Numerická matematika A – 25.6.2015

A1. Máme dánu soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

a) Zapíšeme soustavu rovnic $AX = B$ ve tvaru

$$(L + D + P)X = B,$$

upravíme

$$DX = -(L + P)X + B,$$

a následně

$$X = -U_J X + V,$$

kde $U_J = -D^{-1}(L + P)$ a $V = D^{-1}B$. Jacobiova metoda je dána vzorcem

$$X^{k+1} = -U_J X^k + V_J.$$

b) Dle a) je matice $U_J = -D^{-1}(L + P)$, nebo-li prvky matice $U_J = (u_{ij})$ jsou nulové na diagonále ($u_{ii} = 0$), a mimo diagonální prvky jsou dány jako

$$u_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}.$$

Pro řádkovou normu matice U_J platí

$$\|U_J\|_\infty = \max_i \sum_j |u_{ij}| = \max_i \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \max_i \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < \max_i \frac{1}{|a_{ii}|} |a_{ii}| = 1,$$

kde poslední nerovnost platí vzhledem k tomu, že matice je ODD v řádcích.

c) Matice A je ODD v řádcích, neboť platí (od 1. do 3. řádku)

$$4 > 1 + |-1|, \quad 4 > 1 + 1, \quad 2 > 1.$$

d) Dále si soustavu rovnic přepíšeme ve složkovém zápise z kterého vyjádříme i-tou složku z i-té rovnice. Tedy rovnice

$$\begin{aligned} 4x_1 + 1x_2 - x_3 &= -4 \\ 1x_1 + 4x_2 + 1x_3 &= 4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

upravíme a doplníme čísla iterací:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\left(-4 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right), \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\left(4 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right), \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\left(2 - 0\,x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right). \end{aligned}$$

Volíme $X^0 = (-4, 4, 2)^T$, dosadíme do předchozích rovnic a spočteme

$$X^1 = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1.5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dále

$$X^1 - X^{(0)} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1.5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -2.5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Normy tohoto vektoru jsou

$$\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty = 3, \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_1 = 8.$$

A2.

$$y''' + y\,y'' + 1 - (y')^2 = 0 \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$$

a) Rovnici zapíšeme jako

$$y''' = -y\,y'' - 1 + (y')^2, \text{ nebo } y''' = g(x, y, y', y''),$$

kde $g(x, y', y'') = -y\,y'' - 1 + (y')^2$. Užijeme substituci

$$\begin{aligned} z_1 &= y, & z_1' &= z_2 \\ z_2 &= y', & z_2' &= z_3 \\ z_3 &= y'', & z_3' &= -z_1\,z_3 - 1 + z_2^2, \end{aligned}$$

nebo $Z = F(x, Z)$, kde $Z = (z_1, z_2, z_3)^T$ a

$$F(x, Z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ -z_1\,z_3 - 1 + z_2^2 \end{pmatrix}$$

b) Postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení dané úlohy jsou spojitost funkce g, g_y, $g_{y'}$,$g_{y''}$. Vidíme, že funkce g a parciální derivace

$$g_y = -y'', \qquad g_{y'} = 2y', \qquad g_{y''} = -y$$

jsou spojité pro libovolný argument $[x, y, y', y'']$, tedy hledaná oblast je

$$G = \{[x, y, y', y''] \in \mathbb{R}^4\}.$$

c)

$$x_0 = 0, h = 0.2, Z^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dále

$$\boldsymbol{k}_1 = F(0, Z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0 - 1 + 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_{pom} = Z^{(0)} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = F(0.1, Z_{pom}) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.9 \\ -0 - 1 + 0.01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.9 \\ -0.99 \end{pmatrix}$$

$$Z^{(1)} = Z^{(0)} + \frac{h}{\boldsymbol{k}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.9 \\ -0.99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.18 \\ 0.802 \end{pmatrix}$$

A3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x,t] : x \in (-1,1),\ t > 0\},$$

$$u(x,0) = 2x + 2 \text{ pro } x \in \langle -1, 1\rangle \text{ a } u(-1,t) = 0,\ u(1,t) = 4 - t \text{ pro } t \geq 0.$$

a) V případě implicitního schéma užijeme v bodě $P_i^{k+1} = [x_i, t_{k+1}]$ náhrady

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P_i^{k+1}) = \frac{u(P_i^{k+1}) - u(P_i^k)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau) \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^{k+1}) = \frac{u(P_{i-1}^{k+1}) - 2u(P_i^{k+1} + u(P_{i+1}^{k+1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i+1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i-1}^{k+1}}{h^2}.$$

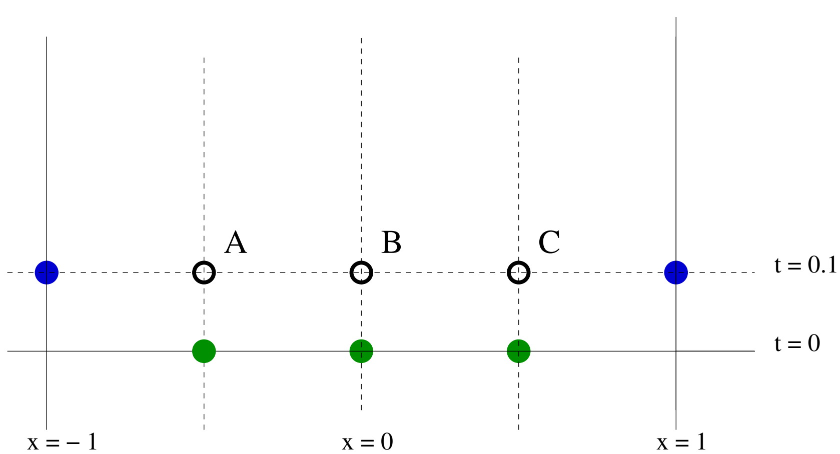
Použijeme tyto náhrady v rovnici a dostaneme

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = 2\frac{U_{i+1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i-1}^{k+1}}{h^2} + 4\,x_i.$$

Rovnici vynásobíme τ, označíme $\sigma = \frac{2\tau}{h^2}$ a upravíme

$$-\sigma\, U_{i+1}^{k+1} + (1 + 2\sigma)\, U_i^{k+1} - \sigma\, U_{i-1}^{k+1} = U_i^k + 4\tau\, x_i.$$

b) Volíme $h = 0.5$ a $\tau = 0.1$, tedy $\sigma = \frac{2\tau}{h^2} = \frac{0.2}{0.25} = 0.8$. Nejprve si načrtneme síť v oblasti:



Sestavíme rovnice dle a), v uzlech na první časové vrstvě (označených v obrázku zelenou barvou) užijeme počáteční podmínku ($2x+2$), v hraničních uzlech (modrá barva) užijeme okrajové podmínky (0 a $4-t$). Tedy

$$\begin{aligned} -0.8\,(0) + 2.6\,U_A - 0.8\,U_B &= (2\cdot(-0.5)+2) + 0.1\cdot 4\cdot(-0.5), \\ -0.8\,(U_A) + 2.6\,U_B - 0.8\,U_C &= (2\cdot(0.)+2) + 0.1\cdot 4\cdot(0), \\ -0.8\,(U_B) + 2.6\,U_C - 0.8\,(4-0.1) &= (2\cdot(0.5)+2) + 0.1\cdot 4\cdot(0.5). \end{aligned}$$

Soustavu rovnic upravíme a zapíšeme např. v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} 2.6 & -0.8 & 0 \\ -0.8 & 2.6 & -0.8 \\ 0 & -0.8 & 2.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2 \\ 6.32 \end{pmatrix}.$$

c) Soustava rovnic je soustava se symetrickou pozitivně definitní maticí a také ostře diagonálně dominantní maticí. Vzhledem k tomu, že matice je ODD, tak je Jacobiova iterační metoda konvergentní.

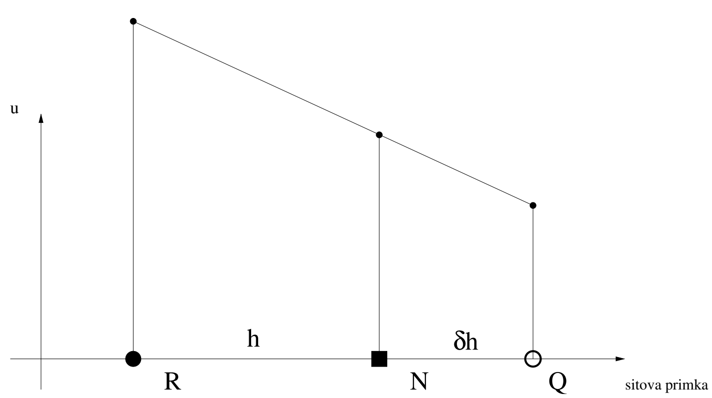
A4. Řešíme Dirichletovu okrajovou úlohu pro Poissonovu rovnici

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.5$$

v oblasti Ω ve tvaru čtyřúhelník ABCD

a)

b) Nejprve si nakreslíme schema pro neregulární uzel a sousední regulární uzel



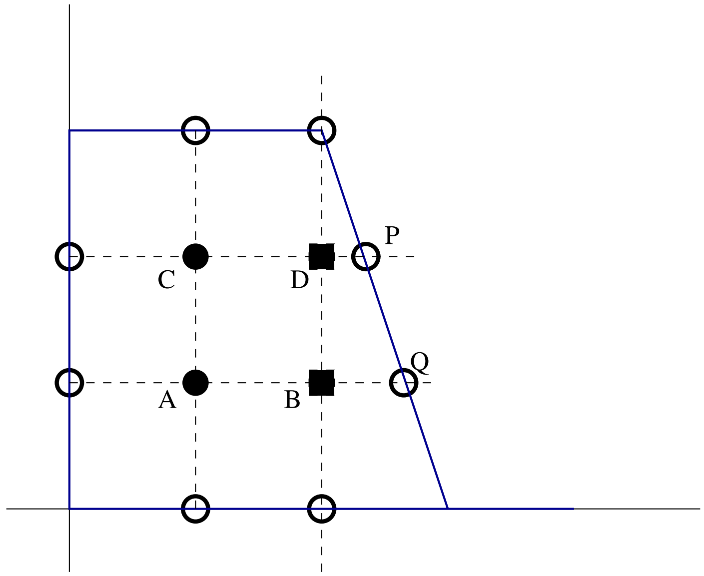
následně pak z podobnosti trojúhelníků dostaneme

$$\frac{U_N - U_R}{h} = \frac{\varphi(Q) - U_R}{(1+\delta)h},$$

a tedy po úpravě

$$\varphi(Q) = (1+\delta)U_N - \delta U_R.$$

b) *Volte krok $h = 1$ a síť tak, aby bod $[0,0]$ byl uzlem sítě. Sestavte síťové rovnice v dané oblasti.*



Regulární uzly

$$
\begin{aligned}
4U_A - U_B - U_C - 1 - 1 &= 1^2 \cdot 2 \\
4U_C - U_A - U_D - 1 - 1 &= 1^2 \cdot 2
\end{aligned}
$$

Neregulární uzly

$$
\begin{gathered}
(1+\frac{2}{3})U_B - \frac{2}{3}U_A = 1 \\
(1+\frac{1}{3})U_D - \frac{2}{3}U_C = 1
\end{gathered}
$$

Numerická matematika B – 25.6. 2015

B1. Tabulka hodnot

x_i	0	1	1	2
y_i	0	1	2	2

a) Z tabulky hodnot vypočteme

$$\sum_i 1 = 4, \qquad \sum_i x_i = 4, \qquad \sum_i x_i^2 = 6, \qquad \sum_i x_i^3 = 10, \qquad \sum_i x_i^4 = 18,$$

$$\sum_i y_i = 5, \qquad \sum_i x_i y_i = 7, \qquad \sum_i x_i^2 y_i = 11,$$

a dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

b) Řešení soustavy je

$$a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = -\frac{1}{2}.$$

polynom

$$p_2(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2.$$

c)

$$p_2(1) = 1.5$$

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Určete interval maximálního řešení dané úlohy.

b) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte přibližnou hodnotu $X(2)$.

a) rovnice je lineární, dané funkce jsou spojité všude, tedy $I = (-\infty, \infty)$

b) Výpočet Collatz:

$$t_0 = 0, \quad X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h = 1$$

$$\boldsymbol{k}_1 = f(0, X^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X_{pom} = X^{(0)} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{k}_2 = f(0.5, X_{pom}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

B3. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro rovnici v samoadjungovaném tvaru

$$-\left(xy'\right)' + (x+1)y = -2, \quad y(1) = 1, \quad y(3) = 0$$

a) *Zapište podmínky, které jsou postačující pro existenci a jednoznačnost řešení obecné okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.* Postačující podmínky pro ex. a jedn. řešení pro okrajovou úlohu pro rovnici

$$-\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = f(x),$$

jsou

(i) p, p', q, f - spojité na $I = \langle 1, 3\rangle$.

(ii) $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ pro $x \in I$.

V dané úloze $p(x) = x$, (a také $p'(x) = 1$), $q(x) = x + 1$ a $f(x) = -2$ jsou spojité na I. Také $p(x) > 0$ a $q(x) \geq 0$.

b) *Zapište síťové rovnice pro krok $h = 0.2$. Rozhodněte, zda matice této soustavy je ODD.*

Zapíšeme nejprve síťové rovnice pro krok $h = 0.5$ v uzlech $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$ a $x_3 = 2.5$

$$\begin{aligned} -1.25 \cdot 1 + (1.25 + 1.75 + 0.25^2 \cdot 2.5)\, y_1 - 1.75\, y_2 &= -0.5^2 \cdot 2, \\ -1.75\, y_1 + (1.75 + 2.25 + 0.25^2 \cdot 3)\, y_2 - 2.25\, y_3 &= -0.5^2 \cdot 2, \\ -2.25\, y_2 + (2.25 + 2.75 + 0.25^2 \cdot 3.5)\, y_3 - 2.75 \cdot 0 &= -0.5^2 \cdot 2, \end{aligned}$$

kde jsme hodnoty $y_0 = y(1) = 0$ a $y_4 = y(2) = 0$ z okrajových podmínek. Upravíme

$$\begin{aligned} 3.15625\, y_1 - 1.75\, y_2 &= 0.75, \\ -1.75\, y_1 + 4.1875\, y_2 - 2.25\, y_3 &= -0.5, \\ -2.25\, y_2 + 5.21875\, y_3 &= -0.5, \end{aligned}$$

c) Matice soustavy je ODD, Jacobiho metoda je konvergentní.

B4.

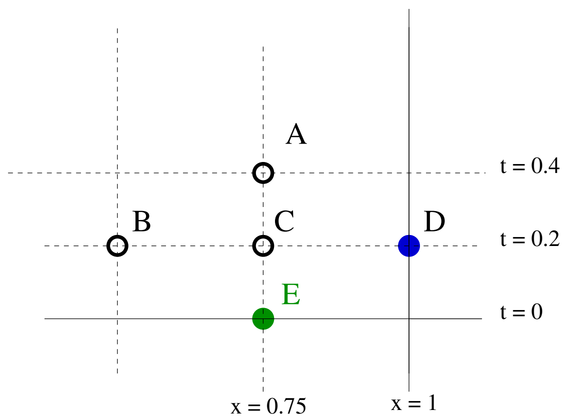
a) *Podmínky souhlasu:*

	Poloha (u),	**Rychlost** (u_t)
Bod $x = 0, t = 0$:	$x\|_{x=0} = t\|_{t=0}$,	$1 - 0 = 1$
Bod $x = 1, t = 0$:	$1 = 1$,	$1 - 1 = 0$

b) *Podmínka stability pro $h = 0.25$ a $\tau = 0.2$:*

$$\sigma^2 = \frac{\tau^2}{h^2} = \frac{0.04}{0.25^2} = 0.64.$$

c) Nakreslíme si obrázek:



Hodnota $U_E = 0.75$ je dána počáteční podmínkou (nultá vrstva) a hodnota $U_D = 1$ je dána okrajovou podmínkou. Hodnoty na první časové vrstvě spočteme (náhrada na 1. časové vrstvě)

$$U_B = 0.5 + 0.2 \cdot (1 - 0.5) = 0.6,$$

$$U_C = 0.75 + 0.2 \cdot (1 - 0.75) = 0.8.$$

Určíme přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.75, 0.4]$.

$$U_A = \sigma^2 U_B + (2 - 2\sigma^2) U_C + \sigma^2 U_D - U_E + \tau^2 f(C),$$

tedy

$$U_A = 0.64 \cdot (0.6) + 0.72 \cdot (0.8) + 0.64 \cdot (1) - (0.75) + 0.2^2 \cdot (2 \cdot 0.75 \cdot 0.2) = 0.862$$