

A1.

- Vyjádřete kvadratickou odchylku $\delta^2(p_1(x))$ obecného polynomu $p_1(x)$ nejvýše 1. stupně od tabulky hodnot x_i, y_i . Uveďte, jakou podmínku má splňovat optimální polynom $p_1^*(x)$ nejvýše 1. stupně, který aproximuje danou tabulku hodnot nejlépe ve smyslu metody nejmenších čtverců.
- Užijte předchozího označení a запиšte podmínky, ze kterých se odvodí soustava normálních rovnic pro polynom p_1^* . Tuto soustavu odvoďte!
- Sestavte soustavu normálních rovnic pro zadanou tabulku hodnot. Soustavu vyřešte a určete polynom nejvýše 1. stupně, který danou tabulku hodnot aproximuje nejlépe ve smyslu metody nejmenších čtverců.

x_i	-1	0	1	2	2
y_i	-1.6	0	1.3	2.9	2.7

A2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' = y' - \sqrt{\frac{y}{x^2 - 1}}, \quad y(2) = 3, \quad y'(2) = 5$$

- Zapište, v jaké oblasti jsou splněny postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení dané Cauchyovy úlohy. Uveďte všechny podmínky, které ověřujete!
- Danou diferenciální rovnici převeďte na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu.
- Volte $h = 2$ a určete přibližnou hodnotu $y(4)$ užitím Collatzovy metody.

A3. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici: Hledáme funkci $u(x, t)$ takovou, že platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t,$$

a jsou splněny počáteční a okrajové podmínky

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= x(4 - x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{pro } x \in \langle 0, 4 \rangle, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(4, t) = 0 \quad \text{pro } t \geq 0. \end{aligned}$$

- Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v regulárním uzlu P_i^k při řešení dané rovnice explicitním schématem. Toto schéma odvoďte.
- Volte krok $h = 1$, časový krok $\tau = 0.3$ a nakreslete síť. Ověřte, zda je pro tuto volbu explicitní schéma stabilní! Určete hodnoty aproximací ve všech uzlech sítě na nulté a první časové vrstvě.
- Užitím explicitního schématu určete přibližnou hodnotu v bodech $A = [1, 0.6]$ a $B = [2, 0.6]$.

A4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro obyčejnou diferenciální rovnici v samoadjungovaném tvaru

$$-(xy')' + (x - 1)y = 4 \quad y(1) = 2, y(5) = 0.$$

- Užijte náhradu $z' = \frac{z(x+h) - z(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$ v uzlu $x = x_n$ pro $h := \tilde{h}/2$ a výraz $z(x) = p(x)y'(x)$. Následně hodnoty $y'(x_n \pm h/2)$ aproximujte opět užitím této náhrady. Členy $\mathcal{O}(h^2)$ zanedbejte a odvoďte diferenční náhradu rovnice v samoadjungovaném tvaru.
- Ověřte, že existuje právě jedno řešení dané úlohy. Uveďte všechny podmínky, které jste ověřili!
- Volte krok $h = 1$ a запиšte síťové rovnice pro danou úlohu.

Numerická matematika B – 18.6. 2015

B1. Je dána soustava rovnic $X = \mathbb{U}X + V$, kde

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ -0.6 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Rozhodněte, zda je prostá iterační metoda pro danou soustavu konvergentní.
- b) V kladném případě určete první a druhé přiblížení $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ touto metodou při volbě $X^{(0)} = \mathbf{0}$.
- c) Určete spektrální poloměr matice \mathbb{U} .

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$y''' = 3y'' - 3y' + y, \quad y(-3) = 1, \quad y'(-3) = 1, \quad y''(-3) = 1$$

- a) Zadanou diferenciální rovnici převed'te na soustavu rovnic $Y' = F(x, Y)$.
- b) Volte krok $h = 0.1$ a určete přibližné řešení Cauchyovy úlohy v boě $x = -2.8$ Eulerovou explicitní metodou.
- c) Volte krok $h = 0.2$ a určete přibližné řešení Cauchyovy úlohy v boě $x = -2.8$ Collatzovou metodou.

B3. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x, \quad u(x, 0) = 10x - 4, \quad u(0, t) = t - 4, \quad u(1, t) = \frac{6}{1+t},$$

- a) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu.
- b) Uved'te podmínku stability explicitního schématu a ověřte, zda je pro volbu $h = 0.1$ a $\tau = 0.01$ splněna.
- c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.8, 0.01]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána okrajová úloha pro Poissonovu rovnici, tedy

$$-\Delta u = x - y$$

v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0, 0]$, $[1.5, 0]$, $[1, 1.5]$, $[0, 1.5]$, kde na hranici je předpsána Dirichletova okrajová podmínka $u(x, y) = 2y$.

- a) Nakreslete oblast a síť v této oblasti. Vyznačte regulární, neregulární a hraniční uzly.
- b) Sestavte síťové rovnice v uzlech sítě ležících na přímce $y = 1$, které vzniknou při řešení úlohy metodou sítí s krokem $h=0.5$. V neregulárních uzlech užíjte lineární interpolaci.