definována jako skalární součin $u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$. Dále je zaveden parametr $f_a(M_o) \in \langle 0, 1 \rangle$, který může být definován dvěma zápisy

$$f_a(M_o) = M_o(2 - M_o), \quad (3.16)$$

$$f_a(M_o) = \sqrt{\frac{(1.0 - \text{sqr}(M_o))^2 (\bar{M})^2 + 4(M_o)^2}{1 + (M_o)^2}}. \quad (3.17)$$

Pomocná Machova čísla definujeme pak jako

$$M_o^2 = \min(1, \max(\bar{M}^2, M_\infty^2)) \quad (3.18)$$

a

$$\bar{M}^2 = \frac{1}{2}(M_L^2 + M_R^2). \quad (3.19)$$

Rychlost zvuku je definována jako

$$a_{ij} = \min(\hat{a}_L, \hat{a}_R), \quad \hat{a} = \frac{a^{*2}}{\max(a^*, \pm u)}, \quad (3.20)$$

kde kritická rychlost zvuku je definována jako

$$a^{*2} = 2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} H, \quad (3.21)$$

Machovo číslo a tlak na rozhraní výpočetních buněk jsou pak definovány

$$M_{ij} = M_{(4)}^+(M_i) + M_{(4)}^-(M_j) + 2 \frac{K_p}{f_a} \max(1 - \sigma \bar{M}^2, 0) \frac{p_j - p_i}{(\rho_i + \rho_j) + a_{ij}^2}, \quad (3.22)$$

$$p_{ij} = P_{(5)}^+(M_i) p_i + P_{(4)}^-(M_j) p_j - K_u P_{(5)}^+ P_{(5)}^-(\rho_i + \rho_j) f_a a_{ij} (u_j - u_i). \quad (3.23)$$

Kde jsou využity následující parametry a funkce

$$\alpha = \frac{3}{16} (-4 + 5f_a^2) \in \left\langle \frac{-3}{4}, \frac{3}{16} \right\rangle, \quad (3.24)$$

$$M_{(1)}^\pm(M) = \frac{1}{2} (M \pm |M|), \quad (3.25)$$

$$M_{(2)}^\pm(M) = \pm \frac{1}{4} (M \pm |M|)^2, \quad (3.26)$$

$$M_{(4)}^\pm(M) = \begin{cases} M_{(1)}^\pm & \text{pokud } |M| \geq 1, \\ M_{(2)}^\pm (1 \mp 16\beta M_{(2)}^\mp) & \end{cases}, \quad (3.27)$$

$$P_{(5)}^\pm(M) = \begin{cases} \frac{1}{M} M_{(1)}^\pm & \text{pokud } |M| \geq 1, \\ M_{(2)}^\pm [(\pm 2 - M) \mp 16\alpha M M_{(2)}^\mp] & \end{cases}. \quad (3.28)$$

V modelu byly použity následující konstanty $\beta = \frac{1}{8}$, $K_p = 0,25$, $K_u = 0,75$

a $\sigma = 1$.

3.3 Náhrada časové derivace

3.3.1 Explicitní schéma

Základním typem schématu pro náhradu časové derivace je explicitní schéma předepsané jako

$$\mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}^n - \Delta t R(\mathbf{W}^n). \quad (3.29)$$

Toto schéma je podmíněně stabilní, jak lze ukázat pomocí analýzy stability 1D rovnice konvekce

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.30)$$

kteřou lze přepsat do diskrétního tvaru za použití schématu typu upwind a metody konečných objemů na pravidelné čtvercové síti s hranou buňky o velikosti h a časovým krokem Δt

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{h} (u_i^n - u_{i-1}^n). \quad (3.31)$$

Pro analýzu stability je možné využít např. spektrální analýzu, kde je hodnota řešení v dané buňce nahrazena následujícím výrazem $u_i^n = \lambda^n e^{ij\omega}$. Pro explicitní časové schéma pak dostaneme

$$\lambda = 1 - a \frac{\Delta t}{h} (1 - e^{-j\omega}). \quad (3.32)$$

Aby bylo schéma popsané rovnicí (3.31) stabilní pak absolutní hodnota parametru λ musí být menší jak 1.

$$-1 \leq 1 - a \frac{\Delta t}{h} (1 - e^{-j\omega}) \leq 1. \quad (3.33)$$

Z rovnice (3.33) vyplývá, že pro $\omega = \pi$ je stabilní časový krok pro zvolené schéma

$$\Delta t \leq \frac{h}{a}. \quad (3.34)$$

3.3.2 Schéma typu Runge-Kutta

Schéma typu Runge-Kutta [15] je rozšířením předchozího schématu. Jedná se o n-stupňové schéma

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^j &= \mathbf{W}^n, \quad j=0 \\ \mathbf{W}^{j+1} &= \mathbf{W}^n - \alpha_j \Delta t R(\mathbf{W}^j) \\ \mathbf{W}^{n+1} &= \mathbf{W}^j, \quad j=m \end{aligned} \quad (3.35)$$

Toto schéma rozšiřuje oblast stability explicitního schématu v závislosti na stupni zvoleného schématu. V práci je použito Runge-Kuttovo schéma čtvrtého stupně s koeficienty 0,11, 0,2766, 0,5 a 1. Časový krok pro dané schéma bude dán předpisem

$$\Delta t \leq c_{rk} \frac{h}{a}. \quad (3.36)$$

Konstanta $c_{rk} > 1$ je funkcí koeficientů použité Runge-Kuttovy metody.

3.3.3 Implicitní vyhlazování reziduí

Řada autorů např. [12,13] využívá pro rozšíření oblasti stability explicitní metody implicitní vyhlazování reziduí, kdy místo náhrady časové derivace explicitním schématem (22) je použita následující náhrada

$$\mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}^n - \Delta t \tilde{\mathbf{R}}, \quad (3.37)$$

kde $\tilde{\mathbf{R}}$ je definováno jako

$$(1 - \epsilon \Delta) \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}, \quad (3.38)$$

s parametrem vyhlazení ϵ s okrajovou podmínkou

$$\frac{d\tilde{\mathbf{R}}}{dn} = 0. \quad (3.39)$$

Tuto soustavu rovnic lze snadno řešit pomocí Jacobiho iterační metody, kterou lze pro případ kartézské sítě s krokem h zapsat následovně

$$\tilde{R}_{ij}^{n+1} = \frac{R_{ij} + \frac{\epsilon}{h^2} (\tilde{R}_{i-1j}^n + \tilde{R}_{i+1j}^n + \tilde{R}_{ij-1}^n + \tilde{R}_{ij+1}^n)}{1 + 4 \frac{\epsilon}{h^2}} \quad (3.40)$$

Řešení rovnice 3.40 lze pak pro případ nestrukturované sítě přibližně zapsat jako

$$\tilde{R}_i^{n+1} = \frac{R_i + \epsilon \sum_{k=1}^m \tilde{R}_k^n}{1 + \epsilon m}. \quad (3.41)$$

kde k je index sousední buňky k buňce i . Hodnota \tilde{R}_i^0 je předepsána hodnotou rezidua R_i v příslušné buňce. Iterační proces je zastaven po dosažení

100 iterace nebo pokud je normovaný rozdíl iterací menší jak 0,01.

$$err = \frac{1}{\sum_{i=1}^n |\Omega_i|} \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{R}_i^{n+1} - \tilde{R}_i^n}{\tilde{R}_i^n} |\Omega_i| < 0,01, \quad (3.42)$$

Při použití schématu na nepravidelných sítích je výhodné nahradit (3.41) následujícím vztahem

$$\tilde{R}_i^{n+1} = \frac{\tilde{R}_i^n + \epsilon \sum_{k=1}^m \tilde{R}_k^n \frac{\Psi_k}{\sum_{k=1}^m \Psi_k}}{1 + \epsilon m}, \quad (3.43)$$

kde funkce je Ψ_k definována následovně pomocí plochy rozhraní S_{ij} mezi dvěma buňkami a vzdáleností jejich středů $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$

$$\Psi_k = \frac{S_{ij}^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \quad (3.44)$$

Na rovnici (3.30) provedeme vyšetření její stability. Při využití upwind schématu a implicitního vyhlazování reziduí (3.37,3.41) získáme rovnici v následujícím tvaru

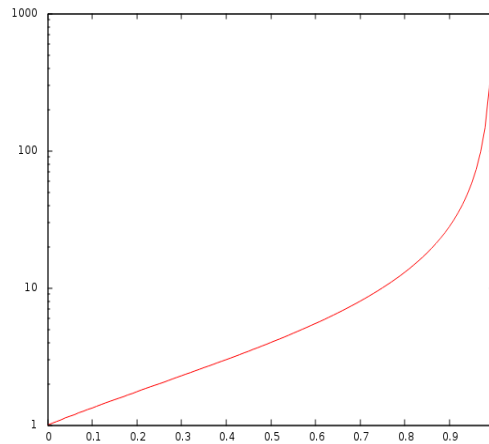
$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{h} \cdot \frac{1}{1+2\epsilon} \left[u_i^n - u_{i-1}^n + \epsilon (u_{i-1}^n - u_{i-2}^n + u_{i+1}^n - u_i^n) \right]. \quad (3.45)$$

Aplikováním spektrální analýzy stability získáme

$$\lambda = 1 - a \frac{\Delta t}{h} \cdot \frac{1}{1+2\epsilon} \left[1 - e^{-j\omega} + \epsilon (e^{-j\omega} - e^{-2j\omega} + e^{j\omega} - 1) \right], \quad (3.46)$$

který lze upravit na tvar

$$\lambda = 1 - a \frac{\Delta t}{h} \cdot \frac{1}{1+2\epsilon} \left[(1-\epsilon)(1-e^{-j\omega}) + \epsilon(e^{j\omega} - e^{-2j\omega}) \right]. \quad (3.47)$$



Obr. 3.2: Závislost nárůstu stabilního časového kroku na volbě parametru vyhlazení

Pro $\omega = \pi$ lze rovnici 3.47 zjednodušit do tvaru

$$\lambda = 1 - 2a \frac{\Delta t}{h} \cdot \frac{1-\epsilon}{1+2\epsilon}. \quad (3.48)$$

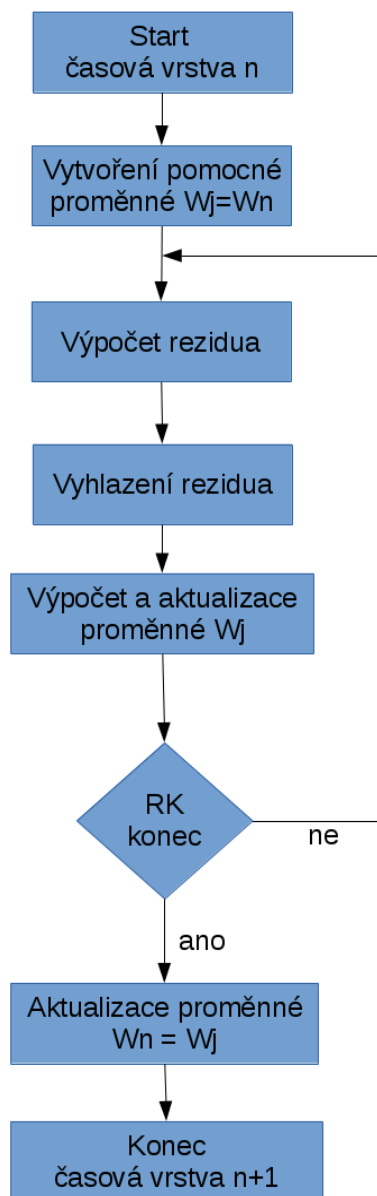
Při podmínce $|\lambda| \leq 1$ pak dostáváme hodnotu časového kroku jako

$$\Delta t \leq \frac{h}{a} \frac{1+2\epsilon}{1-\epsilon}. \quad (3.49)$$

V literatuře např. [13] je pro výpočty doporučena hodnota parametru vyhlazení

$$\epsilon = 0,8. \text{ Pro tuto hodnotu pak získáváme stabilní časový krok } \Delta t \leq 13 \cdot \frac{h}{a}.$$

Implementace implicitního vyhlazování podle následujícího diagramu.



Obr. 3.3: Implementace implicitního vyhlazování reziduí

3.3.4 Lokální časový krok

Pro urychlení konvergence k stacionárnímu stavu je možné využít řešení s lokálním časovým krokem, kdy pro každou z buněk výpočtové domény je spočítán její vlastní časový krok

$$\Delta t_i = \frac{CFL \cdot |\Omega_i|}{\left[(U + aI)s + C \cdot u_{eff} \frac{|s|^2}{\rho |\Omega_i|} \right]} \quad (3.50)$$

Vektor s je definována pro buňku p následovně jako součet hodnot na hranici buňky podle vzorce

$$s = 0,5 \sum_q S_{pq} \left[|(\mathbf{n}_{pq} \cdot \mathbf{i})| \mathbf{i} + |(\mathbf{n}_{pq} \cdot \mathbf{j})| \mathbf{j} + |(\mathbf{n}_{pq} \cdot \mathbf{k})| \mathbf{k} \right] \quad (3.51)$$

kde q je index sousední buňky a $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jsou bázové vektory kartézského souřadného systému.

4 Řešené případy

V následující kapitole je AUSM⁺up schéma, implicitní vyhlazování reziduí a EARSM model turbulence aplikované na vybrané případy.

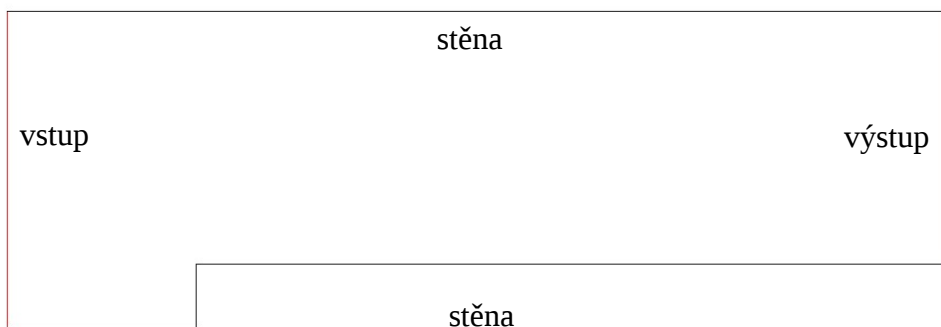
Prvním případem je 2D transonické proudění nevazké stlačitelné tekutiny v kanále s náhlým zúžením. Tento případ byl vybrán pro svou komplexnost, protože v proudovém poli je přítomných několik druhů rázových vln. Cílem je prokázat, že dojde k jejich zachycení pomocí implementovaného schématu.

Druhým případem je obtékání turbínové lopatky SE-1050. 2D případ proudění nevazké stlačitelné tekutiny slouží k prokázání aplikovatelnosti implementovaného schématu na komplexnější geometrii. Na 3D geometrii je řešeno vazké turbulentní proudění a výsledky jsou srovnány s experimentem.

Třetím případem je aplikace výše popsaných schémat a modelů na případ proudění v experimentálním zařízení pro studium vlivu vnitřního obtokového kanálu záběrníku odstředivého kompresoru.

4.1 Forward step

V případu je řešeno transonické proudění nevazké stlačitelné tekutiny v kanále s náhlým zúžením (viz obr. 4.1). Tato geometrie je popsána např. v [16] Na vstupu do oblasti je předepsáno rychlost proudění Machovým číslem 3. Dále je uvažován ideální model plynu s poměrem tepelných kapacit 1,4. 2D strukturovaná síť je tvořena 16 000 výpočetních buněk.



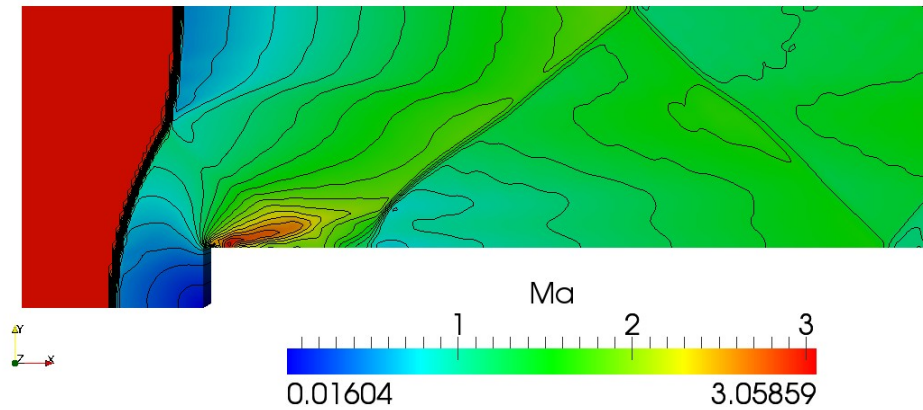
Obr. 4.1: Forward step - Okrajové podmínky

Pro jednotlivé hranice byly předepsány následující okrajové podmínky

Tab. 4.1: Nastavení okrajových podmínek

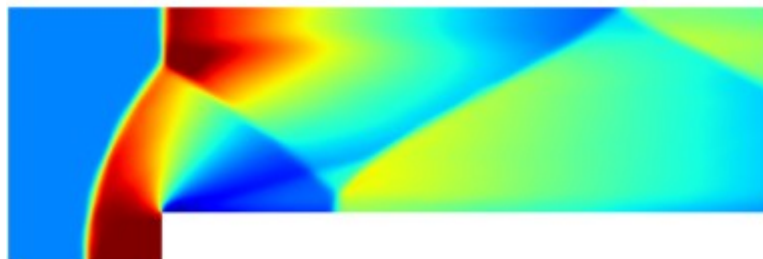
Hranice	Okrajová podmínka
vstup	$p=1 Pa$ $T=1 K$ $Ma=3$ $\alpha=0^\circ$ $\kappa=1,4$
výstup	
stěna	$\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$

Cílem výpočtu je srovnat výsledky získané implementací AUSM+up schématu s IRS se standardním řešičem z balíku OpenFOAM. Tímto řešičem je rhoCentralFoam, který je založen na centrálním schématu Kurganova a Tadmora [30]. Získané rozložení pole Machových čísel je pak zobrazeno na obr. 4.2. Časová integrace je provedena pomocí dopředného Eulerova schématu a prostorová pomocí vanLeerova schématu.



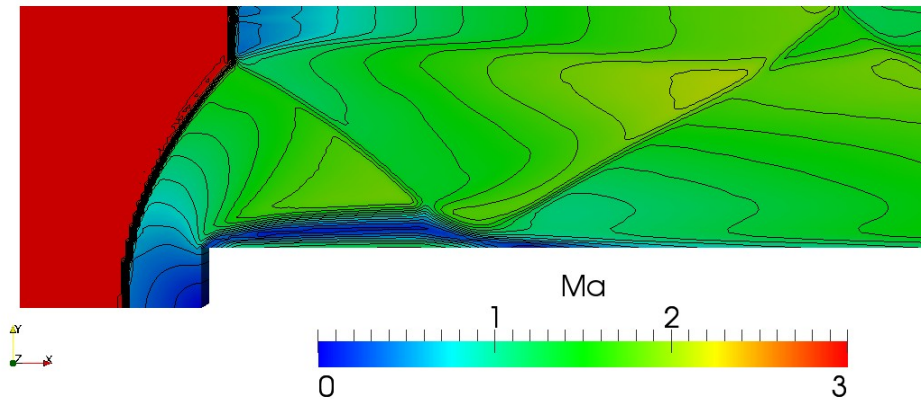
Obr. 4.2: rhoCentralFoam - Machovo číslo

Výsledky získané pomocí tohoto schématu jsou odlišné od výsledků prezentovaných např. v [16], kde je predikovaná struktura rázových vln odlišná jak je ukázáno na obr. 4.3. Je zde vidět, že algoritmus použitý v rhoCentralFoamu nedokáže zachytit expanzní rázové vlny a tím ovlivní další strukturu proudového pole .

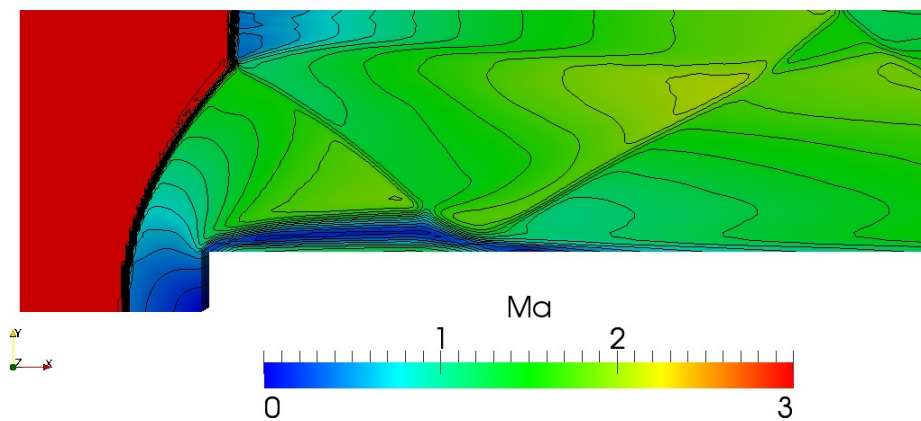


Obr. 4.3: Struktura rázových vln – hustota [16]

Pokud je použito AUSM+up schéma s časovou integrací využívající dopředné Eulerovo schéma (obr. 4.4) nebo čtyřkrokové schéma typu Runge-Kutta (obr. 4.5) je vidět, že struktura rázových vln je lépe zachycena.

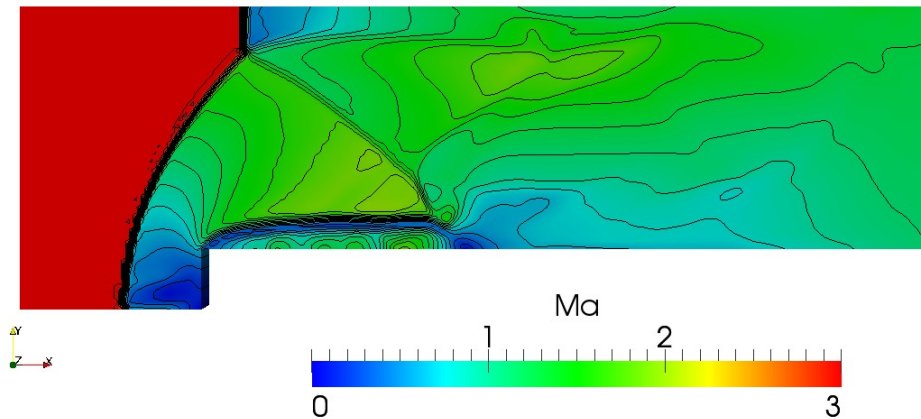


Obr. 4.4: *AUSM⁺up - Euler - Machovo číslo*

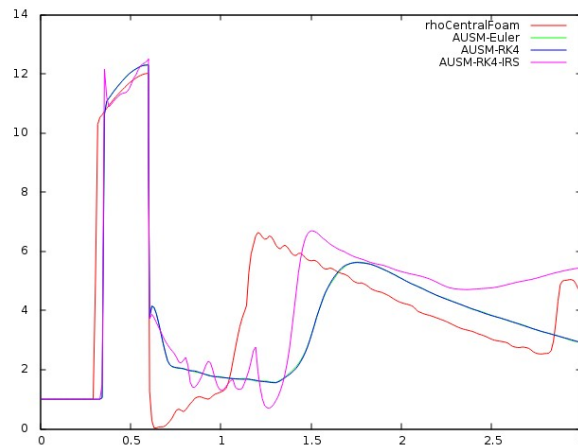


Obr. 4.5: *AUSM⁺up + Runge - Kutta - Machovo číslo*

Se zavedením implicitního vyhlazování reziduí (IRS) dochází ve výpočtu k zavedení zprůměrování, a tím dochází ve výsledcích k vyhlazení slabších rázových vln.



Obr. 4.6: AUSM+up + Runge - Kutta + IRS - Machovo číslo



Obr. 4.7: Srovnání průběhu tlaku na spodní stěně

Na obr. 4.7 je vykreslen průběh tlaků na spodní stěně. Je zde vidět, že všechny uvedené metody se shodují v určení rázové vlny před schodem. V oblasti za schodem se shodují pouze výsledky AUSM metody s náhradou časové derivace pomocí Eulerova nebo Runge-Kuttova schématu. Implicitní vyhlazování reziduí vlivem průměrování přes sousední buňky udává rozdílný průběh tlaku.

V tabulce 4.2 je uvedeno srovnání maximálního stabilního časového kroku a časové náročnosti pro řešení fyzikálního času 10 s. AUSM+up je s Eulerovým schématem pomalejší než rhoCentralFoam, ale při použití čtyřkrokové Runge-Kuttovi metody (RK4) naroste stabilní časový krok 10x. Pokud je použito IRS, pak naroste časový

krok 60x a časová náročnost úlohy klesne přibližně na 1/10.

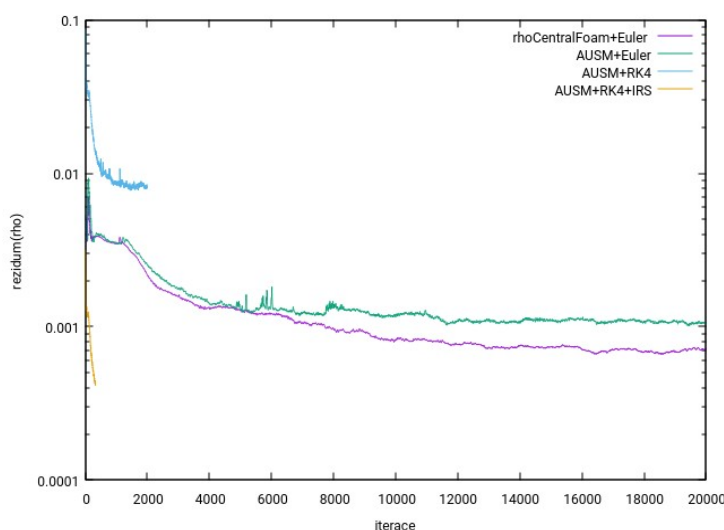
Tab. 4.2: Srovnání maximálního stabilního časového kroku a časové náročnosti úlohy pro řešení časového intervalu délky 10 s

	Stabilní časový krok [s]	Časová náročnost [s]
rhoCentralFoam	5e-4	466
AUSM + Euler	5e-4	568
AUSM + RK4	5e-3	220
AUSM + RK4+IRS	3e-2	65

Na obr. 4.8 je pak ukázáno srovnání reziduí hustoty, které je definováno jako

$$rezid = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\rho_i^{n+1} - \rho_i^n)^2}{N}}. \quad (4.1)$$

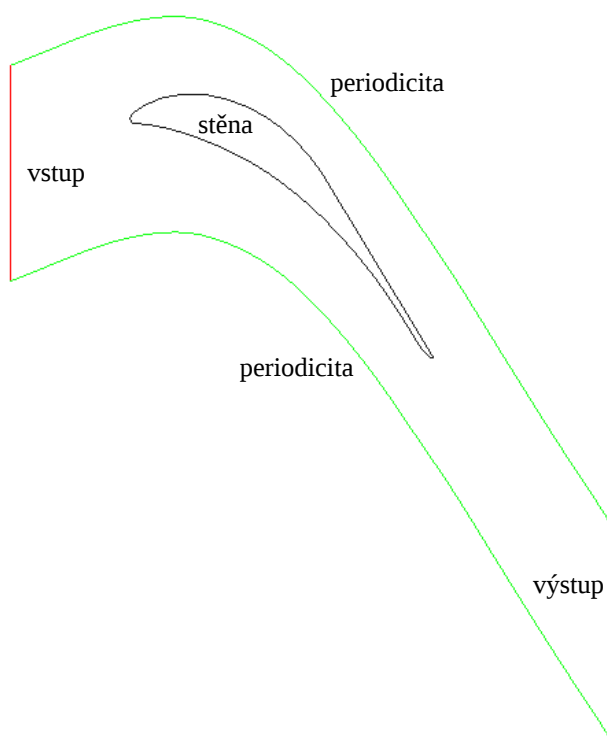
Ze zobrazených výsledků vyplývá, že numerické řešení dané úlohy je mírně nestacionární. Průběhy reziduí pro rhoCentralFoam a AUSM schéma bez Runge-Kuttovy metody nebo vyhlazování reziduí jsou podobné. Pokud je použita Runge-Kuttovou metoda tak dochází ke snížení hodnoty reziduí. Vyhlazování reziduí pak sníží hodnoty průběhu reziduí pod hodnoty průběhu reziduí AUSM se základním schématem náhrady časové derivace.



Obr. 4.8: Srovnání průběhu reziduí

4.2 Turbínová lopatka SE 1050

Druhým řešeným případem je proudění v turbínové mříži tvořené lopatkou s profilem SE1050, který je součástí databáze příkladů ERCOFTAC [17]. Režim proudění je dán okrajovými podmínkami uvedenými v Tab 4.3. Jako proudící médium je uvažován model ideálního plynu pro vzduch.



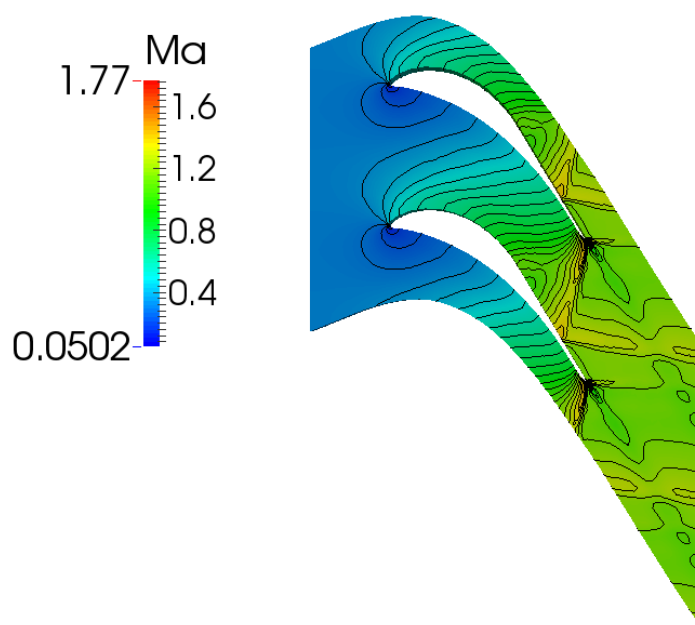
Obr. 4.9: SE-1050 geometrie

Pro ověření algoritmu bylo nejdříve řešeno 2D proudění nevazké stlačitelné tekutiny. Výpočetní síť je pro tento případ tvořena 6000 trojúhelníkovými buňkami. Schéma výpočetní oblasti je znázorněno na obr. 4.9. Pro daný případ byl na vstupu zadán celkový tlak p_0 , teplota T_0 , úhel náběhu α a na výstupu statický tlak p (viz Tab 4.3).

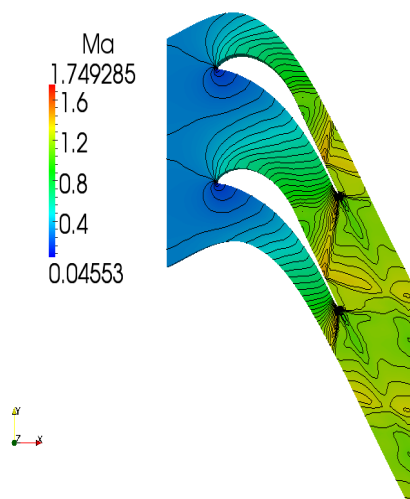
Tab. 4.3: Nastavení okrajových podmínek

Hranice	Okrajová podmínka
vstup	$p_0 = 980717 \text{ Pa}$ $T_0 = 298,65 \text{ K}$ $\alpha = 19,3^\circ$
výstup	$p = 40972 \text{ Pa}$
stěna	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$

Na obr. 4.10 a 4.11 je vykresleno proudové pole obtékané lopatky při použití AUSM⁺up schématu. Zároveň nám umožňují srovnat vliv implicitního vyhlazování na jeho strukturu. V obou dvou případech je zachycen vznik dvou rázových vln na odtokové hraně lopatky a odraz spodní větve od podtlakové strany lopatky.

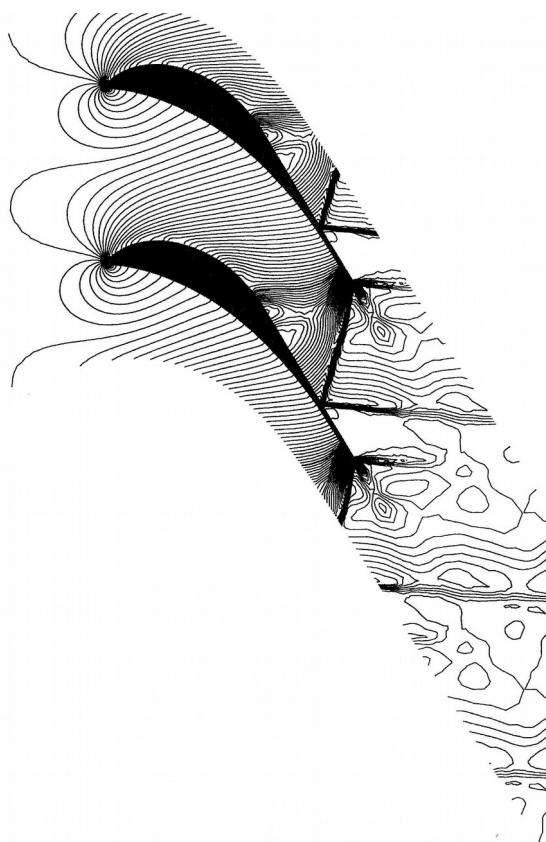


Obr. 4.10: SE-1050 Kontury Machova čísla pro RK4



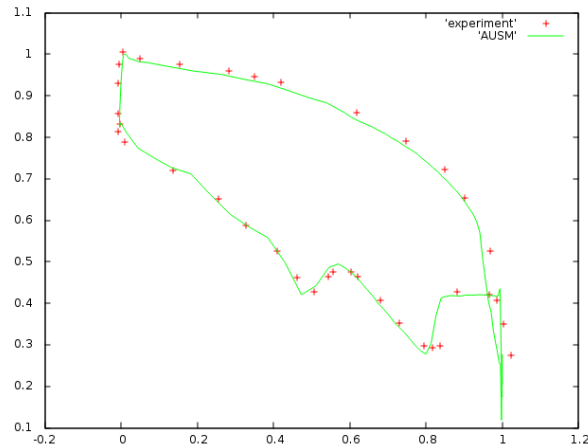
Obr. 4.11: SE-1050 Kontury Machova čísla pro RK4 a IRS

Výsledky získané numerickým řešením je možné srovnat s experimentálními daty [17]. Na obr. 4.12 jsou znázorněny kontury hustoty. Je zde vidět shoda s daty získanými pomocí numerické simulace.



Obr. 4.12: SE-1050 Experimentální data[17]

Na obr. 4.13 je pak ukázáno srovnání rozložení tlaku na povrchu lopatky. Je zde opět vidět shoda mezi experimentálními a numerickými výsledky.



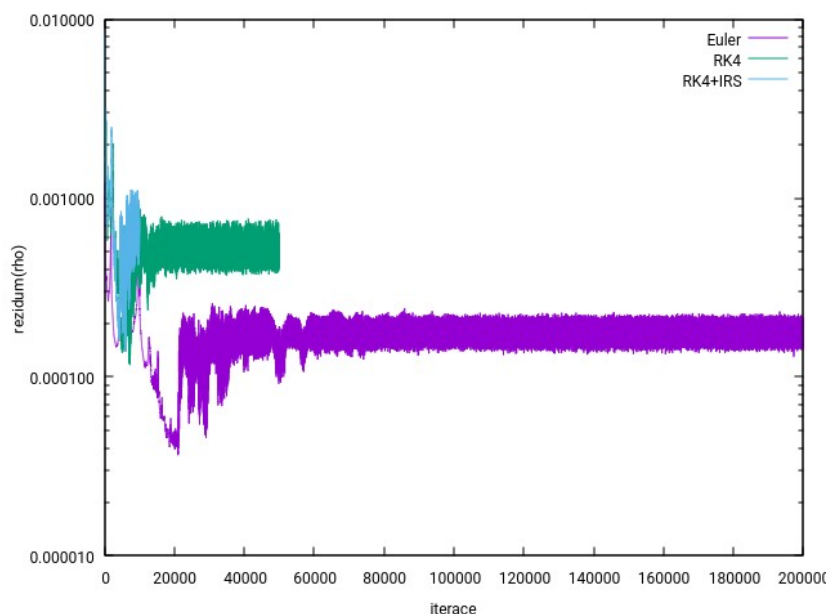
Obr. 4.13: SE-1050 Srovnání rozložení tlaku na stěně lopatky

Tabulka 4.4 ukazuje srovnání maximálního stabilního časového kroku a časové náročnosti úlohy. Je zde vidět, že při použití Runge-Kutovy metody došlo k nárůstu stabilního časového kroku, ale nedošlo ke zkrácení potřebného času pro řešení úlohy. Pokud byla použita Runge-Kuttova metoda s implicitním vyhlazováním reziduí, pak narostl stabilní časový krok 20x a zároveň došlo k výraznému zkrácení doby pro řešení úlohy.

Tab. 4.4: Srovnání maximálního stabilního časového kroku a časové náročnosti úlohy pro řešení času 0,1 s

	Stabilní časový krok [s]	Časová náročnost [s]
Euler	5e-7	1921
RK4	2e-6	1978
RK4+IRS	1e-5	584

Srovnání průběhu reziduí pro všechny tři metody náhrady časové derivace je pak zobrazeno na obr. 4.14.

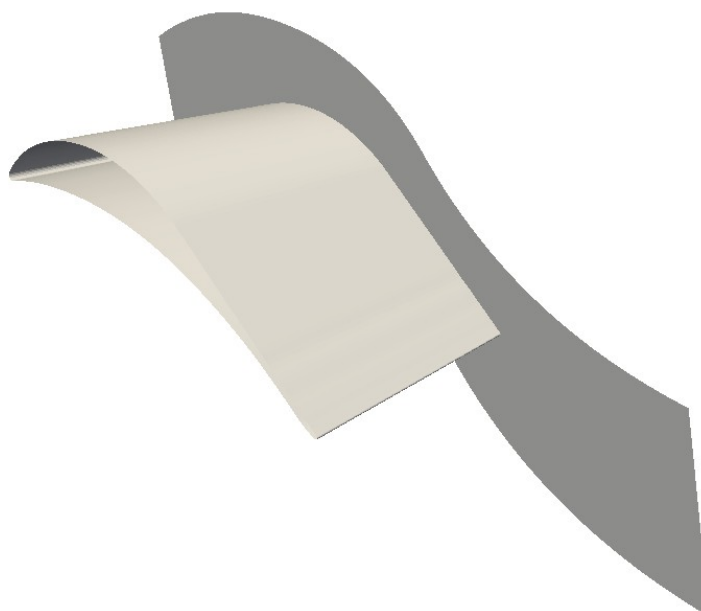


Obr. 4.14: Srovnání průběhu reziduí

V dalším kroku bylo simulováno 3D stlačitelné turbulentní proudění kolem lopatky SE-1050. Režim proudění je charakterizován vstupním úhlem α , celkovým tlakem p_0 , teplotou T_0 a statickým tlakem na výstupu p . Řešený případ je dále charakterizován Reynoldsovým číslem $1,5 \cdot 10^6$, které je vztaženo na výstupní rychlost a rozteč. Na vstupu je dále předepsána kinetická energie turbulence k_i a specifická rychlost disipace ω_i . Na povrchu lopatky je předepsána rychlost U_w a turbuletní veličiny k_w a ω_w s numerickými hodnotami dle Tab. 4.5. Pro výpočet byla použita výpočetní síť, která byla tvořena 3445470 výpočetními buňkami. 3D síť je odvozena z 2D sítě tvořené 18230 výpočetními buňkami. Tato síť byla připravena tak, aby respektovala požadavky kladené EARSM modelem turbulence (výška první buňky $y^+ \approx 1 \Rightarrow y_1 \approx 1 \cdot 10^{-6} m$). Pro zjednodušení výpočtu je simulována pouze polovina výšky lopatky (viz obr. 4.15).

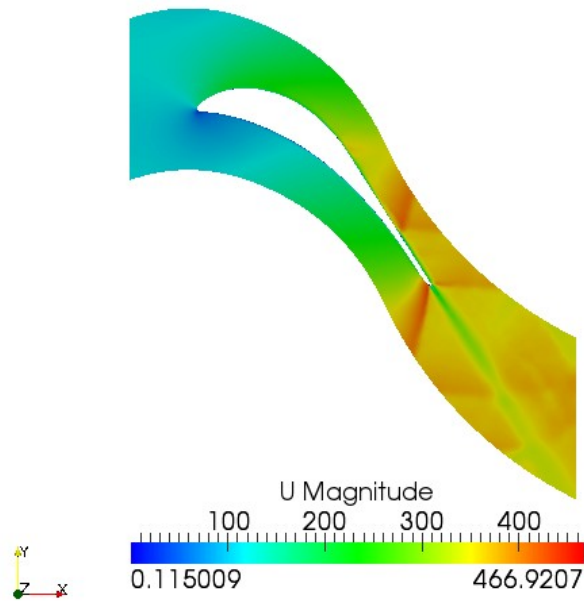
Tab. 4.5: Nastavení okrajových podmínek

Hranice	Okrajová podmínka
vstup	$p_0 = 980717 \text{ Pa}$ $T_0 = 298,65 \text{ K}$ $\alpha = 19,3^\circ$ $k_i = 32 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ $\omega_i = 5000 \text{ s}^{-1}$
výstup	$p = 40972 \text{ Pa}$
stěna	$\mathbf{u} = \mathbf{0}$ $k_w = 0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ $\omega_w = \beta^* \rho \frac{u_\tau^2}{\mu} S_R$

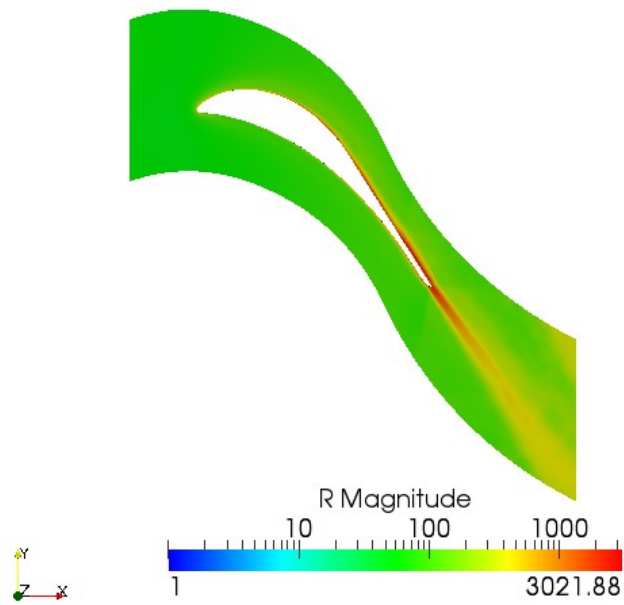


Obr. 4.15: SE 1050 - Výpočtová geometrie 3D lopatky

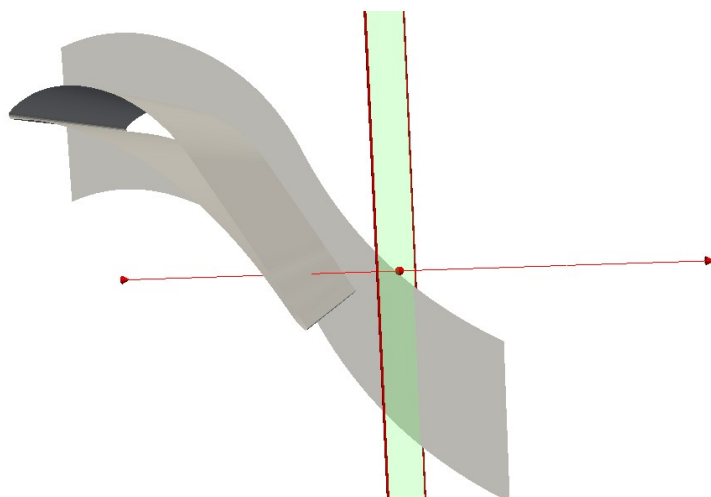
Na obr. 4.16 je ukázáno proudové pole v blízkosti lopatky. Je zde možné rozeznat vytvoření dvou rázových vln a odraz jedné z nich od podtlakové strany lopatky. Zároveň je zde zachycena interakce rázových vln s úplavem vytvořeným za lopatkou. Obr. 4.17 pak znázorňuje velikost tenzoru anisotropie v okolí lopatky. EARSM model předpovídá značný nárůst anisotropie na podtlakové straně lopatky a v oblasti úplavu.



Obr. 4.16: SE-1050 Rychlostní pole v polovině výšky lopatky



Obr. 4.17: SE-1050 Pole velikosti anisotropie



Obr. 4.18: Umístění traverzovací roviny

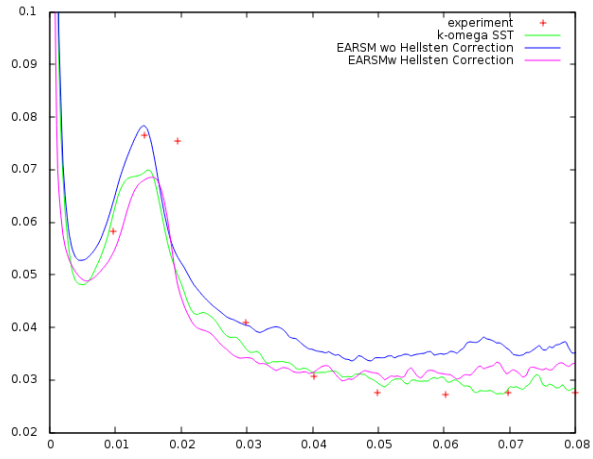
Na obr. 4.18 je definována traverzovací rovina, ve které jsou vyčísleny ztráty podle vzorce

$$\xi = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{is}} \right)^2, \quad (4.2)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{2 + (\kappa - 1)M^2}} M^2, \quad (4.3)$$

$$\lambda_{is} = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \left(1 - \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}}. \quad (4.4)$$

Výsledky jsou pak vykresleny na obr. 4.19. Pro srovnání vypočtených a experimentálně zjištěných ztrát [32] s vypočtenými ztrátami byly použity modely turbulence k-omega SST a EARSM. V případě EARSM modelu turbulence byly srovnány varianty modelu s a bez Hellstenova korekčního členu (2.72,2.75). Průběhy ztrát získané pomocí simulací jsou srovnatelné s experimentálně zjištěným průběhem. EARSM model bez korekcí lépe určuje ztráty v blízkosti paty lopatky, zatímco EARSM model s korekcemi určuje lépe ztráty v polovině výšky lopatky a zároveň je průběh ztrát podobný s daty získanými pomocí k-omega SST modelu turbulence .

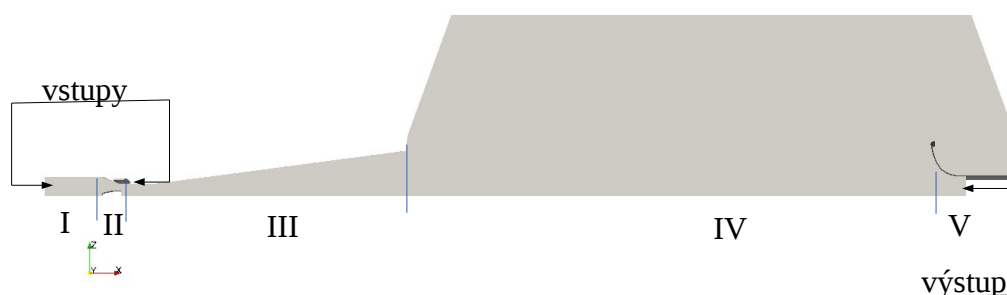


Obr. 4.19: Srovnání ztrát po výšce lopatky

4.3 Zkušební zařízení IRC

V rámci projektu LEMCOTEC financovaného Evropskou komisí bylo ve Výzkumném a zkušebním leteckém ústavu, a. s. (VZLÚ) sestaveno zkušební zařízení pro ověření funkčnosti vnitřního recirkulačního kanálu (IRC) záběrníku odstředivého kompresoru. IRC kanál byl navržen pro rozšíření stabilního intervalu provozu odstředivého kompresoru leteckého motoru. IRC kanál odebírá část stlačeného vzduchu a dopravuje je před záběrník, ve kterém dochází k ovlivnění proudu. Více informací o IRC kanálu, jeho funkci a popisu experimentu je možné nalézt v [18].

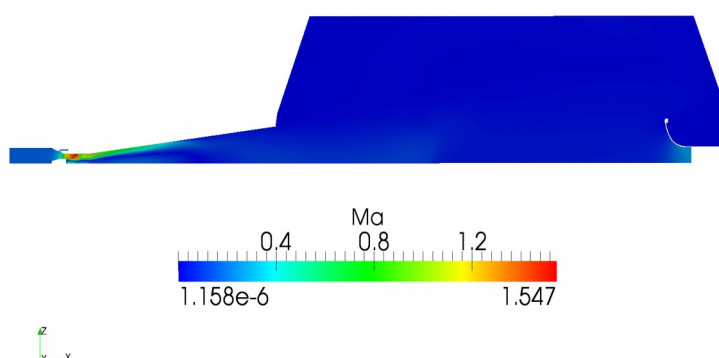
Zkušební zařízení lze rozdělit do pěti sekcí (Obr. 4.20). V první sekci dochází k nasávání vzduchu z okolního prostoru, druhá sekce je měřící, třetí sekci tvoří difuzor, čtvrtou sekci je uklidňovací nádoba a v páté sekci dochází k odsání vzduchu do komínu.



Obr. 4.20: Rozdělení experimentálního zařízení

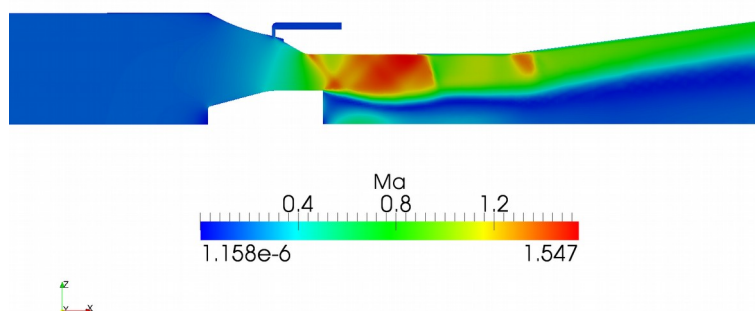
Pro výpočet byla použita zjednodušená geometrie zkušebního zařízení, kdy byla simulována 45° výseč, kterou tvořilo 1 780 000 výpočetních buněk. Výpočetní režim byl charakterizován hmotnostním tokem 1,07 kg/s nasávaného vzduchu, hmotnostním tokem vzduchu 0,044kg/s v obtokovém kanálu a úhlem rozvíření (úhel svírající mezi axiální a tangenciální složkou proudu) 60°. Na výstupu byl

zadán statický tlak 62 916 Pa.

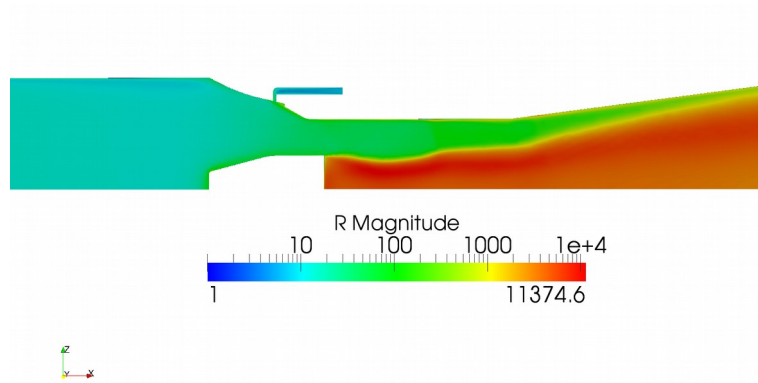


Obr. 4.21: Pole Machových čísel – celkový pohled

Jak je vidět na obr. 4.21, je v experimentálním zařízení dosaženo širokého rozsahu Machových čísel – od velmi nízkých Machových čísel na vstupu a v uklidňovací nádrži až po nadzvukové proudění na rozhraní měřicí oblasti s difuzorem (obr. 4.22).



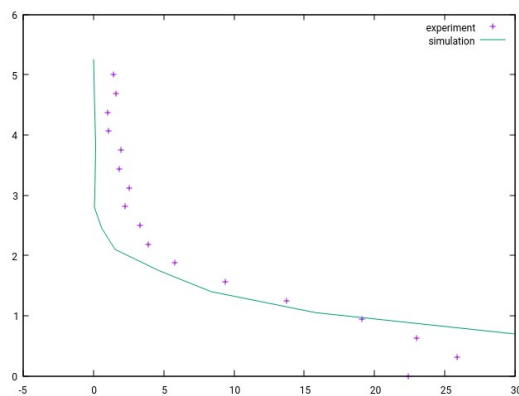
Obr. 4.22: Pole Machových čísel – detail měřícího prostoru



Obr. 4.23: Velikost tenzoru anizotropie – detail měřícího prostoru

Za kuželkou, která simuluje nárůst tlaku za kolem kompresoru, se vyskytuje oblast odtrženého proudu, jak je patrné z obr. 4.23.

Pro simulovaný případ byly k dispozici experimentální data. Jak je vidět ze srovnání (obr 4.24) simulace zachytává trend v určení úhlu rozvíření. V oblasti volného proudu pak predikuje nižší hodnoty úhlu rozvíření. V blízkosti stěny předpovídá výpočetní model naopak vyšší hodnotu úhlu rozvíření.



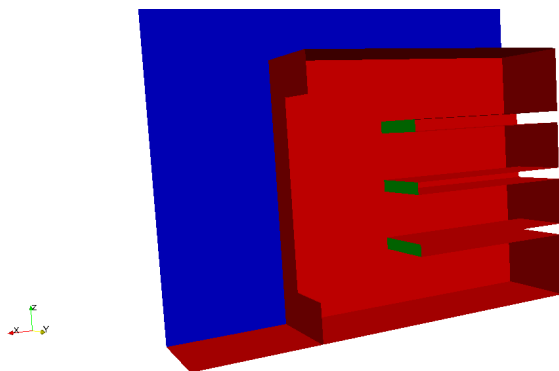
Obr. 4.24: Srovnání úhlu rozvíření (osa $x[^\circ]$) na vzdálenosti od stěny (osa y [mm])

5 Aplikace EARSM modelu na další případy

EARSM model turbulence umožňuje lépe řešit řadu problémů, kde je v proudovém poli obsaženo odtržení proudu nebo dochází k interakci více proudů. Implementace tohoto modelu do prostředí OpenFOAM umožňuje využít tento model se standardními řešiči založenými na SIMPLE a PISO algoritmech. V této části budou předloženy čtyři případy, v nichž bylo výhodné při výpočtu použít EARSM model turbulence .

5.1 Simulace proudového pole za rackovou skříní

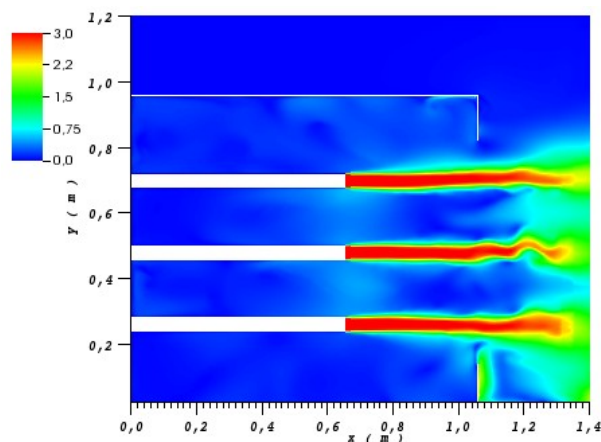
Určení parametrů proudění za rackovou skříní je důležité pro správné určení parametrů, na jejichž základě bude navržen klimatizační systém. Za rackovou skříní lze očekávat turbulentní proudění se silnou anisotropií, která je generována systémem chlazení počítačových komponent.



Obr. 5.1: Racková skřín - výpočtová geometrie

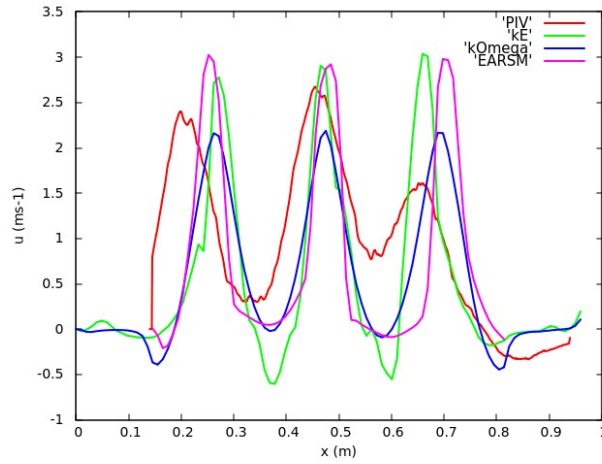
Pro výpočet byl zvolen zjednodušený model rackové skříně, který je znázorněn na obr. 5.1. Pro výpočet byly vytvořeny dvě varianty výpočtových sítí. Hrubší síť (cca 2M buněk) pro modely turbulence $k-\epsilon$ a $k-\omega SST$ a jemnější síť (cca 7M buněk) pro EARSM model turbulence. Pro simulaci byly zadány na vstupech do výpočetní domény následující okrajové podmínky. Objemový tok $0,0305 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$, intenzita turbulence 5 % a směšovací délka 0,005 m. Simulace byla

uvažována jako stacionární proudění nestlačitelné tekutiny.

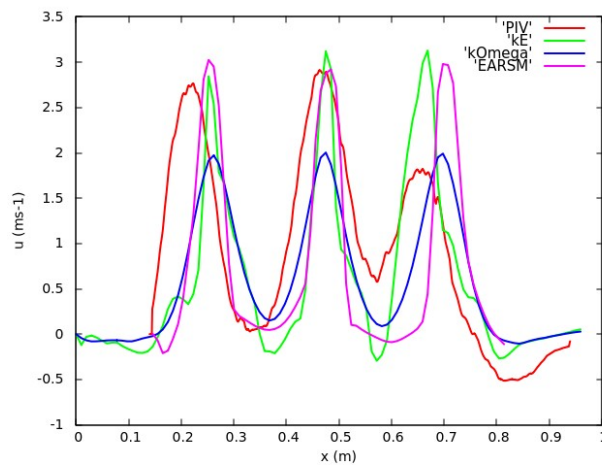


Obr. 5.2: Proudové pole v rovině symetrie

Na obr. 5.2 je znázorněno proudové pole v rovině symetrie. Maximální dosažená rychlost je 3 m/s. Tvar proudového pole bude ovlivněn „tenkou“ stěnou rackové skříně, která může mít vliv na správné určení rychlostních profilů viz obr. 5.3, 5.4 a 5.5, kde jsou vykresleny rychlostní profily ve vzdálenosti 100, 500 a 900 mm od skříně. Maximální rychlost určená pomocí modelu $k-\omega SST$ jsou 2 m/s. EARSM a $k-\epsilon$ model turbulence se shodují v určení maximální rychlosti 3 m/s. Použité modely turbulence se shodují v určení pozic maximální rychlosti spodního a středního proudu, u kterého je ve všech třech kontrolních bodech dobrá shoda s experimentem.

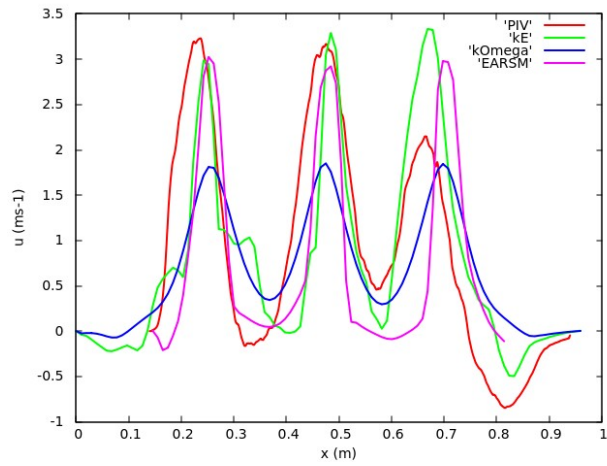


Obr. 5.3: Srovnání rychlostních profilů ve vzdálenosti 100 mm



Obr. 5.4: Srovnání rychlostních profilů ve vzdálenosti 500 mm

V případě horního proudu vzduchu určují EARSM a $k-\omega$ SST model turbulence stejnou pozici maximální rychlosti. Experimentálním datům v tomto případě lépe odpovídají výsledky získané pomocí $k-\epsilon$ modelu turbulence.



Obr. 5.5: Srovnání rychlostních profilů ve vzdálenosti 900 mm

Podrobný rozbor prezentovaných výsledků je uveden v článku [33].

5.2 Proudění v zakřiveném kanálu

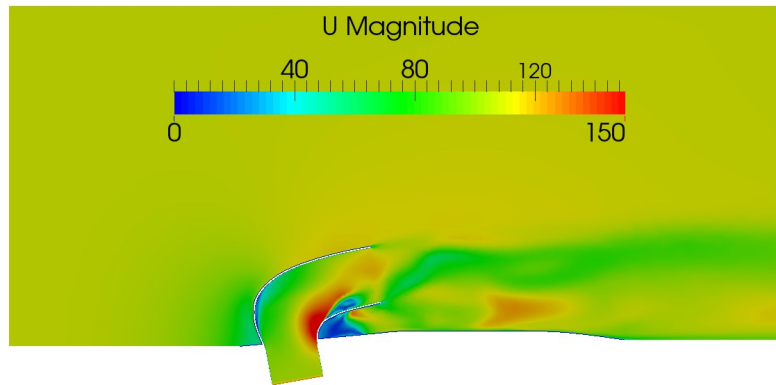
Typickým příkladem tohoto typu proudění může být proudění ve výfukové soustavě. Zakřivené výfukové potrubí má v leteckých aplikacích vliv na generovaný přídatný tah motoru nebo směřování spalin a následné ovlivnění aerodynamických a bezpečnostních vlastností letecké konstrukce.

Jako ukázkový případ byl zvolen model výfuku zobrazeného na obr. 5.6. Jedná se o zakřivený kanál, kde je vlivem tohoto zakřivení generováno odtržení. Proudění je charakterizováno rychlostí letu 390 km/hod a hmotnostním tokem spalin 3,57 kg/s o teplotě 548 °C.

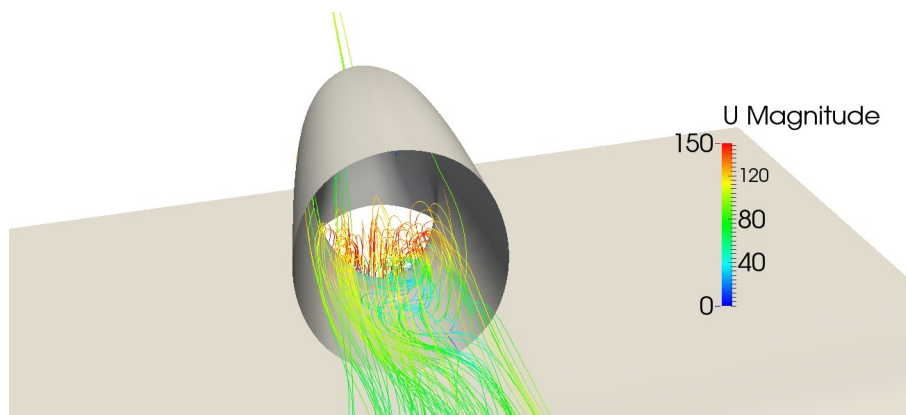


Obr. 5.6: Model výfuku leteckého motoru

Při použití standardního k-omega SST modelu s využitím stěnových funkcí a stacionárním modelem předpovídá výpočetní model následující proudové pole zobrazené na obr. 5.7. Použitý model turbulence předpovídá náznak odtržení proudy generovaného zakřivením výfuku. Oblast odtržení je však značně nepravidelná, jak je vidět ze zobrazení proudnic (obr. 5.8), a neodpovídá předpokládanému odtržení na výstupu z výfuku. Důvodem je využití stěnových funkcí [1], které jsou odvozeny pro proudění v blízkosti desky.

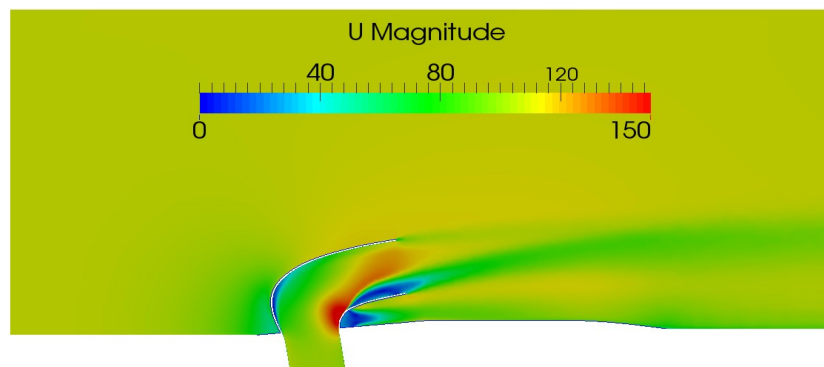


Obr. 5.7: Výfukové potrubí - proudové pole - *k-omega SST*

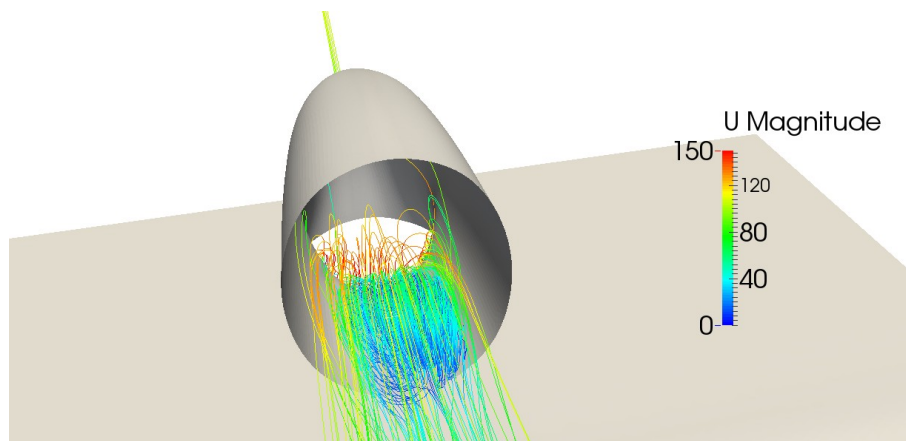


Obr. 5.8: Výfukové potrubí - proudnice - *k-omega SST*

Pokud je pro stejný výpočet použit EARSM model turbulence, pak je oblast odtržení zachycena podle předpokladu (viz obr. 5.9 a 5.10).



Obr. 5.9: Výfukové potrubí - proudové pole - *EARSM*

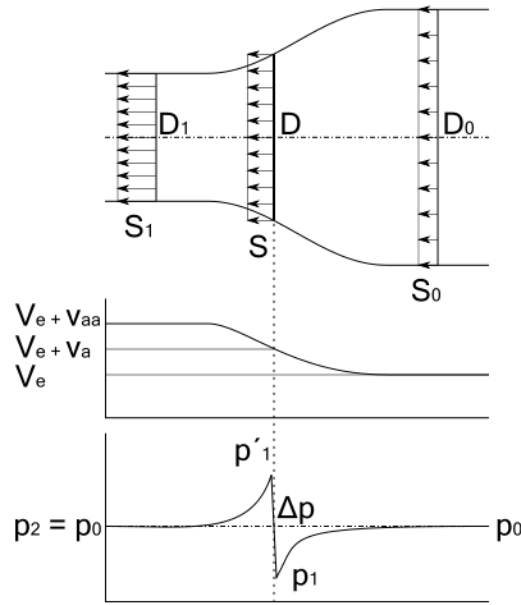


Obr. 5.10: Výfukové potrubí - proudnice - EARSM

5.3 Proudění se zdrojovým členem

Typickým příkladem proudění se zdrojovým členem je modelování vlivu vrtulového proudu. V obecném případě se jedná o nestacionární výpočet s pohyblivou sítí a s využitím LES / DES modelu turbulence. Pokud je aplikováno zjednodušení pomocí teorie actuator disku (viz obr. 5.11), pak je nutné rozšířit hybnostní rovnice (2.28) o zdrojový člen na následující tvar

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) - \overline{\rho u''_i u''_j} \right] + \bar{\rho} f \quad (5.1)$$



Obr. 5.11: Actuator disk

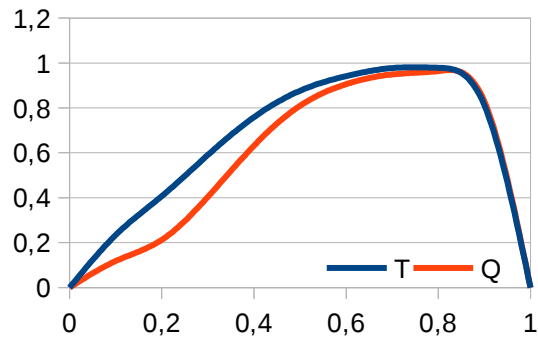
Zdrojový člen lze pak zapsat následovně

$$f = \frac{T(\tilde{r})}{\int_{\Omega_d} T(\tilde{r}) d\Omega} e^a + \frac{Q(\tilde{r})}{\int_{\Omega_d} Q(\tilde{r}) d\Omega} e^t \quad (5.2)$$

kde fce $T(\tilde{r})$ a $Q(\tilde{r})$ jsou funkce popisující rozložení tahu a krutu podél listu vrtule v omezeném prostoru Ω_d . e_a a e_t jsou vektory určující axiální

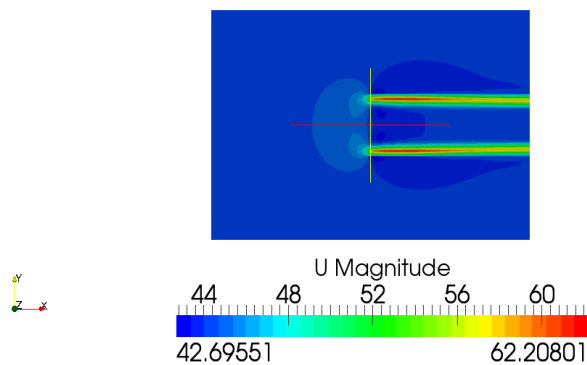
a tangenciální směr v dané buňce.

Testovacím případem je aplikace actuator disku na řešení volného proudu. Pro tuto simulaci je předpokládáno rozložení tahu a krutu dle obr. 5.12 s celkovým tahem 91.56 N a krutem 8.4 Nm.



Obr. 5.12: Rozložení tahu a krutu pro leteckou vrtuli [19]

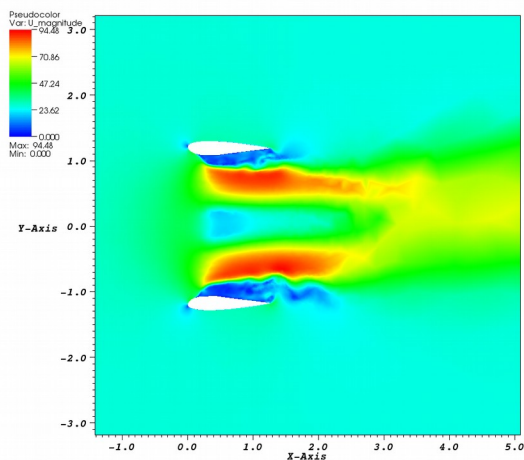
Pro dané rozložení pak obdržíme následující rozložení rychlosti (obr. 5.13). Je zde vidět, že k největšímu urychlení proudu dochází na vnějším průměru vrtule. Zde lze očekávat i nárůst anizotropie.



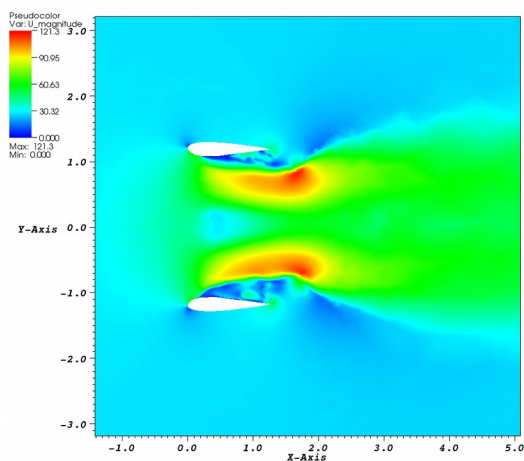
Obr. 5.13: Rozložení rychlosti ve volném proudu

Výše uvedený model byl aplikován na případ kryté vrtule o celkovém tahu 8000 N a krutu 800 Nm [20] s rozložením dle obr 5.12. Na tomto případě byl

srovnán izotropní a anizotropní model turbulence. Srovnání pro rozložení rychlostního pole je pak znázorněno na obr. 5.14 a 5.15.



Obr. 5.14: Rychlostní pole pro k-omega SST model turbulence



Obr. 5.15: Rychlostní pole pro EARSM model turbulence

Více informací k řešenému příkladu je uvedeno v článku [33].

5.4 Reaktivní proudění

CFD metody jsou využívány v mnoha aplikacích. Jsou užitečné obzvláště v případech, kdy není možné využít měřicích přístrojů, protože měřicí prostor je obtížně přístupný nebo podmínky uvnitř znemožňují měření právě jako ve spalovací komoře malého proudového motoru s výkonem větším jak 100kW [21]. Tyto metody nám zde pomáhají lépe porozumět a optimalizovat fyzikálně-chemické děje.

Řada publikací ukazuje [22], že modelování spalování je úzce spojeno s modelováním turbulence. Z toho důvodu musí být zvolen vhodný turbulentní model. Řada autorů využívá modelování pomocí LES modelů, které poskytují poměrně detailní řešení, ale za cenu hardwarové a časové náročnosti. Proto v řadě průmyslových aplikací jsou stále využívány RANS modely, které poskytují dostatečnou přesnost.

Pro aplikaci EARSM modelu byla vybrána spalovací komora vyvíjená ve Výzkumném a zkušebním leteckém ústavu, a.s.. Tato spalovací komora využívá pro generování víru pomocí dvou proudů, které jsou dopravními trubicemi nasměrovány k vyústění palivové trysky. Ve spalovací komoře dochází ke zředování a ochlazování spalin pomocí vzduchu, který je do komory přiváděn otvory v jejím plášti. Zde dochází k interakci chladícího vzduchu a spalin. Proudění ve spalovací komoře je komplexní a v některých oblastech (generování víru, směšování) je nutné počítat s výskytem silné anizotropie v turbulentním proudění.

Reaktivní proudění uvnitř spalovací komory je modelováno pomocí rozšíření systému rovnic (2.27,2.28,2.29) [23], který je popsán následovně

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = S_\rho \quad , \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \rho k \left(\frac{2}{3} \delta_{ij} + a_{ij}^{(ex)} \right) \right] + S_u \quad , \quad (5.4)$$

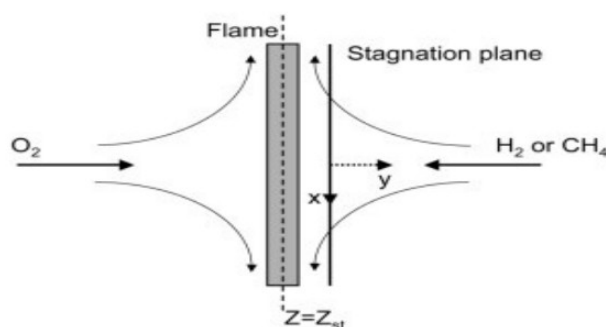
$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(h u_j) = \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\alpha + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right] + S_h \quad , \quad (5.5)$$

kde S_ρ, S_u, S_h představují zdrojové členy v příslušných rovnicích. Tyto zdroje zohledňují chemické reakce a pohyb částic palivového spreje, který je v rámci této simulace také modelován. Systém rovnic je nutno doplnit o PDR popisující transport složek plynné směsi Y_i . Interakce mezi jednotlivými složkami je modelována pomocí zdrojových členů S_i^Y .

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho Y_i u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \right] + S_i^Y, \quad (5.6)$$

5.4.1 Counter flow flame

V tomto případě je simulována interakce mezi dvěma proudy paliva a okysličovadla viz obr. 5.16. Pozice plamene je uprostřed domény, ale stagnační rovina je posunuta směrem ke zdroji paliva.



Obr. 5.16: Counter flow flame

Tento příklad byl vybrán pro jeho jednoduchost a přítomnost anisotropie v proudovém poli. První výsledky ukazují značný rozdíl v průběhu teplot mezi izotropními ($k-\epsilon$, $k-\omega$ SST) a anizotropními (LRR, LES) modely viz obr. 5.17. Důvodem je, že časové měřítko chemické reakce je ovlivněno vybraným modelem turbulence. Toto měřítko je definováno následovně

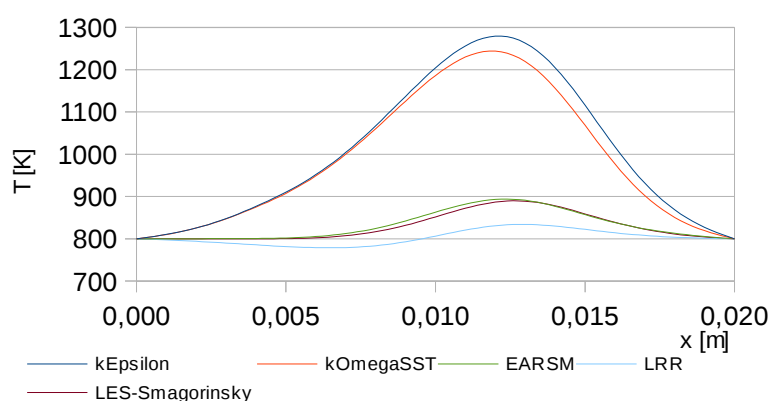
$$t_k \approx c_{mix} \sqrt{\frac{\mu_t + \mu}{\rho \epsilon}}, \quad (5.7)$$

kde c_{mix} je konstanta určující míru jeho ovlivnění turbulencí. Disipace turbulentní energie ϵ je v tomto případě definována jako

$$\epsilon \approx \rho \frac{k^2}{\mu_t} . \quad (5.8)$$

Protože kinetická energie turbulence je definována jako stopa tensoru Reynoldsových napětí $k = tr(\mathbf{R})$ proto byla rovnice (5.8) přepsána do následujícího tvaru

$$\epsilon \approx \rho \frac{\left[k + tr(a_{ij}^{(ex)}) \right]^2}{\mu_t} , \quad (5.9)$$



Obr. 5.17: Counter flow flame – Teplotní profily pro rozdílné modely turbulence

aby byl zohledněn efekt anisotropního členu. Tato modifikace vedla k tomu, že teplotní profily obdržené pomocí EARSM, Launder, Reece a Rodiho modelu Reynoldsových napětí (LRR) a LES Smagirinskému modelu jsou podobné (obr. 5.17).

5.4.2 Sandia Jet Flames

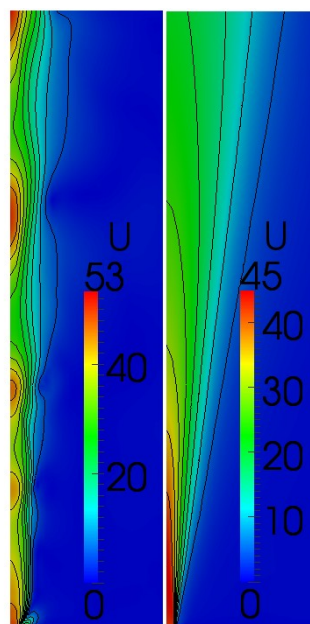
V tomto případě byl simulován experiment DLR hořáku z databáze Sandia [24], kde dochází ke spalování proudu paliva (42.2 m/s) v paralelním proudu vzduchu (0.3 m/s) viz obr. 5.18.

Z kontur velikosti rychlostí, které jsou znázorněny na obr. 5.19 je vidět, že rychlostní pole získané pomocí EARSM modelu lépe koresponduje s realitou než pole získané pomocí $k-\epsilon$ modelu.

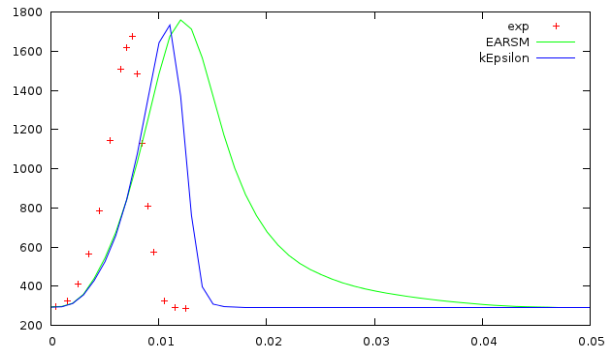
Obr. 5.20 a 5.21 ukazují srovnání experimentálních a numerických dat. V případě teplotních profilů je vidět dobrá shoda mezi měřenou a simulovanou maximální teplotou, ale teplotní profile je lépe zachycen $k-\epsilon$ modelem. Pokud srovnáme koncentrace oxidu uhličitého tak EARSM model předpovídá jejich maximální hodnotu blíže k experimentálním datům. Průběh profilu je opět lépe zachycen pomocí $k-\epsilon$ modelu.



Obr. 5.18: Sandia test case –
Experimental setup

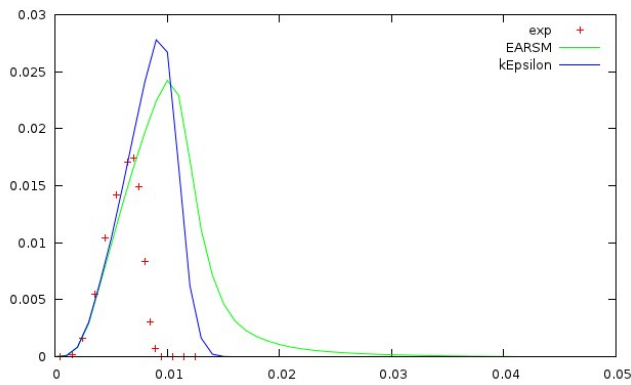


Obr. 5.19: Kontury velikosti rychlosti
vlevo k -epsilon , vpravo EARSM



Obr. 5.20: Sandia test case – Teplotní profil
 $x/d = 5$

Jedním z možných vysvětlení je zjednodušení členů pro turbulentní difuzi tepla a plynné frakce. Pro tyto členy byl v EARSM modelu použit zjednodušený izotropní vztah (5.10 a 5.11) využívající turbulentní viskozity.



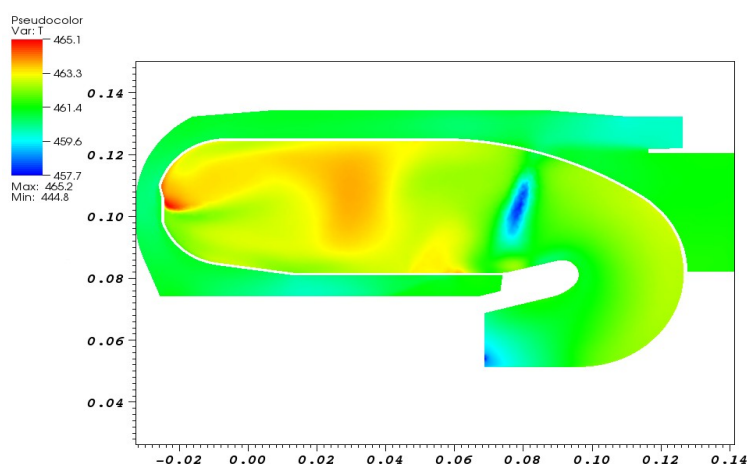
Obr. 5.21: Sandia test case – Profil koncentrací
oxidu uhelnatého $x/d = 5$

$$\overline{u_j h} = \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial h}{\partial x_j} , \quad (5.10)$$

$$\overline{u_j Y_i} = \mu_t \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} . \quad (5.11)$$

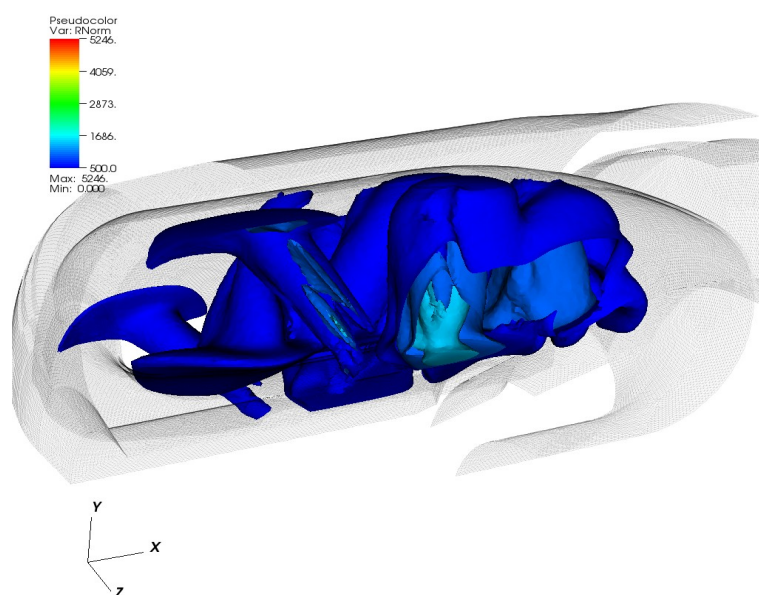
5.4.3 Komora JETIS

Pokud je EARSM model aplikován na komoru JETIS, pak je možné pozorovat několik zajímavých rozdílů. Prvním z nich je nárůst teploty v oblasti palivové trysky, kdy dochází ke stlačení horního víru vlivem rozdílného hmotnostního toku jednotlivými proudy. Druhým rozdílem je nárůst teploty v oblasti směšování teplého vzduchu a spalin (obr. 5.22)



Obr. 5.22: Komora JETIS - Teplotní pole pro nereaktivní proudění

Na obr. 5.23 je pak znázorněna L2 norma anizotropního tensoru. Je vidět, že největší anizotropie je dosaženo v oblasti směšování spalin a čerstvého vzduchu. Pro správné určení časového měřítká pro spalování je tedy nutné použít komplexnější model turbulence.



Obr. 5.23: Komora JETIS - L2 norma tenzoru anizotropie

Srovnání vybraných veličin pro různé modely turbulence je uvedeno v tabulce 5.1. Je zde vidět dobrá shoda mezi Low-Re modely ($k-\omega$ SST , EARSM, LES), kde můžeme sledovat výrazný rozdíl především v určení tlaku a hustoty.

Tab. 5.1: Srovnání vybraných veličin pro nereaktivní případ

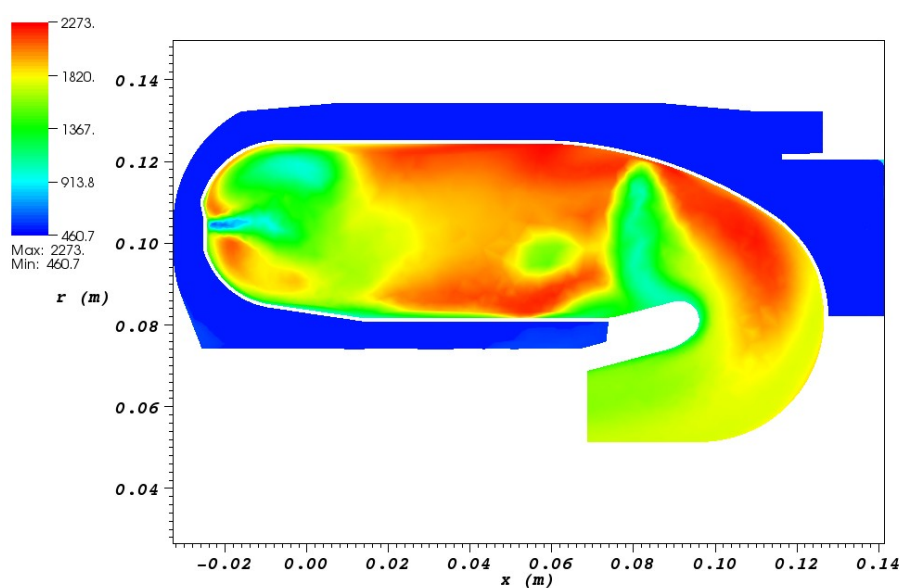
	$k-\omega$ SST HighRe	$k-\omega$ SST LowRe	EARSM	LES
Průměrný tlak na vstupu [Pa]	508558	518354	519228	523472
Průměrná rychlost na výstupu velocity [ms^{-1}]	79.49	79.8	79.64	78.1
Maximální hustota [kgm^{-3}]	3.87	3.94	3.99	4.2
Minimální hustota [kgm^{-3}]	3.24	3.18	3.12	3.14

Významný rozdíl je pak pozorován v případě reaktivního proudění. Jak je vidět ze srovnání teplotních polí na obr. 5.24 a 5.25, kde jsou znázorněna teplotní pole v řezu tryskou a tabulky 5.2. EARSM model předpovídá výsledky blíží se realitě. Maximální teplota 1700 K je v případě EARSM modelu lokalizována v oblasti primární zóny. V případě $k-\omega$ SST modelu je toto maximum (2273 K) na přechodu směšovací zóny a výstupu z komory. Použití modelu s anizotropií se projeví na hodnotách sledovaných veličin (teplota, koncentrace CO, NO)

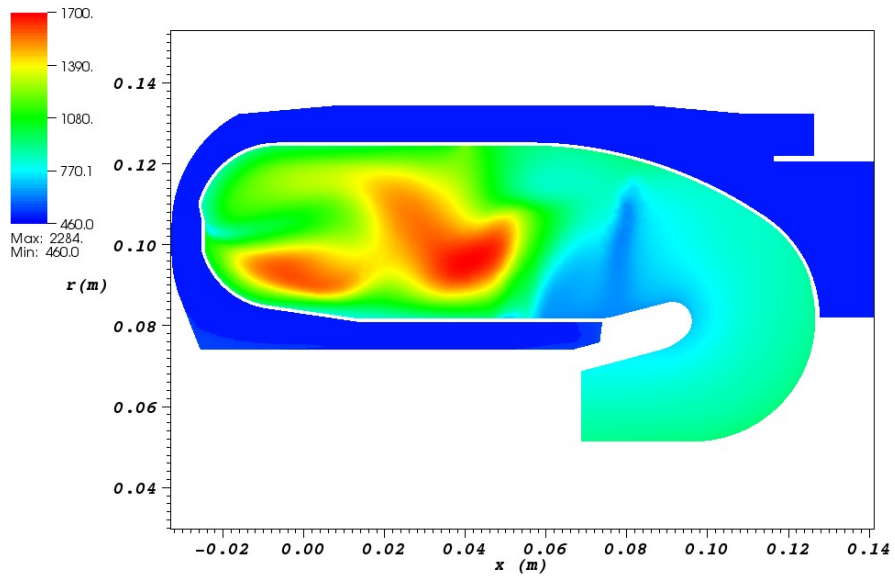
na výstupu ze spalovací komory. Ve všech případech je pozorováno jejich významné snížení a přiblížení k požadované hodnotě v případě teploty.

Tab. 5.2: Srovnání vybraných veličin pro reaktivní případ

	$k-\omega$ SST HighRe	EARSM
Průměrná teplota na výstupu [K]	1658.91	856.927
Průměrná koncentrace CO na výstupu [-]	0.0004	0
Průměrná koncentrace NO na výstupu [-]	0.013	0.009



Obr. 5.24: Komora JETIS - Teplotní pole pro k -omega SST



Obr. 5.25: Komora JETIS - Teplotní pole pro EARSM

Výsledky byly prezentovány v článku [34].

6 Závěr

Disertační práce se zabývala matematickým modelováním s využitím AUSM⁺up schématu a EARSM turbulentního modelu v prostředí OpenFOAMu, který je představitelem open-source řešení v oblasti výpočtové mechaniky tekutin.

Platforma OpenFOAMu je převážně založena na schématech PISO a SIMPLE, které umožňují řešit problémy proudění pouze v daném intervalu rychlostí. V rámci práce bylo implementováno AUSM⁺up schéma, které umožňuje řešit problémy proudění v širším intervalu rychlostí. Protože se jedná o explicitní schéma, bylo nutné implementovat vhodná rozšíření, která zajistí větší numerickou stabilitu a umožní volbu většího časového kroku. Pro implementaci bylo vybráno Runge-Kuttovo schéma doplněné o implicitní vyhlazování reziduí, které umožnilo na testovacím příkladu 2D proudění nevazké stlačitelné tekutiny kolem lopatky zvýšit stabilní časový krok z $5 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ na $1 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ a snížit potřebný čas pro řešení úlohy z 1921s na 584 s.

Knihovna modelů turbulence OpenFOAMu byla rozšířena o dvourovnicový turbulentní EARSM model publikovaný Hellstenem. Model byl testován s využitím AUSM⁺up na případu 3D obtékání lopatky a modelu zkušebního zařízení vnitřního recirkulačního kanálu záběrníku odstředivého kompresoru, kde vykazuje shodu s experimentálními daty. EARSM model byl dále testován s využitím standardních řešičů OpenFOAMu na případech, ve kterých byl předpokládán silný vliv anizotropie turbulence, jako interakce proudů vzduchu, proudění v zakřiveném kanálu nebo simulování vrtulového proudu. Významný vliv mělo aplikování EARSM turbulentního modelu na modelování reaktivního proudění ve spalovací komoře malého proudového motoru, kde lépe předpovídá rozložení teplotního pole.

V práci byla popsána implementace AUSM⁺up schématu a EARSM turbulentního modelu do prostředí platformy OpenFOAM, kde vylepšují možnosti modelování proudění stlačitelné turbulentní tekutiny. Obě studované rozšíření mají potenciál pro široké uplatnění v průmyslových aplikacích, jak bylo ukázáno na vybraných případech, a mohou být rozšířeny tak, aby je bylo možné využít pro řešení mnohem komplexnějších úloh, jako jsou např. nestacionární režimy

odstředivých kompresorů nebo interakce spalovací komory a turbíny proudového motoru. Jistou nevýhodou použitých modelů může být vyšší hardwarová a časová náročnost, kterou je možné řešit pomocí moderních HPC center.

Literatura

1. PŘÍHODA, J.; LOUDA, P. *Matematické modelování turbulentního proudění*. Vyd. 1. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2007, 111 s. ISBN 978-80-01-03623-5.
2. *Turbulence modeling resource* [online]. NASA Langley Research Center [cit. 11.11.2015]., Dostupné z <http://turbmodels.larc.nasa.gov/>.
3. HELLSTEN, A. et al. *New two-equation turbulence model for aerodynamics applications*. Helsinki University of Technology, 2004.
4. WALLIN, S.; JOHANSSON, A. V. An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 2000, 403: 89-132.
5. MENTER, F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA journal*, 1994, 32.8: 1598-1605.
6. MENTER, F. R.; KUNTZ, M.; LANGTRY, R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. *Turbulence, heat and mass transfer*, 2003, 4.1.
7. IACCARINO, G. Predictions of a turbulent separated flow using commercial CFD codes. *Journal of Fluids Engineering*, 2001, 123.4: 819-828.
8. TORNBLOM, O.; LINDGREN, B.; JOHANSSON, A. V. Experimental investigation of separating flow in a plane asymmetric diffuser. In: *TSFP digital library online*. Begel House Inc., 2003.
9. DVOŘÁK, R.; KOZEL, K. *Matematické modelování v aerodynamice*. 1. vyd. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1996, 356 s. ISBN 80-01-01541-6
10. FOŘT, J. *Numerická simulace proudění I*. Vyd. 1. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2005, 100 s. ISBN 80-01-03162-4.
11. CHUNG, T. J. *Computational fluid dynamics*. Cambridge university press, 2010.
12. TAI, C.-H.; SHEU, J.-H.; VAN LEER, B. Optimal multistage schemes for Euler equations with residual smoothing. *AIAA journal*, 1995, 33.6: 1008-1016.
13. EDGE. *Theoretical Formulation*. Stockholm: FOI - Swedish Defense

- Research Agency, 2007.
14. COQUEL, F., et al. Local time stepping applied to implicit-explicit methods for hyperbolic systems. *Multiscale Modeling & Simulation*, 2010, 8.2: 540-570.
 15. MACDONALD, C. B. *Constructing high-order Runge-Kutta methods with embedded strong-stability-preserving pairs*. 2003. PhD Thesis. Simon Fraser University.
 16. PERSSON, P.-O. Shock capturing for high-order discontinuous Galerkin simulation of transient flow problems. In: *21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. 2013. p. 1-9.
 17. *SE 1050 – test case* [online]. ERCOFTAC. [cit. 11.11.2015]., Dostupné z http://qnet-ercoftac.cfms.org.uk/w/index.php/Silver:AC_6-12_Description
 18. POLEDNO, M.; KMOCH, P.; JÍLEK, A. Investigation of Airflow in Internal Recirculation Channel of Centrifugal Compressor. *Advances in Military Technology*, 2014.
 19. ALEKSANDROV V. L. *Letecké vrtule*. Vyd. 1 ed. Praha: Státní nakladatelství technické literatury; 1954.
 20. MORT, W.; GAMSE, B. *A wind tunnel investigation of a 7-foot-diameter ducted propeller*. NASA, 1967
 21. BETAK, V.; KUBATA, J.; TUMA, J. Numerical simulation of liquid fuel combustion in the small aircraft combustion chamber. *Czech Aerospace Proceedings*. 2010.
 22. POINSOT, Thierry; VEYNANTE, Denis. *Theoretical and numerical combustion*. RT Edwards, Inc., 2005.
 23. VEYNANTE, D. Turbulent combustion. Sint-Genesius-Rode: VKI Lecture Series, 2011
 24. Sandia TNF Workshop [online] Dostupné z <http://www.sandia.gov/TNF/DataArch/DLRflames.html>
 25. ISSA, R. I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of computational physics*, 1986, 62.1: 40-65.
 26. PATANKAR, S. V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. CRC press. 1980

27. LIOU, M.-S. A sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up for all speeds. *Journal of Computational Physics*, 2006, 214.1: 137-170.
28. NOŽIČKA, J. *Termomechanika*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1998. ISBN 80-01-01836-9.
29. NOŽIČKA, J. *Mechanika tekutin*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2007. ISBN 80-01-02865-8.
30. KURGANOV, A.; TADMOR, E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection–diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, 2000, 160.1: 241-282.
31. JASAK, H. *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*. Imperial College. 1996.
32. FÜRST, J.; LUXA, M.; ŠIMURDA, D. The spanwise distribution of losses in prismatic turbine cascade with non-uniform inlet velocity profile. *Engineering Mechanics*. 2014. 21.2: 135-141.
33. BĚTÁK, V., et al. On Application of EARS M Turbulence Model for Simulation of Flow Field behind Rack Station. In: *EPJ Web of Conferences*. EDP Sciences, 2013. p. 01013.
34. BĚTÁK, V.; FÜRST, J. Steady-state solution of propeller flow using source term in the Navier-Stokes equations. *Computational Mechanics*. Pilsen: Západočeská univerzita v Plzni, 2011. ISBN 978-80-261-0027-0.
35. BETAK, V. et al. Application of earsm turbulence model to simulation of reacting flow field in jetis combustion chamber. In: *VII European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD*. 2014.
36. MARCANTONI, L. F. G.; TAMAGNO J. P., ELASKAR, S. A.. High speed flow simulation using OpenFOAM. *Mecánica Computacional*. 2012, vol. 31. no. 16. ISSN 1666-6070.
37. BĚTÁK, V.; FÜRST, J. Simulation of flow with heat transfer into blade, *Power System Engineering, Thermodynamics & Fluid Flow*. Srní: Západočeská univerzita v Plzni, 2012. ISBN 978-80-7043-665-3
38. ANDERSON, M. R. Turbomachinery validation with the new density based solver, *7th OpenFOAM workshop*, Darmstadt: Technische Universitat Darmstadt, 25 – 28 June 2012 2012.

39. BENAJES, J., et al. Development of a Segregated Compressible Flow Solver for Turbomachinery Simulations. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 2014, 7.4: s. 673-682.
40. SHEN, C., et al. Implementation of density-based implicit LU-SGS solver in the framework of OpenFOAM. *Advances in Engineering Software*, 2016, 91: s. 80-88.
41. BĚTÁK, V.; FÜRST, J. The effect of streamlines-curvature in EARSM turbulence model to the location of separation point, *Topical Problems of Fluid Mechanics. Praha: Ústav termomechaniky ČAV*, 2011. ISBN 978-80-87012-40-6.
42. KARVINEN, A.; AHLSTEDT, H. Comparison of turbulence models in case of three-dimensional diffuser. In: *Proceedings of Open Source CFD International Conference*. 2008. s. 213-230.
43. MENTER, F. R.; GARBARUK, A. V.; EGOROV, Y.. Explicit Algebraic Reynolds Stress Models for Anisotropic Wall-Bounded Flows. In: *EUCASS – 3rd European Conference for Aero - Space Sciences*, July 6 – 9, 2009, Versailles, s. 89 ISBN: 978-2-7598-0674-4.
44. FRANKE, M., et al. Turbulence treatment in steady and unsteady turbomachinery flows. In: *V European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD*. 2010. s. 14-17.
45. YUN, A. *Development and analysis of advanced explicit algebraic turbulence and scalar flux models for complex engineering configurations*. 2005. PhD Thesis. TU Darmstadt.
46. ZHONG, B., et al. Numerical simulations of turbulent flows around a high lift wing-body configuration. In: *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit including the New Horizons Forum and Aerospace Exhibition, Orlando, FL*. 2011.
47. LOUDA, P. Numerical solution of steady and unsteady viscous incompressible flows, 2008
48. WOLF, P. Using LES to study reacting flows and instabilities in annular combustion chambers. *Flow, turbulence and combustion*, 2012, 88.1-2: 191-206.

49. LAUNDER, B. E.; REECE, G. Jr; RODI, W. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *Journal of fluid mechanics*, 1975, 68.03: 537-566.
50. RODI, W. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. In: *Gesellschaft Angewandte Mathematik und Mechanik Workshop Paris France*. 1976. p. 219.
51. POPE, S. B. A more general effective-viscosity hypothesis. *Journal of Fluid Mechanics*, 1975, 72.02: 331-340
52. TAULBEE, D. B. An improved algebraic Reynolds stress model and corresponding nonlinear stress model. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)*, 1992, 4.11: 2555-2561
53. ROE, P. L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of computational physics*, 1981, 43.2: 357-372.
54. REMAKI, L.; HASSAN, O.; MORGAN, K. Aerodynamic computations using a finite volume method with an HLLC numerical flux function. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2011, 6.03: 189-212.
55. LIOU, M.-S.; STEFFEN, Ch., J. A new flux splitting scheme. *Journal of Computational physics*, 1993, 107.1: 23-39.
56. LIOU, M.-S. A sequel to ausm: Ausm+. *Journal of computational Physics*, 1996, 129.2: 364-382.
57. KITAMURA, K.; LIOU, M. S. Comparative study of AUSM-family schemes in compressible multiphase flow simulations. *Proceedings of ICCFD7, Big Island, Hawaii*, 2012.