Numerická matematika A – 22.5.2015

A1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a) Zapište, jakým z jaké rovnice se počítají vlastní čísla (a spektrálního poloměr) Jacobiho iterační matice $\boldsymbol{U}_J = -D^{-1}(L+U)$ (aniž bychom prvky matice $\boldsymbol{U}_J$ počítali, $A = D + L + U$). Zdůvodněte, že daný vzorec skutečně dává vlastní čísla matice $\boldsymbol{U}_J$.

b) Zapište jakými vztahy je definován pojem ostře diagonálně dominantní matice. Rozhodněte, zda daná matice A je ostře diagonálně dominantní.

c) Rozhodněte, zda je Jacobiova metoda pro danou soustavu rovnic konvergentní. Zapište, jakou podmínku pro konvergenci jste použili, a zdůvodněte, proč je splněna. Volte počáteční přiblížení $x^{(0)} = b$ a spočtěte přiblížení $x^{(1)}$ Jacobiovou iterační metodou.

A2. Je dána Cauchyova úloha $\dot{X} = AX$, $X(0) = (1, 0)^T$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Označte $y(x)$ řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x, y)$, užijte vztah $y'(x + h/2) = (y(x+h) - y(x))/h + \mathcal{O}(h^2)$ v bodě $x = x_i$, a odvoďte vzorec pro Collatzovu metodu (pro $y'(x+h/2)$ využijte předpoklad, že y je řešením Cauchyovy úlohy, užijte Taylorův rozvoj a členy $\mathcal{O}(h^2)$ zanedbejte).

b) Užijte krok $h = 1$ a spočtěte aproximaci řešení $X^{(1)} \approx X(1)$ pomocí Collatzovy metody.

c) Určete vlastní čísla matice A a zapište jaký tvar má fundamentální systém dané rovnice (vlastní vektory nevyčíslujte!). S uvážením tvaru fundamentálního systému zdůvodněte, zda je volba kroku $h = 1$ vhodná nebo nevhodná pro řešení dané úlohy!

A3. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\triangle u = 2x + y$$

v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dané jako vnitřek čtyřúhelníku $[0; 0]$, $[2; 0]$, $[0; 1.5]$, $[1.5; 1.5]$. Na hranici oblasti $\partial\Omega$ je daná okrajová podmínka $u(x, y) = x + y$.

a) Užitím Taylorova rozvoje pro $y \in \mathcal{C}^4(I)$ v bodě x_i vyjádřete hodnoty v bodech $x_i \pm h$. Odvoďte náhradu $y''(x_i)$ pomocí hodnot $y(x_i + h)$, $y(x)$ a $y(x_i - h)$ a zapište jaké chyby se dopustíte.

b) Pomocí parciálních derivací rozepište symbol $\triangle u$ uvedený v zadané úloze. Rozepište, jak se v regulárním uzlu $P_{i,j} = [x_i, y_j]$ nahradí tyto parciální derivace, a odvoďte rovnici pro náhradu dané rovnice metodou sítí v regulárním uzlu $P_{i,j}$.

c) Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby bod $[0, 0]$ byl uzlem sítě. Sestavte síťové rovnice na přímce $y = 1$. V neregulárním uzlu užijte lineární interpolaci.

A4. V oblasti $Q_T = \{[x, t] : x \in (1, 5),\ t \in (0, T)\}$ je zadána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + 2t, \qquad u(x, 0) = 4x, \quad u(1, t) = 4 + 3t, \quad u(5, t) = 2t + 20,$$

a) Zapište, jak se nahradí $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v uzlu $P_i^k = [x_i, k\tau]$ na k-té časové vrstvě při odvození explicitního schématu pro řešení dané rovnice. Užijte tyto náhrady pro danou rovnici a toto schéma odvoďte. Zapište podmínku jeho stability.

b) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu (tyto podmínky uveďte)! Rozhodněte, zda explicitní schéma bude stabilní pro volbu prostorového kroku $h = 1$ a časového kroku $\tau = 0.5$.

c) Volte $h = 1$ a $\tau = 0.5$ a pomocí explicitního schématu určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [4, 0.5]$.

Numerická matematika B – 22.5. 2015

B1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a) Je daná matice A ostře diagonálně dominantní? Zdůvodněte!

b) Je daná matice A symetrická a zároveň pozitivně definitní? Zdůvodněte!

c) Rozhodněte, zda je Gaussova-Seidelova iterační metoda pro danou soustavu rovnic konvergentní. Určete přiblížení $X^{(1)}$ užitím Gaussovy-Seidelovy iterační metody při volbě $X^{(0)} = B$.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 2-4t \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Určete interval maximálního řešení dané úlohy.

b) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte přibližnou hodnotu řešení $X(1)$.

B3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x,t] : x \in (-1,1),\ t > 0\},$$

$$u(x,0) = 2x + 2 \text{ pro } x \in \langle -1, 1\rangle \text{ a } u(-1,t) = 0,\ u(1,t) = 4 - t \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu. Tyto podmínky uveďte.

b) Zapište vzorec pro explicitní schéma a podmínku jeho stability. Ověřte, zda je pro volbu $h = 0.25$ a $\tau = 0.01$ je splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.5, 0.01]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána okrajová úloha pro Poissonovu rovnici, tedy

$$-\triangle u = 2x + y$$

v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0,0]$, $[3.5,0]$, $[3,2]$, $[0,2]$, kde na hranici je předepsána Dirichletova okrajová podmínka $u(x,y) = 2 - x$.

a) Nakreslete oblast a síť s krokem $h = 1$ (síť volte tak, aby bod $[0,0]$ byl uzlem sítě). Vyznačte regulární, neregulární a hraniční uzly. Zapište souřadnice všech těchto uzlů na přímce $y = 1$.

b) Sestavte všechny síťové rovnice, které vzniknou při řešení úlohy metodou sítí s krokem $h = 1$. V neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci.