Numerická matematika A – 11.6.2015

A1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a) Rozhodněte, zda daná matice A je symetrická a zároveň pozitivně definitní. Ověřte, zda daná matice A je ostře diagonálně dominantní.

b) Ověřte, že pro danou matici A je Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní!

c) Volte $X^{(0)} = B$ a proveďte výpočet $X^{(1)}$ Gaussovou-Seidelovou iterační metodou.

A2. Je dáno $h > 0$, $D > 0$ a Cauchyova úloha $y' = -6y, \quad y(0) = D$.

a) Užitím Taylorova rozvoje odvoďte náhradu derivace $y'(x)$ pomocí hodnot $y(x)$, $y(x-h)$. Užitím této náhrady odvoďte vzorec pro Eulerovu implicitní metodu pro numerické řešení Cauchyovy úlohy.

b) Užitím explicitní Eulerovy metody a kroku h spočítejte (vyjádřete) hodnoty aproximace řešení v bodech $x_j = jh$, $j = 1, 2, 3$ a $j = n$.

c) Užitím implicitní Eulerovy metody a kroku h spočítejte (vyjádřete) hodnoty aproximace řešení v bodech x_j pro $j = 1, 2$ a $j = n$.

A3. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{81}{25} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\,t,$$

počáteční a okrajové podmínky $u(x, 0) = x^2$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1 - x^2$, $u(-1, t) = 1$, $u(1, t) = \frac{1}{1+t^2}$.

a) Ověřte, zda pro danou úlohu jsou splněny podmínky souhlasu.

b) Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě P_i^k při řešení dané rovnice explicitním schématem. Toto schéma odvoďte. Dále pak odvoďte náhradu na první časové vrstvě.

c) Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [0.8, 0.2]$ explicitní metodou. Volte $h = 0.2$ a τ maximální tak, aby explicitní schéma bylo stabilní.

A4. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{5} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt,$$

s počáteční podmínkou $u(x, 0) = x - x^2$ pro $x \in \langle 0; 1 \rangle$, a okrajovými podmínkami

$$u(0, t) = 0 \qquad u(1, t) = 0 \qquad \text{pro } t \geq 0$$

a) Zapište Taylorův polynom $T(h)$ stupně tři pro funkci $y(x+h)$ rozvinutou v bodě x a vyjádřete chybu, jaké se dopustíme, když nahradíme $y(x + h)$ hodnotou polynomu $T(x + h)$. Užitím tohoto rozvoje odvoďte náhradu $y''(x)$ pomocí hodnot funkce $y(x + h)$, $y(x - h)$, $y(x)$.

b) Volte prostorový krok $h = 0.25$ a maximální časový krok tak, aby bod $A = [0.25; 0.2]$ byl uzlem sítě a explicitní schéma bylo stabilní.

c) Určete pro dané h a τ přibližně hodnotu řešení v bodě A explicitním schématem.

Numerická matematika B – 11.6. 2015

B1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a) Je daná matice A ostře diagonálně dominantní? Je daná matice A symetrická a zároveň pozitivně definitní? Zdůvodněte!

b) Určete $X^{(1)}$ Gaussovou-Seidelovou iterační metodou při volbě $X^{(0)} = B$.

c) Spočítejte řádkovou normu $\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty$.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$y''' = 2\frac{y'}{x^2}, \quad y(-3) = 1, \quad y'(-3) = 1, \quad y''(-3) = 1,$$

a) Určete interval maximálního řešení dané Cauchyovy úlohy.

b) Danou rovnici převeďte na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu.

c) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte přibližnou hodnotu $y(-2)$.

B3. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xt,$$

$$u(x,0) = x, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - x \text{ pro } x \in \langle 0, 1\rangle \text{ a } \ u(0,t) = t, \ u(1,t) = 1 \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Ověřte, zda pro danou úlohu jsou splněny podmínky souhlasu. Tyto podmínky uveďte.

b) Zapište podmínku stability explicitního schématu a ověřte, zda pro volbu $h = 0.25$ a $\tau = 0.2$ je splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.75, 0.4]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána okrajová úloha pro Poissonovu rovnici, tedy

$$-\triangle u = 2x - y$$

v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0,0], [1.2, 0], [1.2, 1.5], [0, 1.5]$, kde na hranici je předepsána Dirichletova okrajová podmínka $u(x,y) = 1$.

a) Nakreslete oblast a síť v této oblasti. Vyznačte regulární, neregulární a hraniční uzly.

b) Sestavte síťové rovnice v uzlech sítě, které vzniknou při řešení úlohy metodou sítí s krokem $h = 0.5$. V neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci.