Numerická matematika A – 28.5.2015

A1. Je dána soustava nelineárních rovnic

$$\begin{aligned}(x+1)^2+y^2 &= 4\\ \sin x - y &= 1\end{aligned}$$

a) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy.

b) Zapište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$ a $g(x,y)$ v bodě $X^{(k)} = [x_k, y_k]$. Rovnice $f(x,y) = 0$ a $g(x,y) = 0$ aproximujte v bodě $[x_k, y_k]$ příslušnou rovnicí tečné roviny a odvoďte soustavu rovnic pro výpočet nového přiblížení $[x_{k+1}, y_{k+1}]$ Newtonovou iterační metodou!

c) Zvolte $X^{(0)} = [0,1]^T$ a Newtonovou metodou spočtěte $X^{(1)}$.

A2. Je dána Cauchyova úloha

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = t \qquad x(0) = 1,\ \dot{x}\prime(0) = 0$$

a) Zapište Taylorův polynom $T(h)$ stupně jedna pro funkci $y(x+h)$ rozvinutou v bodě x (tj. $h=0$). Vyjádřete chybu, jaké se dopustíme, když nahradíme $y(x+h)$ hodnotou polynomu $T(x+h)$. Užijte tento vzorec a odvoďte vzorec pro Eulerovu explicitní metodu pro numerické řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x,y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$.

b) Určete fundamentální systém řešení homogenní rovnice odpovídající dané úloze.

c) Volte $h = 1$ a určete hodnotu aproximace řešení $x(1)$ a $\dot{x}(1)$ užitím Collatzovy metody.

A3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x,t] : x \in (-1,1),\ t > 0\},$$

$$u(x,0) = 2x + 2 \text{ pro } x \in \langle -1, 1\rangle \text{ a } u(-1,t) = 0,\ u(1,t) = 4 - t \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě P_i^{k+1} při řešení rovnice vedení tepla implicitním schématem. Toto schéma odvoďte.

b) Ověřte podmínky souhlasu pro danou úlohu. Volte prostorový krok $h = 0.5$ a časový krok $\tau = 0.1$ a sestavte rovnice pro řešení úlohy v 1. časové vrstvě použitím implicitního schématu.

c) Rozhodněte, zda je Jacobiho iterační metoda pro soustavu rovnic z b) konvergentní.

A4. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt,$$

kde počáteční a okrajové podmínky jsou dány $u(x,0) = \sin(\pi x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$.

a) Rozhodněte, zda funkce $u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(2t)$ je řešením dané úlohy pro $f(x,t) = 0$. Zdůvodněte!

b) Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě P_i^k při řešení dané rovnice explicitním schématem. Toto schéma odvoďte. Dále pak odvoďte náhradu na první časové vrstvě.

c) Ověřte, zda pro volbu $h = 0.25$ a $\tau = 0.1$ bude explicitní schéma stabilní. Užijte $f(x,t) = xt$ a určete přibližnou hodnotu $u(0.5, 0.2)$ použitím explicitního schématu.

Numerická matematika B – 28.5. 2015

B1. Je dána tabulka hodnot

x_i	-1	-1	0	0	1	1	2	2
y_i	2.9	2.9	2.2	2	4	4.1	3.6	3.8

a) Pro danou tabulku hodnot sestavte soustavu normálních rovnic pro určení koeficientů polynomu nejvýše 1. stupně, který danou tabulku hodnot aproximuje nejlépe ve smyslu nejmenších čtverců. Soustavu rovnic zapište v maticovém tvaru.

b) Soustavu z a) vyřešte a určete polynom $p_1^*(x)$ nejvýše 1. stupně, který ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe aproximuje zadaná data.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' = 2\mathrm{e}^{-y} - (y')^2, \qquad y(-3) = 1, \qquad y'(-3) = 1$$

a) Zadanou diferenciální rovnici převeďte na soustavu rovnic $\mathrm{Y}' = F(x, \mathrm{Y})$.

b) Volte krok $h = 0.1$ a určete přibližné řešení Cauchyovy úlohy v bodě $x = -2.8$ Eulerovou explicitní metodou.

c) Volte krok $h = 0.2$ a určete přibližné řešení Cauchyovy úlohy v bodě $x = -2.8$ Collatzovou metodou.

B3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x,t] : x \in (-1,1),\ t > 0\},$$

$$u(x,0) = 2x + 2 \text{ pro } x \in \langle -1, 1\rangle \text{ a } u(-1,t) = 0,\ u(1,t) = 4 - t \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu.

b) Zapište podmínku stability explicitního schématu pro danou rovnici a ověřte, zda je pro volbu $h = 0.25$ a $\tau = 0.01$ je splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.5, 0.01]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána Dirichletova okrajová úloha v samoadjungovaném tvaru

$$-\left(xy'\right)' + y = 4 \qquad y(1) = 0, y(4) = 0.$$

a) Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou pro danou úlohu splněny.

b) Zapište síťové rovnice pro krok $h = 1$.

c) Rozhodněte, zda matice soustavy v b) je ostře diagonálně dominantní(ODD) nebo symetrická a pozitivně definitní (SPD).