Numerická matematika A – 18.6.2015

A1.

a) Kvadratická odchylka polynomu nejvýše 1. stupně $p_1(x) = a_0 + a_1 x$ je

$$\delta^2(p_1(x)) = \sum_i (p_1(x_i) - y_i)^2 .$$

Optimální polynom $p_1^*(x)$ v daném případě má splňovat

$$\delta^2(p_1^*(x)) \leq \delta^2(p_1(x)),$$

tj. hledáme takový polynom pro který je kvadratická odchylka minimální. Všimněme si, že kvadratická odchylka pro tento případ je funkcí dvou proměnných (koeficientů a_0 a a_1).

$$\delta^2(p_1(x)) = \sum_i (p_1(x_i) - y_i)^2 = \sum_i (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 = G(a_0, a_1)$$

b) Kvadratická odchylka je hladká funkce proměnných a_0 a a_1. Minimum kvadratické odchylky tedy může nastat pouze ve stacionárním bodě, tj. dostáváme podmínky $\frac{\partial G}{\partial a_0} = 0$, $\frac{\partial G}{\partial a_a} = 0$. Tedy po zderivování

$$2 \sum_i (a_0 + a_1 x_i - y_i)\, 1 = 0,$$

$$2 \sum_i (a_0 + a_1 x_i - y_i)\, x_i = 0.$$

Upravíme do tvaru

$$a_0 \sum_i 1 + a_1 \sum_i x_i = \sum_i y_i$$

$$a_0 \sum_i x_i + a_1 \sum_i x_i^2 = \sum_i x_i y_i$$

c) Nejprve vypočteme součty

$$\sum_i 1 = 5, \qquad \sum_i x_i = 4, \qquad \sum_i x_i^2 = 10, \sum_i y_i = 5.3, \qquad \sum_i x_i y_i = 14.1$$

Tedy řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.3 \\ 14.1 \end{pmatrix}$$

Řešení je $a_0 = -0.1$, $a_1 = 1.45$ a optimální polynom $p_1^*(x) = -0.1 + 1.45x$

A2.

a) Postačující podmínkou pro existenci a jedn. řešení úlohy $y'' = f(x, y, y')$ je spojitost funkce f a parciálních derivací $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_{y'} = \frac{\partial f}{\partial y'}$,

$$f(x, y, y') = y' - \sqrt{\frac{y}{x^2 - 1}},$$

$$f_y = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x^2-1}}} \frac{1}{x^2 - 1}, \qquad f_{y'} = 1,$$

V daném případě tedy potřebujeme splnit podmínky (vzhledem k počáteční podmínce)

$$x > 1, \qquad y > 0.$$

Tedy

$$G = \{[x, y, y'] : x \in (1, \infty), y \in (0, \infty), y' \in \mathbb{R}\}$$

b) Převedeme na soustavu ODRc

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & y \\ y_2 & = & y' \end{array} \Rightarrow Y' = \left(\begin{array}{r} y_2 \\ y_2 - \sqrt{\frac{y_1}{x^2-1}} \end{array} \right)$$

nebo-li $Y' = F(x, Y)$, kde

$$F(x, Y) = \left(\begin{array}{r} y_2 \\ y_2 - \sqrt{\frac{y_1}{x^2-1}} \end{array} \right).$$

c) Nejprve $x_0 = 2$, $Y^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $h = 2$. Počítejme

$$\boldsymbol{k}_1 = F\left(2, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{array}{r} 5 \\ 5 - \sqrt{\frac{3}{4-1}} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}_{pom} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{k}_2 = F\left(3, \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{array}{r} 9 \\ 9 - \sqrt{\frac{8}{9-1}} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$Y^{(1)} = Y^{(0)} + h\boldsymbol{k}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Tedy $y(4) \approx 21$.

A3.

a) Náhrady v uzlu $P_i^k = [x_i, k\tau]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(P_i^k) \approx \frac{U_i^{k-1} - 2U_i^k + U_i^{k+1}}{\tau^2},$$

kde $U_i^k \approx u(P_i^k)$, Dosazením do rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

v uzlu P_i^k dostaneme

$$\frac{U_i^{k-1} - 2U_i^k + U_i^{k+1}}{\tau^2} = c^2 \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + f(x_i, \tau_k)$$

Vynásobením τ^2 dostaneme

$$U_i^{k+1} = c^2\tau^2 \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} - U_i^{k-1} + 2U_i^k + \tau^2 f(x_i, \tau_k).$$

Označíme $\sigma^2 = \frac{c^2\tau^2}{h^2}$ a upravíme

$$U_i^{k+1} = \sigma^2 U_{i-1}^k + 2\left(1-\sigma^2\right)U_i^k + \sigma^2 U_{i+1}^k - U_i^{k-1} + \tau^2 f(x_i, t^k)$$

Pro první časovou vrstvu ($t_1 = \tau$):

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \mathcal{O}(\tau^2),$$

a po zanedbání $\mathcal{O}(\tau^2)$

$$U_i^1 = u(x_i, 0) + \tau\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0),$$

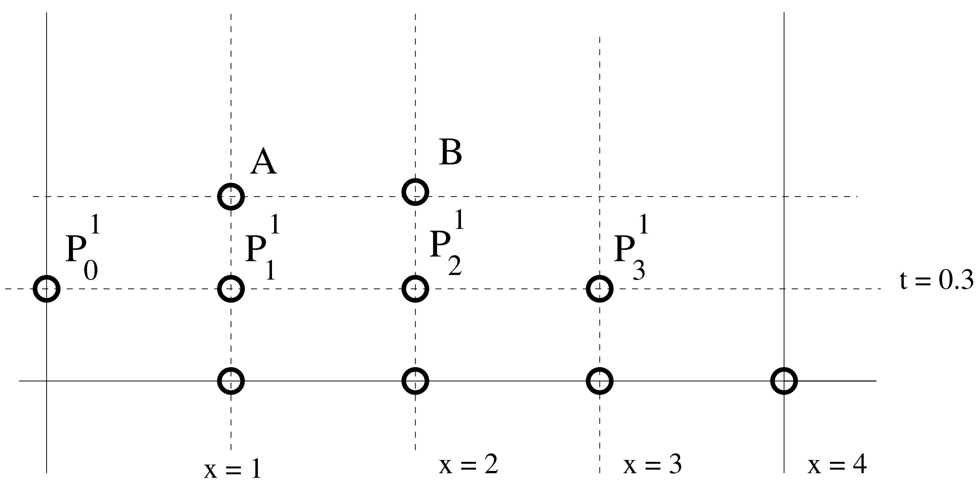
kde za u a $\frac{\partial u}{\partial t}$ dosadíme z poč. podm, tedy

$$U_i^1 = x_i(4 - x_i) + \tau\, 0,$$

b) Volba $h = 1, \tau = 0.3, c = 3$ dává $\sigma = \frac{c\tau}{h} = 0.9 \leq 1$, tedy podmínka stability je splněna.

Hodnoty na nulté a první časové vrstvě jsou stejné

x_i	0	1	2	3	4
U_i^0	0	3	4	3	0
U_i^1	0	3	4	3	0



c) $c = 3, \sigma^2 = \frac{c^2\tau^2}{h^2} = 0.81$

$$U_A = 0.81(U_0^1 + U_2^1) + 2(1-0.81)U_1^1 - U_1^0 + 0.09 \cdot 0.3 = 0.81 \cdot 4 + 0.18 \cdot 3 - 3 + 0.027 = 1.407$$
$$U_B = 0.81(U_1^1 + U_3^1) + 2(1-0.81)U_2^1 - U_2^0 + 0.09 \cdot 0.3 = 0.81 \cdot 6 + 0.18 \cdot 4 - 4 + 0.027 = 2.407$$

A4.

a) Použéjeme

$$z'(x) = \frac{z(x+h) - z(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

pro $h := h/2$ a $z(x) = p(x)y'(x)$. Tedy

$$z'(x_n) = (p(x)y'(x))'\,|_{x=x_n} \approx \frac{p(x_n - h/2)y'(x-h/2) - p(x_n + h/2)y'(x+h/2)}{2\frac{h}{2}}$$

kde označíme $p_{n\pm1/2} = p(x \pm h/2)$. Dále pak

$$y'(x_n - h/2) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}, \qquad y'(x_n + h/2) \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}.$$

Tedy

$$(p(x)y'(x))'\,|_{x=x_n} \approx \frac{1}{h^2}\left[p_{n-1/2}y_{n-1} - \left(p_{n-1/2} + p_{n+1/2}\right) y_n + p(n+1/2)y_{n+1}\right].$$

Náhrada rovnice v samoadjungovaném tvaru $-(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$ v uzlu x_n pak je po úpravě

$$-p_{n-1/2}y_{n-1} + \left(p_{n-1/2} + p_{n+1/2} + h^2 q(x_n)\right) y_n - p_{n+1/2}y_{n+1} = h^2 f(x_n)$$

případně označíme $q_n = q(x_n)$ a $f_n = f(x_n)$.

b) Pro rovnici v samoadjungovaném tvaru $-(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$ postačující podmínky existence řešení Dirichletovy úlohy jsou:

(i) Spojitost funkcí $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ a $f(x)$ na celém intervalu $\langle a, b\rangle$.

(ii) Dále $p(x) > 0$ a $q(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.

Vidíme, že funkce $p(x) = x, p'(x) = 1, q(x) = (x-1), f(x) = 4$ jsou spojité na daném intervalu. Navíc $p(x) > 0$, a $q(x) \geq 0$ pro $x \in \langle 1, 5\rangle$.

c) Nejprve vypočteme hodnoty funkcí p a q (f - je konstantní).

$x_{i\pm h/2}$	1.5	2.5	3.5	4.5
$p(x_i \pm h/2)$	1.5	2.5	3.5	4.5

x_i	2	3	4
$q(x_i)$	1	2	3

Sestavíme soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} (1.5+2.5+1) & -2.5 & 0 \\ -2.5 & (2.5+3.5+2) & -3.5 \\ 0 & -3.5 & (3.5+4.5+3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1.5\cdot 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2.5 & 0 \\ -2.5 & 8 & -3.5 \\ 0 & -3.5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{y}_2 \\ \mathrm{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Numerická matematika B – 18.6. 2015

B1.

a) Ano, protože:

$$\|\mathbb{U}\|_E = \sqrt{0.96}$$

b)

$$X^{(1)} = V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ -0.6 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7 \\ -1.1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.4 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\rho(\mathbb{U}) = 0.5$$

neboť charak. rovnice

$$\lambda^2 - 0.8\lambda + 0.25 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{0.8 \pm \sqrt{-0.04}}{2} = 0.4 \pm 0.3\, i,$$

tedy

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{0.16 + 0.09} = 0.5$$

B2. a)

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & y \\ y_2 & = & y' \\ y_3 & = & y'' \end{array} \Rightarrow Y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ 3y_3 - 3y_2 + y_1 \end{pmatrix}$$

b) $h = 0.1$ Eulerova metoda:

$$Y(-2.9) = Y(-3) + 0.1F(-3, Y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix}$$

$$Y(-2.8) = Y(-2.9) + 0.1F(-2.9, Y(-2.8)) = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.21 \\ 1.21 \\ 1.21 \end{pmatrix}$$

c) $h = 0.1$ Collatzova metoda:

$$k_1 = F(-3, Y(-3)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y_{pom} = Y(-3) + 0.1k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix}$$

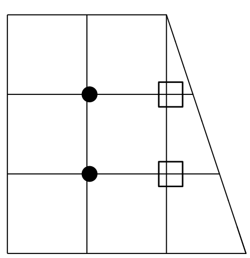
$k_2 = F(-2.9,\ Y_{pom}) = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix},\ Y(-2.8) = Y(-3) + 0.2\ k_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1.22 \\ 1.22 \\ 1.22 \end{pmatrix}$

B3. a) Podmínky souhlasu:
v $x = 0, t = 0$: počáteční $u(0,0) = -4$, okrajová $u(0,0) = -4$ v $x = 1, t = 0$: počáteční $u(1,0) = 6$, okrajová $u(1,0) = 6$

b) Podmínka stability: $\frac{p\tau}{h^2} \le \frac{1}{2},\ p = \frac{1}{2},\ h = 0.1,\ \tau = 0.01 \Rightarrow \frac{0.5 \cdot 0.01}{0.01} = 0.5$ je splněna.

c)
$U(A) = \frac{1}{2}\left(U(0.7, 0.01) + U(0.9, 0.01)\right) + 0.01 \cdot 2 \cdot 0.8 = \frac{1}{2}(3.014 + 5.018) + 0.016 = 4.032$
$U(0.7, 0.01) = \frac{1}{2}\left(U(0.6, 0) + U(0.8, 0)\right) + 0.01 \cdot 2 \cdot 0.7 = 3.014$
$U(0.9, 0.01) = \frac{1}{2}\left(U(0.8, 0) + U(1, 0)\right) + 0.01 \cdot 2 \cdot 0.9 = 5.018$
$U(0.6, 0) = 2,\ U(0.8, 0) = 4,\ U(1, 0) = 6$

B4. a) Regulární :●, neregulární : □



b) Na $y = 1$ leží jeden regulární a jeden neregulární:
regulární: $4U(0.5,\ 1) - U(1,\ 1) - U(0.5,\ 0.5) = 2 + 3 + 0.25(-0.5) = 4.875$,
neregulární: $\delta = \frac{1}{3},\ \frac{4}{3}U(1,1) - \frac{1}{3}U(0.5,\ 1) = 2$