Matematika III (201A009) - úroveň A – požadavky ke zkoušce

Řady

1. *Číselné řady.* Nekonečné řady reálných čísel. Částečný součet. Součet řady. Konvergence a divergence. Nutná podmínka konvergence.
Geometrická řada.
Kritéria konvergence pro řady s nezápornými členy (integrální, srovnávací, limitní srovnávací).
Absolutní a relativní konvergence. Limitní d'Alembertovo kritérium pro absolutní konvergenci. Alternující řady. Leibnizovo kritérium. Odhad zbytku řady.
Operace s řadami (sčítání, násobení reálným číslem, násobení řad).

2. *Řady funkcí.* Bodová konvergence, obor konvergence, součet.

3. *Mocninné řady.* Střed a poloměr konvergence. Interval konvergence. Vyšetření oboru konvergence (včetně krajních bodů intervalu konvergence).
Operace s mocninnými řadami (součin, derivace a integrace mocninných řad).
Taylorova řada funkce. Věta o rozvoji funkce v mocninnou řadu. Určení rozvojů funkcí $\exp x$, $(1 + x)^{\alpha}$, $\sin x$, $\cos x$ o středu v bodě 0. Rozvoje dalších funkcí na základě využití vzorce pro součet geometrické řady, využití známých rozvojů a operací s mocninnými řadami.

4. *Fourierovy trigonometrické řady.* Periodické funkce a periodické prodloužení funkce definované na omezeném intervalu. Trigonometrický polynom a trigonometrická řada. Fourierovy koeficienty, ortogonalita trigonometrického systému. Konvergence a součet Fourierovy řady. Věta o rozvoji periodické funkce ve Fourierovu řadu. Trigonometrické Fourierovy rozvoje sudých a lichých funkcí. Kosinové a sinové Fourierovy řady. Rychlost poklesu Fourierových koeficientů.

Obyčejné diferenciální rovnice a jejich soustavy

5. *Úvod.* Diferenciální rovnice a její řád. Řešení diferenciální rovnice na intervalu, integrální křivka.

6. *Rovnice 1. řádu.* Cauchyova úloha. Postačující podmínky existence a jednoznačnosti ($\exists$ a !) maximálního řešení Cauchyovy úlohy. Spojitá závislost řešení na počáteční podmínce.
Metoda separace proměnných. Maximální řešení Cauchyovy úlohy pro lineární rovnici 1. řádu a Bernoulliovu rovnici. Obecné a partikulární řešení exaktní rovnice.

7. *Lineární rovnice 2. řádu.* Role nezávisle proměnné v aplikacích a deterministické podmínky (stacionární jevy – okrajové podmínky, evoluční děje – počáteční podmínky). Postačující podmínky $\exists$ a ! maximálního řešení Cauchyovy úlohy. Určení fundamentálního systému řešení homogenní rovnice s konstantními koeficienty. Metoda odhadu tvaru partikulárního řešení rovnice se speciální pravou stranou. Řešení lineární nehomogenní soustavy 2. řádu eliminační metodou.
Užití mocninných řad při řešení Cauchyovy úlohy pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu s proměnnými koeficienty.

8. *Soustavy rovnic v normálním tvaru.* Převod rovnice vyššího řádu na soustavu. Speciální typy soustav v normálním tvaru – autonomní a lineární soustavy. Postačující podmínky $\exists$ a ! maximálního řešení Cauchyovy úlohy.

9. *Lineární soustavy.* Věta o $\exists$ a ! maximálního řešení Cauchyovy úlohy. Princip superpozice pro homogenní soustavy. Lineární (ne)závislost vektorových funkcí. Wronskián. Struktura množiny řešení. Fundamentální systém řešení. Partikulární řešení.

10. *Lineární soustavy s konstantními koeficienty.* Určení fundamentálního systému řešení homogenní soustavy užitím vlastních čísel a vlastních vektorů matice soustavy (Eulerova metoda). Fázový obraz lineární autonomní soustavy 2. řádu a typy bodů rovnováhy.

11. *Autonomní soustavy.* Postačující podmínky $\exists$ a ! maximálního řešení Cauchyovy úlohy.
Základní vlastnosti. Fázový prostor, (fázová) trajektorie.
Body rovnováhy – stacionární řešení. Uzavřené trajektorie – periodická řešení.
Trajektorie soustav 2. řádu a první integrály.

LITERATURA

- S. Čipera: Řešené příklady z Matematiky 3. Česká technika - nakladatelství ČVUT 2008. ISBN 978-80-01-04029-4.
- L. Herrmann: Obyčejné diferenciální rovnice – Řady. Komentované přednášky pro předmět Matematika III. Nakladatelství ČVUT 2006. ISBN 80-01-03041-5.
- L. Herrmann: Fourierovy řady. Komentované přednášky. Nakladatelství ČVUT 2006. ISBN 80-01-02603-5.
- L. Herrmann: Infinite series & Ordinary differential equations. A concise survey with examples and solved exercises. Česká technika - nakladatelství ČVUT 2014. ISBN 978-80-01-05535-9.

Matematika III (2011009) - úroveň B – požadavky ke zkoušce

Řady

1. *Číselné řady.* Nekonečné řady reálných čísel. Částečný součet. Součet řady. Konvergence a divergence (motivace na geometrické řadě). Nutná podmínka konvergence. Konvergence řad $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$, $p \in \mathbb{R}$.
Absolutní a relativní konvergence. Limitní d'Alembertovo kritérium pro absolutní konvergenci. Alternující řady. Leibnizovo kritérium. Odhad zbytku řady.
Operace s řadami (sčítání, násobení reálným číslem).

2. *Řady funkcí.* Bodová konvergence, obor konvergence, součet.

3. *Mocninné řady.* Střed a poloměr konvergence. Interval konvergence (otevřená množina). Absolutní konvergence na intervalu konvergence. Operace s mocninnými řadami (násobení, derivování a integrování).
Taylorova řada funkce. Rozvoje vybraných elementárních funkcí. Aproximace funkce Taylorovým polynomem.

4. *Fourierovy trigonometrické řady.* Určení Fourierových koeficientů periodické funkce s periodou $2L$ (spec. případ sudé resp. liché periodické funkce). Věta o součtu Fourierovy řady.

Obyčejné diferenciální rovnice a jejich soustavy

5. *Diferenciální rovnice 1. řádu.* Řešení diferenciální rovnice na intervalu, integrální křivka. Směrové pole. Obecné a partikulární řešení. Cauchyova úloha. Geometrická a fyzikální interpretace úlohy. Prodloužení řešení, maximální řešení. Postačující podmínky existence a unicity ($\exists$ a !) maximálního řešení Cauchyovy úlohy. Spojitá závislost řešení na počáteční podmínce. Pojmy autonomní a neautonomní rovnice. Řešení diferenciálních rovnic se separovatelnými proměnnými a lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

6. *Lineární diferenciální rovnice 2. řádu.* Role nezávisle proměnné v aplikacích a deterministické podmínky (stacionární jevy – okrajové podmínky, evoluční děje – počáteční podmínky). Fyzikální interpretace (vlastní a vynucené kmity). Postačující podmínky $\exists$ a ! maximálního řešení Cauchyovy úlohy. Zápis úlohy v newtonovské symbolice. Vlastnosti lineárního systému. Princip superpozice pro homogenní rovnice (fyzikální smysl). Struktura množiny řešení. Lineární (ne)závislost funkcí. Wronskián. Fundamentální systém řešení. Obecné řešení. Partikulární řešení. Určení fundamentálního systému řešení homogenní rovnice s konstantními koeficienty. Metoda odhadu tvaru partikulárního řešení rovnice se speciální pravou stranou (polynom, exponenciální funkce, lineární kombinace kosinu a sinu). Princip superpozice pro nehomogenní rovnice. Užití mocninných řad při řešení Cauchyovy úlohy pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu s proměnnými koeficienty.

7. *Soustavy diferenciálních rovnic v normálním tvaru.* Převod rovnice vyššího řádu na soustavu. Speciální typy soustav v normálním tvaru – autonomní a lineární soustavy.

8. *Lineární soustavy.* Převod lineární diferenciální rovnice 2. řádu na normální soustavu 2. řádu. Maticový zápis soustavy ($n = 2$). Věta o $\exists$ a ! maximálního řešení C. úlohy.

9. *Lineární soustavy s konstantními koeficienty.* Určení fundamentálního systému řešení homogenní soustavy užitím vlastních čísel a vlastních vektorů matice soustavy (Eulerova metoda). Stavový vektor, stavová (fázová) rovina, bod rovnováhy. Typy bodů rovnováhy v případě regulární matice. Nehomogenní soustavy - eliminační metoda.

10. *Autonomní soustavy.* Postačující podmínky $\exists$ a ! maximálního řešení Cauchyovy úlohy. Jacobiova matice. Stavový vektor, stavová (fázová) rovina, (fázová) trajektorie. Body rovnováhy – stacionární řešení. Uzavřené trajektorie – periodická řešení. Trajektorie newtonovských soustav 2. řádu a souvislost s integrálními křivkami rovnice 1. řádu.

LITERATURA

- S. Čipera: Řešené příklady z Matematiky 3. Česká technika - nakladatelství ČVUT 2008. ISBN 978-80-01-04029-4.

- L. Herrmann: Obyčejné diferenciální rovnice – Řady. Komentované přednášky pro předmět Matematika III. Nakladatelství ČVUT 2006. ISBN 80-01-03041-5.

  Vyňaty jsou následují odstavce: 11.7 - 11.9, 12.2 - 12.3, 3.6, 4.3 - 4.6, 6.3 - 6.5, 7.6 - 7.8 jen pro newtonovské soustavy, 8.4 - 8.7, 9.4, 10.3 - 10.5.

- L. Herrmann: Fourierovy řady. Komentované přednášky. Nakladatelství ČVUT 2006. ISBN 80-01-02603-5.

- L. Herrmann: Infinite series & Ordinary differential equations. A concise survey with examples and solved exercises. Česká technika - nakladatelství ČVUT 2014. ISBN 978-80-01-05535-9.