

Numerická matematika A – 25.6.2015

A1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

- a) Zapište (obecnou) matici A jako součet diagonální matice D , ostře dolní trojúhelníkové matice L a ostře horní trojúhelníkové matice P , tedy $A = L + D + P$. Zapište Jacobiho iterační metodu ve tvaru prosté iterační metody $X^{(n+1)} = U_J X^{(n)} + V$ a pomocí L, D, P a B vyjádřete matici U_J a vektor V .
- b) Ukažte, že pro libovolnou ostře diagonálně dominantní (po řádkách) matici A je spektrální poloměr příslušné matice U_J menší než 1.
- c) Rozhodněte, zda je pro danou matici A Jacobiho iterační metoda konvergentní. Zdůvodněte.
- d) Volte $X^{(0)} = B$ a vypočítejte $X^{(1)}$ Jacobiho iterační metodou. Určete řádkovou a sloupcovou normu rozdílu vektorů $X^{(0)}$ a $X^{(1)}$.

A2. Je dána Cauchyova úloha

$$y''' + yy'' + 1 - (y')^2 = 0 \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$$

- a) Danou rovnici převeďte na soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.
- b) Určete oblast, ve které jsou splněny postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost maximálního řešení dané Cauchyovy úlohy.
- c) Volte $h = 0.2$ a určete hodnotu aproximace řešení $y(0.2)$ a $y'(0.2)$ užitím Collatzovy metody.

A3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x \quad \text{v oblasti } \Omega = \{[x, t] : x \in (-1, 1), t > 0\},$$

$$u(x, 0) = 2x + 2 \text{ pro } x \in \langle -1, 1 \rangle \text{ a } u(-1, t) = 0, \quad u(1, t) = 4 - t \text{ pro } t \geq 0.$$

- a) Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě P_i^{k+1} při řešení rovnice vedení tepla implicitním schématem. Toto schéma odvoďte.
- b) Ověřte podmínky souhlasu pro danou úlohu. Volte prostorový krok $h = 0.5$ a časový krok $\tau = 0.1$ a sestavte rovnice pro řešení úlohy v 1. časové vrstvě použitím implicitního schématu.
- c) Rozhodněte, zda je Jacobiho iterační metoda pro soustavu rovnic z b) konvergentní.

A4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$$

v oblasti Ω ve tvaru čtyřúhelníka $ABCD$, kde $A = [0, 0]$, $B = [3, 0]$, $C = [2, 3]$ a $D = [0, 3]$ s okrajovou podmínkou $u(x, y) = 1$ na hranici $\partial\Omega$.

- a) Volte krok $h = 1$ a síť tak, aby bod $[0, 0]$ byl uzlem sítě. Síť načrtněte a vyznačte regulární a neregulární uzly.
- b) Pomocí lineární interpolace sestavte vzorec pro náhradu řešení v neregulárním uzlu.
- c) Sestavte soustavu síťových rovnic a rozhodněte, zda bude pro tuto soustavu konvergovat Jacobiho iterační metoda.

Numerická matematika B – 25.6. 2015

B1. Určete polynom nejvýše 2. stupně $p_2(x)$, který ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe aproximuje data zadaná tabulkou hodnot:

x_i	0	1	1	2
y_i	0	1	2	2

- Zapište v maticovém zápisu soustavu rovnic pro určení koeficientů hledaného polynomu.
- Zapište řešení soustavy a výsledný polynom.
- Vypočtěte hodnotu tohoto polynomu v bodě $x = 1$.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Určete interval maximálního řešení dané úlohy.
- Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte přibližnou hodnotu $X(1)$.

B3. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro rovnici v samoadjungovaném tvaru

$$-(xy')' + (x+1)y = -2, \quad y(1) = 1, \quad y(3) = 0$$

- Zapište podmínky, které jsou postačující pro existenci a jednoznačnost řešení obecné okrajové úlohy pro rovnici v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.
- Zapište síťové rovnice pro krok $h = 0.5$. Zjistěte, zda matice této soustavy je ostře diagonálně dominantní.

B4. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xt,$$

$$u(x, 0) = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1 - x \text{ pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \text{ a } u(0, t) = t, \quad u(1, t) = 1 \text{ pro } t \geq 0.$$

- Ověřte, zda pro danou úlohu jsou splněny podmínky souhlasu. Tyto podmínky uveďte.
- Zapište podmínku stability explicitního schématu a ověřte, zda pro volbu $h = 0.25$ a $\tau = 0.2$ je splněna.
- Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.75, 0.4]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).