Numerická matematika A – 4.6.2015

A1. Je dána soustava rovnic $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$, kde

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -0.7 & 0 & 0.2 \\ -0.5 & 0.4 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.45 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Označme $\rho(\boldsymbol{A})$ spektrální poloměr matice a $\|\boldsymbol{A}\|$ nějakou normu matice. Ukažte, že pro libovolnou matici $\boldsymbol{A}$ platí vztah $\|\boldsymbol{A}\| \geq \rho(\boldsymbol{A})$.

b) Rozhodněte, zda je prostá iterační metoda pro danou soustavu konvergentní. V kladném případě určete $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)}$ při volbě $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

c) Užitím vzorce

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\| \leq \frac{\|\boldsymbol{U}\|^k}{1 - \|\boldsymbol{U}\|}\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|,$$

odhadněte chybu $\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(2)}\|$, kde $\boldsymbol{x}^*$ je přesné řešení soustavy.

A2. Je dána Cauchyova úloha pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1 - y_2^2 \\ y_1^2 - 2y_2 + 5x \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

a) Zapište vzorec pro výpočet hodnoty aproximace y_{n+1} v uzlu x_{n+1} Collatzovou metodou při řešení Cauchovy úlohy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Ukažte, že Collatzova metoda je speciálním případem jednokrokové metody a uveďte jaký tvar má v tomto případě přírůstková funkce $\Phi(x, y, h)$.

b) Označme y_n hodnoty aproximací přesného řešení $y(x)$ Cauchyovy úlohy z a) v uzlech x_n získané obecnou jednokrokovou metodou. Užitím tohoto označení zapište vztah pro přesný relativní přírůstek $\Delta(x, y(x), h)$, lokální relativní aproximační chybu δ_{n+1} v uzlu x_{n+1} a akumulovanou diskretizační (globální) chybu e_n této metody.

c) Volte $h = 0.4$ a určete hodnotu aproximace řešení $Y(0.4)$ užitím Collatzovy metody.

A3. Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4,$$

s počátečními a okrajovými podmínkami $u(x, 0) = x^2$ pro $x \in \langle 0; 1\rangle$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 1$ pro $t \geq 0$.

a) Zapište podmínky souhlasu a ověřte, zda jsou splněny.

b) Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě $P_i^k = [x_i, t_k]$ při řešení rovnice vedení tepla explicitním schématem.

c) Volte časový krok 0.01, prostorový krok 0.25 a určete hodnotu řešení v bodě $A = [0.75; 0.02]$ metodou sítí užitím explicitního schematu.

A4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\nabla \cdot (\nabla u) = y$$

v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dané jako vnitřek čtyřúhelníku $[0; 0]$, $[2; 0]$, $[0; 1.5]$, $[1.5; 1.5]$. Na hranici oblasti $\partial\Omega$ je daná okrajová podmínka $u(x, y) = xy$.

a) Pomocí parciálních derivací rozepište symbol nabla (∇). Užitím tohoto zápisu rozepište levou stranu rovnice tj. $-\nabla \cdot (\nabla u)$ pomocí druhých parciálních derivací.

b) Odvoďte náhradu v neregulárním uzlu pomocí lineární interpolace.

c) Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby bod $[0, 0]$ byl uzlem sítě. Sestavte síťové rovnice.

Numerická matematika B – 4.6. 2015

B1. Pro soustavu nelineárních rovnic

$$1 - y(1+x) = 0, \qquad x^2 + y - 1 = 0$$

a) Z grafu určete přibližnou polohu všech řešení soustavy,

b) Zvolte počáteční aproximaci $X^{(0)} = (-1, 1)^T$ a určete $X^{(1)}$ Newtonovou iterační metodou.

B2. Je dána Cauchyova úloha $\dot{X} = AX,\ X(0) = X_0$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix},\ X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

a) Určete spektrální poloměr matice A!

b) Volte krok $h = 0.1$ a spočtěte přibližnou hodnotu řešení v bodě $t = 0.1$ Eulerovou metodou.

c) Volte krok $h = 0.1$ a spočtěte přibližnou hodnotu řešení v bodě $t = 0.1$ Collatzovou metodou

B3. V oblasti $Q_T = \{[x,t] : x \in (0,1),\ t > 0\}$ je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x,$$

$$u(x,0) = x(x-1),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - x^2,\ u(0,t) = \sin(t),\ u(1,t) = 0.$$

a) Ověřte, zda pro danou úlohu jsou splněny podmínky souhlasu. Tyto podmínky uveďte.

b) Zapište podmínku stability explicitního schématu a ověřte, zda pro $h = 0.2$ a $\tau = 0.1$ je splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.8, 0.2]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána Dirichletova okrajová úloha v pro rovnici 2. řádu v samoadjungovaném tvaru

$$-\left(x^2 y'\right)' + (x+1)y = -x^3 \qquad y(1) = 0, \quad y(5) = 0.$$

a) Zapište jaké podmínky jsou postačující pro existenci a jednoznačnost řešení obecné okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.

b) Zapište síťové rovnice pro danou úlohu a krok $h = 1$. Rozhodněte, zda matice této soustavy je ostře diagonálně dominantní.