

A1.

- a) Vlastní čísla λ_k matice \mathbf{U}_J se počítají jako kořeny rovnice $\det(L + \lambda D + U) = 0$, neboť jak snadno ověříme platí

$$\det(\mathbf{U}_J - \lambda \mathbf{E}) = \det(-D^{-1}(L + U) - \lambda D^{-1}D) = \det(-D^{-1}) \det((L + U + \lambda D)).$$

Spektrální poloměr pak je největší absolutní hodnota ze všech těchto vlastních čísel, $\rho(\mathbf{U}_J) = \max |\lambda_k|$.

- b) A je ODD pokud buď pro všechna i platí $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} a_{ij}$ nebo pro všechna i platí $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} a_{ji}$.
Daná matice není ODD, neboť v druhém řádku/sloupci požadovaná nerovnost není splněna.
- c) Nejprve rozhodneme, zda je Jacobiova metoda pro danou soustavu rovnic konvergentní. Postačující podmínka vzhledem k b) není splněna, zjistíme tedy, zda je splněna nutná a postačující podmínka: $\rho(\mathbf{U}_J) < 1$. Vlastní čísla matice \mathbf{U}_J počítáme postupem dle a). Tedy

$$\det \begin{pmatrix} 4\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4\lambda \end{pmatrix} = 32\lambda^3 - 4\lambda + 8\lambda = 0$$

Kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, a komplexní $\lambda_{2,3}$ v absolutní hodnotě splňují $|\lambda_{2,3}| = \sqrt{\frac{1}{8}} < 1$, tedy $\rho(\mathbf{U}_J) < 1$. Tedy Jacobiova metoda je konvergentní neboť nutná a postačující podmínka pro její konvergenci je splněna.

Dále si soustavu rovnic přepíšeme ve složkovém zápise z kterého vyjádříme i -tou složku z i -té rovnice. Tedy rovnice

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 0x_3 &= 2 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 &= -2 \\ 0x_1 + x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

upravíme a doplníme čísla iterací:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{4} \left(2 + 2x_2^{(k)} - 0x_3^{(k)} \right), \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2} \left(-2 - 2x_1^{(k)} - 1x_3^{(k)} \right), \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4} \left(1 - 0x_1^{(k)} - 1x_2^{(k)} \right). \end{aligned}$$

Volíme $X^0 = (2, -2, 1)$, dosadíme do předchozích rovnic a spočteme

$$X^1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{3}{4} \right)^T.$$

A2.

a) Ze vztahu daném v zadání vyjádříme $y(x+h)$

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x+h/2) + h\mathcal{O}(h^2),$$

kde použijeme předpoklad, že funkce $y(x)$ je řešení Cauchyovy úlohy, tedy

$$y'(x+h/2) = f(x+h/2, y(x+h/2)),$$

a kam dosadíme za $y(x+h/2)$ dle Taylora rozvoje

$$y(x+h/2) \approx y(x) + \frac{h}{2}y'(x) = y(x) + \frac{h}{2}f(x, y(x)) + \mathcal{O}(h^2).$$

Tedy pro $x = x_n$, $y(x_n) \approx y_n$ a zanedbáním $\mathcal{O}(h^2)$ dostaneme jednokrokovou Collatzovu metodu

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + h/2, y_n + h/2f(x_n, y_n)).$$

b) $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t_0 = 0$, $h = 1$,

$$\mathbf{k}_1 = f(t_0, X^{(0)}) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$X_{pom} = X^{(0)} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k}_2 = AX_{pom} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} + 1\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) Vlastní čísla matice \mathbf{A} získáme jako řešení charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2 + 16 = \lambda^2 + 4\lambda + 20 = 0$$

tedy řešíme kvadratickou rovnici se záporným diskriminantem $D = 16 - 80 = -64$ a dostaneme komplexní kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{64}}{2} = -2 \pm 4i.$$

Reálný fundamentální systém dané ODR pak získáme jako reálnou a imaginární část z

$$e^{(-2+4i)t}\mathbf{V} = e^{-2t}(\cos(4t) + i\sin(4t))\mathbf{V},$$

kde \mathbf{V} je konstantní (komplexní) vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $-2 + 4i$. Vidíme, že řešení závisí na čase pomocí funkcí \sin a \cos s frekvencí $f = 4/(2\pi) = 2/\pi$ a tedy periodou $T = 1/f = \pi/2 \approx 1.57$. Krok $h = 1$ je tedy vzhledem k velikosti periody rozhodně příliš velký.

A3. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\Delta u = 2x + y$$

v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dané jako vnitřek čtyřúhelníku $[0; 0]$, $[2; 0]$, $[0; 1.5]$, $[1.5; 1.5]$. Na hranici oblasti $\partial\Omega$ je daná okrajová podmínka $u(x, y) = x + y$.

a) Dle Taylorova rozvoje máme

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{1}{2} h^2 y''(x_i) + \frac{1}{3!} h^3 y'''(x_i) + \mathcal{O}(h^4),$$

$$y(x_i - h) = y(x_i) - h y'(x_i) + \frac{1}{2} h^2 y''(x_i) - \frac{1}{3!} h^3 y'''(x_i) + \mathcal{O}(h^4),$$

Sečtením obou rovností pro dostáváme vztah

$$y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h) = h^2 y''(x_i) + \mathcal{O}(h^4),$$

z kterého $y''(x_i)$ již vyjádříme.

b)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Dále dle a) dostáváme v bodě $P_{i,j} = [x_i, y_j]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}$$

a obdobně

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_{ij}) \approx \frac{u(x_i, y_j + h) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2},$$

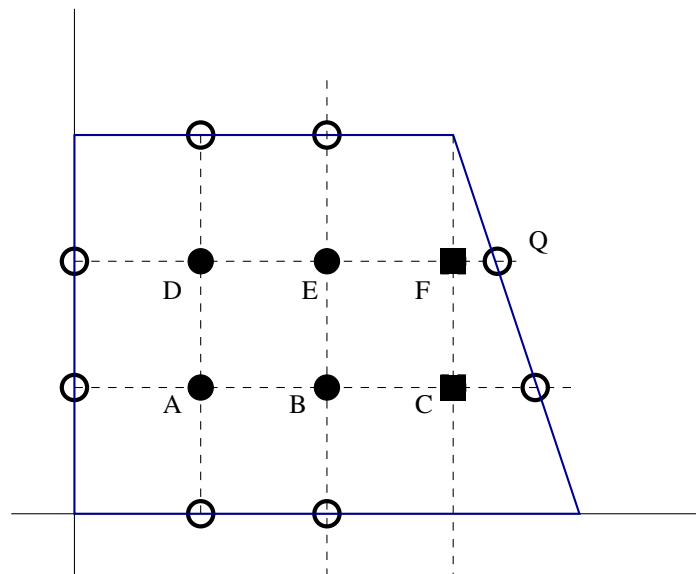
kde U_{ij} jsou hodnoty aproximací řešení $u(P_{i,j})$, tj. $U_{i,j} \approx u(P_{i,j})$. Dosazením těchto vyjádření do vyjádření Δu v regulárním uzlu $P_{i,j}$ dostáváme

$$h^2 \Delta u|_{P_{i,j}} \approx U_{i+1,j} + U_{i,j+1} - 4U_{i,j} + U_{i,j-1} + U_{i-1,j}$$

a tedy náhradu rovnice $-\Delta u = f$ v regulárním uzlu ($f_{i,j} = f(P_{i,j})$)

$$-U_{i+1,j} - U_{i,j+1} + 4U_{i,j} - U_{i,j-1} - U_{i-1,j} = f_{i,j}.$$

c) Nejprve si nakreslíme obrázek:



Sestavíme rovnice na přímce $y = 1$ postupně zleva do prava, v hraničních uzlech rovnou dosazujeme Dirichletovu okrajovou podmínku $(x + y)$, tedy nejprve v regulárních uzlech

$$\begin{aligned} 4U_D - U_E - U_A - (0 + 1) - (0.5 + 1.5) &= 0.5^2 \cdot (2 \cdot 0.5 + 1), \\ 4U_E - U_D - U_F - U_B - (1 + 1.5) &= 0.5^2 \cdot (2 \cdot 1 + 1), \end{aligned}$$

a následně v uzlu F - neregulárním uijeme náhrady $(1 + \delta)U_N - \delta U_R = \varphi(Q)$, kde δ získáme ze souřadnic hraničního uzlu $Q = [1.5 + \frac{1}{3}h; 1]$, tj. $\delta = 1/3$. Tedy

$$(1 + \frac{1}{3})U_F - \frac{1}{3}U_E = (1.5 + \frac{1}{6}) + 1.$$

A4. V oblasti $Q_T = \{[x, t] : x \in (1, 5), t \in (0, T)\}$ je zadána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + 2t, \quad u(x, 0) = 4x, \quad u(1, t) = 4 + 3t, \quad u(5, t) = 2t + 20,$$

a) Uijeme náhrady

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P_i^k) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau) \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}$$

a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) = \frac{u(x_{i-1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i+1}, t_k))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2},$$

kde opět $U_i^k \approx u(P_i^k) = u(x_i, t_k)$. Dosadíme do dané rovnice

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = 0.5 \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + (x_i + 2t_k),$$

kterou vynásobíme τ , označíme $\sigma = 0.5\tau/h^2$ a upravíme:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1 - 2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau(x_i + 2t_k).$$

Podmínka stability je $\sigma \leq \frac{1}{2}$.

b) Nejprve podmínky souhlasu

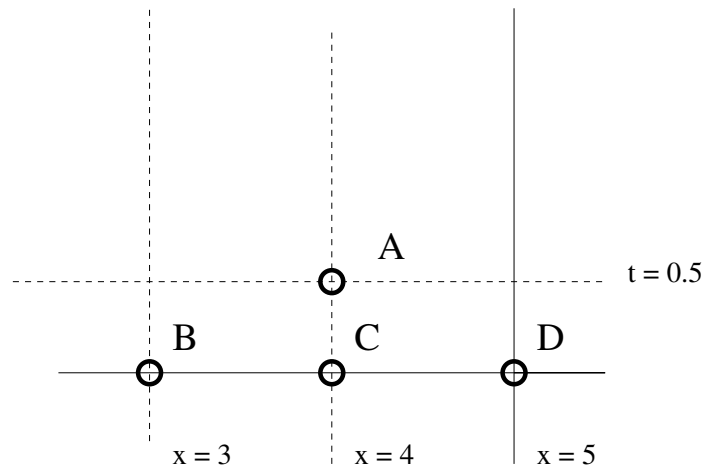
V bodě $x = 1, t = 0$ je podmínka splněna: $4 \cdot 1 = 4 + 3 \cdot 0$,

V bodě $x = 5, t = 0$ je podmínka splněna: $4 \cdot 5 = 2 \cdot 0 + 20$.

Následně ověříme, zda schéma je stabilní pro volbu prostorového kroku $h = 1$ a časového kroku $\tau = 0.5$, tedy

$$\sigma = \frac{0.5 \cdot 0.5}{1^2} = 0.25 \leq \frac{1}{2}$$

c) Nejprve si nakreslíme obrázek:



Pro $h = 1$ a $\tau = 0.5$ je $\sigma = 0.25$, tedy počítáme

$$U_A = 0.25U_B + 0.5U_C + 0.25U_D + 0.5 \cdot (4 + 0),$$

kde hodnoty U_B , U_C , U_D jsou hodnoty na nulté časové vrstvě, tj. jsou dány počáteční podmínkou $(4x)$.

$$U_B = 4 \cdot 3 = 12, \quad U_C = 4 \cdot 4 = 16, \quad U_D = 4 \cdot 5 = 10.$$

Tedy hodnota U_A

$$U_A = 8 + 8 + 0.5 \cdot (4 + 0) = 18.$$

B1.

- a) Matice je ostře diagonálně dominantní (pro řádky ne, neboť v druhém řádku neplatí $2 > |-1| + |-2|$).

Ve sloupcích ano:

$$\begin{array}{ll} 1. \text{ sloupec} & 5 > 1 + |-2| \\ 2. \text{ sloupec} & 3 > 1 + |-1| \\ 3. \text{ sloupec} & 2 > 0 + 1 \end{array}$$

- b) Matice není symetrická, pozitivní definitnost již nevyšetřujeme. Matice **není** symetrická a (zároveň) pozitivně definitní.

NAVÍC POZOR: v případě nesymetrické matice není možné ověřovat pozitivní definitnost výpočtem subdeterminantů (hlavních minorů), tento postup (Sylvestrovo kritérium) je použitelný **jen pro symetrické matice!**

- c) Gauss-Seidelova metoda je konvergentní, neboť dle a) je matice ODD.

Iterace počítáme dle

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{5} (2 - 1 \cdot x_2^k - 1 \cdot x_3^k) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{3} (1 - 1 \cdot x_1^{k+1} - 0 \cdot x_3^k) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{2} (-1 + 2 \cdot x_1^k + 1 \cdot x_2^k) \end{aligned}$$

Tedy z počáteční iterace $X^{(0)} = B$ dostaneme iteraci $X^{(1)}$

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \rightarrow \quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

B2.

- a) rovnice je lineární, dané funkce jsou spojité všude, tedy $I = (-\infty, \infty)$

- b) Výpočet Collatz:

$$t_0 = 0, \quad X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h = 1$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

neboť

$$\mathbf{k}_2 = f(t_0 + h/2, X_{pom}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \\ 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{pom} = X^{(0)} + \frac{h}{2} \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

B3.

a) Nejprve podmínky souhlasu

V bodě $x = -1$, $t = 0$ je podmínka splněna: $2 \cdot (-1) + 2 = 0$,

V bodě $x = 1$, $t = 0$ je podmínka splněna: $2 \cdot 1 + 2 = 4 - 0$.

b) Explicitní schéma je dáno vzorcem:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1 - 2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k$$

Podmínka stability

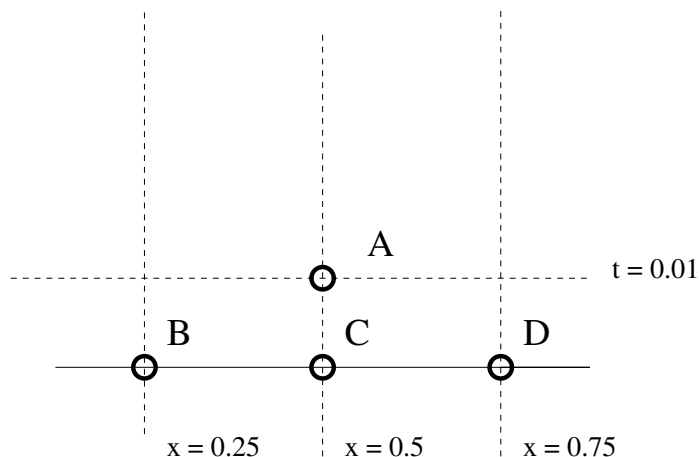
$$\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2},$$

v našem případě

$$\sigma = \frac{2 \cdot 0.01}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16 \cdot 0.02 = 0.32 \leq \frac{1}{2}.$$

Tedy explicitní schéma je stabilní.

c) Nejprve si nakreslíme obrázek:



Hodnotu v bodě A počítáme dle vzorce

$$U_A = 0.32(U_B + U_D) + 0.36U_C + 0.01f(C),$$

kde hodnoty v bodech B , C , D nulté časové vrstvy jsou dány počáteční podmínkou $(2x + 2)$, tedy

$$U_B = 2 \cdot 0.25 + 2 = 2.5,$$

$$U_C = 2 \cdot 0.5 + 2 = 3,$$

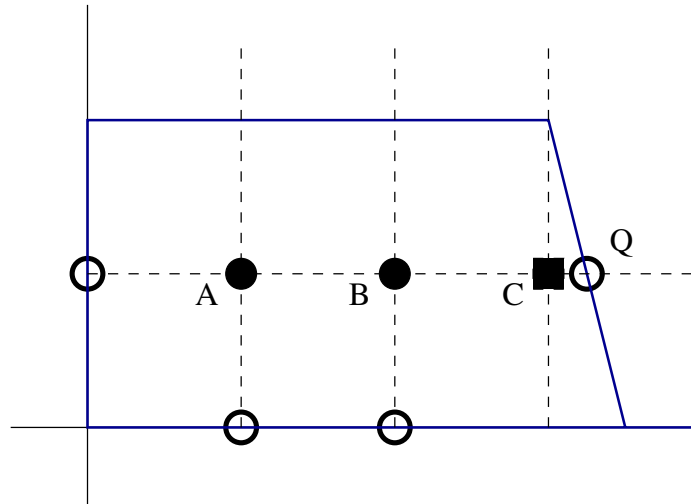
$$U_D = 2 \cdot 0.75 + 2 = 3.5.$$

Dosazením dostáváme

$$U_A = 0.32(2.5 + 3.5) + 0.36 \cdot 3 + 0.01 \cdot 4 \cdot 0.5 = 1.92 + 1.08 + 0.02 = 3.02.$$

B4.

a) Nejprve si nakreslíme obrázek:



regulární:	$A = [1, 1], \quad B = [2, 1],$
neregulární:	$C = [3, 1],$
hraniční:	$Q = [3.25, 1], P = [0, 1]$

b) Nejprve sestavíme rovnice v regulárních uzlech (okrajová podmínka $2 - x$, pravá strana $2x + y$)

$$\begin{aligned} 4U_A - U_B - (2 - 0) - (2 - 1) - (2 - 1) &= 1^2(2 \cdot 1 + 1), \\ 4U_B - U_A - U_C - (2 - 2) - (2 - 2) &= 1^2(2 \cdot 2 + 1), \end{aligned}$$

a dále pak v uzlech neregulárních

$$1.25U_C - 0.25U_B = (2 - 3.25).$$