Numerická matematika A – 4.6.2015

A1. Zabývejme se prostou iterační metodou (PIM) pro soustavu rovnic $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$, kde

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -0.7 & 0 & 0.2 \\ -0.5 & 0.4 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.45 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Spektrální poloměr matice je roven absolutní hodnotě nějakého vlastního čísla λ, tj.

$$\rho(\boldsymbol{A}) = |\lambda|.$$

Vezmeme nyní vlastní vektor $\boldsymbol{v}$ příslušný tomuto λ, tj. dle definice

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

Spočteme normu pravé strany

$$\|\lambda\boldsymbol{v}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{v}\|,$$

a následně normu levé strany nerovnice (zde použijeme vztah mezi normou matice a vektorovou normou)

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{v}\|.$$

Dostáváme tedy vztah

$$|\lambda|\|\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{v}\|.$$

Vlastní číslo λ jsme volili tak, aby $|\lambda| = \rho(\boldsymbol{A})$, a $\boldsymbol{v}$ je příslušný vlastní vektor, tedy $\|\boldsymbol{v}\| > 0$. Tedy skutečně platí $\rho(\boldsymbol{A}) \leq \|\boldsymbol{A}\|$.

b) Postačující podmínka pro konvergenci prosté iterační metody je $\|\boldsymbol{U}\| < 1$ pro nějakou normu. Zde spočteme např. řádkovou normu (ostatní normy nejsou menší než jedna)

$$\|\boldsymbol{U}\|_\infty = \max\{0.9, 0.9, 0.95\} = 0.95.$$

kde jednotlivé čísla jsou součty v absolutních hodnot v prvním, druhém respektive třetím řádku. Vidíme, že řádková norma matice je menší než jedna ($\|\boldsymbol{U}\|_\infty < 1$) a že tedy je PIM konvergentní.

Konvergenci je také možné ověřit pomocí nutné a postačující podmínky, tj. pomocí spektrálního poloměru matice $\boldsymbol{U}$. (**Zde to ale není třeba!**) V tomto případě se nejdříve spočte charakteristický polynom, tj.

$$\begin{vmatrix} -0.7-\lambda & 0 & 0.2 \\ -0.5 & 0.4-\lambda & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.45-\lambda \end{vmatrix} = (0.4-\lambda)\left((\lambda+0.7)(\lambda+0.45)+0.1\right) = (0.4-\lambda)\left(\lambda^2+1.15\lambda+0.415\right),$$

a hledáme jeho kořeny: $\lambda_1 = 0.4$, další dva jsou komplexní (diskriminant $D = -0.3375$)

$$\lambda_{2,3} = \frac{-1.15 \pm i\sqrt{0.3375}}{2} = -0.575 \pm i\sqrt{0.084375},$$

tedy jejich absolutní hodnota na druhou

$$|\lambda_{2,3}|^2 = (0.575)^2 + 0.084375 = 0.415 < 1.$$

Dále vypočteme iterace, nejprve $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$, tedy

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = U\boldsymbol{x}^{(0)} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a dále

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = U\boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -0.7 & 0 & 0.2 \\ -0.5 & 0.4 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1.3 \\ -2.05 \end{pmatrix}.$$

c) V části b) jsme viděli, že jediná maticová norma použitelná v daném odhadu je norma řádková (ostatní nejsou menší než jedna). Budeme tedy počítat také s řádkovou vektorovou normou. Dosadíme do vztahu a dostaneme

$$\|\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \le \frac{0.95^2}{0.05}\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty = 18.05 \cdot 3 = 54.15.$$

A2. Je dána Cauchyova úloha pro soustavu ODR

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1 - y_2^2 \\ y_1^2 - 2y_2 + 5x \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

a) Vzorec pro Collatzovu metodu je dán jako

$$y_{n+1} = y_n + h\boldsymbol{k}_2,$$

kde

$$\boldsymbol{k}_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1), \qquad \boldsymbol{k}_1 = f(x_n, y_n).$$

Obecná jednokroková metoda

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h).$$

Volbou přírůstkové funkce

$$\Phi(x_n, y_n, h) = f(x_n + h/2, y_n + h/2 f(x_n, y_n)).$$

dostáváme Collatzovu metodu. Vidíme tedy, že Collatzova metoda je speciálním případem jednokrokové metody.

b) Označme $y(x)$ přesné řešení Cauchyovy úlohy. Přesný relativní přírůstek $\Delta(x, y, h)$ je definován vztahem

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\Delta(x_n, y(x_n), h)$$

Lokální relativní aproximační chyba je pak rozdíl přírůstkové funkce a přesného relativního přírůstku, tedy

$$\delta_n = \Delta(x_n, y(x_n), h) - \Phi(x_n, y(x_n), h),$$

tj. vidíme, že pak platí

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\Phi(x_n, y(x_n), h) + h\delta_n$$

Akumulovaná diskretizační chyba (globální) chyba je rozdíl přibližného a přesného řešení

$$e_n = y_n - y(x_n).$$

Pozor: Akumulovaná diskretizační (globální) chyba není (jen) součtem lokálních diskretizačních chyb !!!

c) Volte $h = 0.4$ a určete hodnotu aproximace řešení $Y(0.4)$ užitím Collatzovy metody. Pro danou rovnici $Y' = f(x, Y)$ je tedy

$$f(x,Y) = \begin{pmatrix} y_1 - y_2^2 \\ y_1^2 - 2y_2 + 5x \end{pmatrix}.$$

Krok volíme jako $h = 0.4$, počáteční podmínka

$$x_0 = 0, \qquad Y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Počítáme Collatzovou metodou

$$\boldsymbol{k}_1 = f(x_0, Y^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 - 1^2 \\ 1^2 - 2 + 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dále

$$Y_{pom} = Y^{(0)} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

a

$$\boldsymbol{k}_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}, Y_{pom}) = \begin{pmatrix} 1 - 0.8^2 \\ 1^2 - 1.6 + 5 \cdot 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

Aproximace řešení v bodě $x = 0.4$ tedy $Y(0.4)$ je pak dána

$$Y^{(1)} = Y^{(0)} + h\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.4 \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.144 \\ 1.16 \end{pmatrix}.$$

A3. Je dána smíšená úloha $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4$, s počáteční podmínkou $u(x,0) = x^2$ pro $x \in \langle 0; 1 \rangle$, a okrajovými podmínkami

$$u(0,t) = 0 \qquad\qquad u(1,t) = 1 \qquad \text{pro } t \geq 0$$

a) Podmínky souhlasu vysvětlíme např. takto: V bodech, které leží v nulté časové vrstvě ($t = 0$) a zároveň na okraji intervalu (zde $x = 0$ a $x = 1$), máme předepsánu jak okrajovou tak počáteční podmínku. Tyto podmínky by se měly shodovat, aby úloha byla korekrně formulovaná (a vůbec připouštěla řešitelnost).

$$\text{V bodě x = 0, t = 0 je podmínka splněna:} \quad 0 = 0^2,$$

$$\text{V bodě x = 0, t = 0 je podmínka splněna:} \quad 1 = 1^2.$$

b) *Zapište jak se nahradí derivace* $\frac{\partial u}{\partial t}$ *a* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *v bodě* P_i^{k+1} *při řešení rovnice vedení tepla explicitním schématem:*

Užijeme náhrady

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P_i^k) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau) \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}$$

a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) = \frac{u(x_{i-1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i+1}, t_k)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2},$$

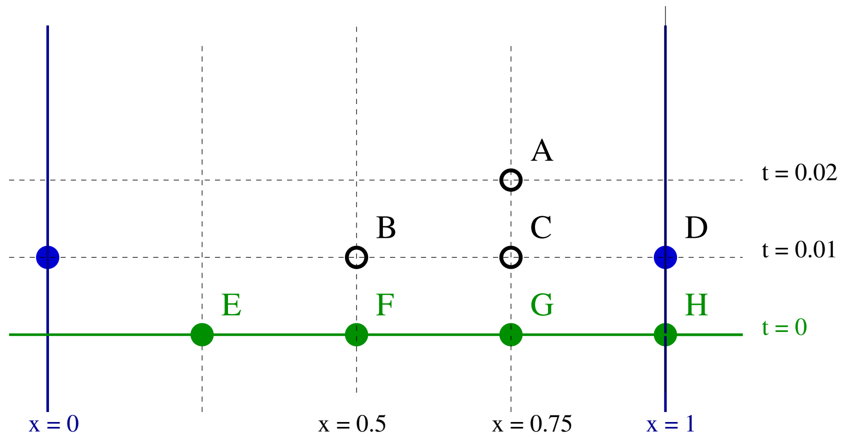
kde $U_i^k \approx u(P_i^k) = u(x_i, t_k)$.

c) *Volte časový krok* 0.01*, prostorový krok* 0.25 *a určete hodnotu řešení v bodě* $A = [0.75; 0.02]$ *metodou sítí užitím explicitního schematu.*

Pro danou volbu spočteme nejprve hodnotu σ, tedy

$$\sigma = \frac{2\tau}{h^2} = \frac{2 \cdot 0.01}{0.25^2} = 0.32 \le \frac{1}{2},$$

(podmínka stability je splněna). Načrtneme si obrázek sítě:



Hodnotu v bodě A pak spočteme dle explicitního schematu

$$U_A = \sigma U_B + (1 - 2\sigma)U_C + \sigma U_D + 0.01 f(C).$$

Hodnoty U_B, U_C jsou hodnoty aproximací v bodech na první časové vrstvě a $U_D = 1$ je hodnota daná okrajovou podmínkou. Spočteme tedy nejprve hodnoty na 1. časové vrstvě:

$$\begin{aligned} U_B &= 0.32(0.25^2) + 0.36(0.5^2) + 0.32(0.75^2) + 0.01 \cdot f(0.5, 0) = 0.25, \\ U_C &= 0.32(0.5^2) + 0.36(0.75^2) + 0.32(1) + 0.01 \cdot f(0.75, 0) = 0.5625, \end{aligned}$$

kde jsme rovnou dosadili příslušné hodnoty z nulté časové vrstvy v bodech E, F, G, H. Dopočteme hodnotu aproximace v bodě A

$$U_A = 0.32(0.25) + 0.36(0.5625) + 0.32(1) - 0.04 = 0.5625$$

A4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\nabla \cdot (\nabla u) = y$$

v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dané jako vnitřek čtyřúhelníku $[0; 0]$, $[2; 0]$, $[0; 1.5]$, $[1.5; 1.5]$. Na hranici oblasti $\partial\Omega$ je daná okrajová podmínka $u(x, y) = xy$.

a) *Uveďte, o jaký typ rovnice se jedná a pomocí parciálních derivací rozepište symbol* ∇*. Užitím tohoto zápisu rozepište levou stranu rovnice tj.* $-\nabla \cdot (\nabla u)$ *pomocí druhých parciálních derivací.*
Symbol nabla (∇) je diferenciálním operátorem který je (ve 2D) dán jako

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Počítáme-li tedy formální skalární součin dostaneme

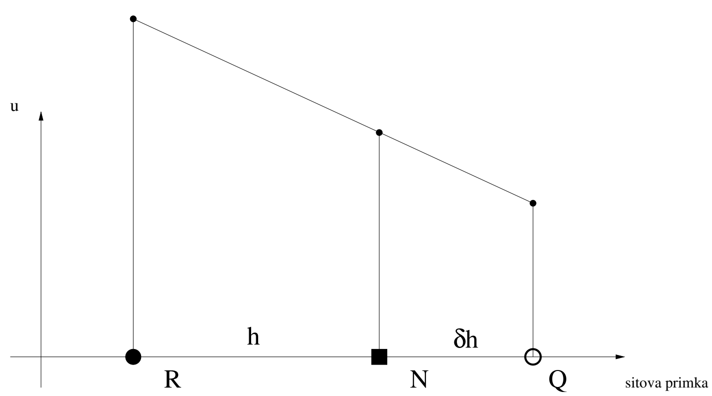
$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

což je Laplaceův operátor. Tedy máme

$$\nabla \cdot \nabla u = \triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

b) *Vysvětlete pojem neregulární uzel a odvoďte náhradu v neregulárním uzlu pomocí lineární interpolace.* Regulární uzel je takový, jehož spojnice se všemi sousedy leží v $\overline{\Omega}$, hraniční uzel je uzel na $\partial\Omega$. Neregulární uzel je takový uzel, který není regulární ani hraniční, viz obrázek sítě.

Nebo také je to takový uzel, jehož některý soused není již v oblasti Ω ani na její hranici (přesněji: spojnice). Nejprve si nakreslíme schema pro neregulární uzel a sousední regulární uzel



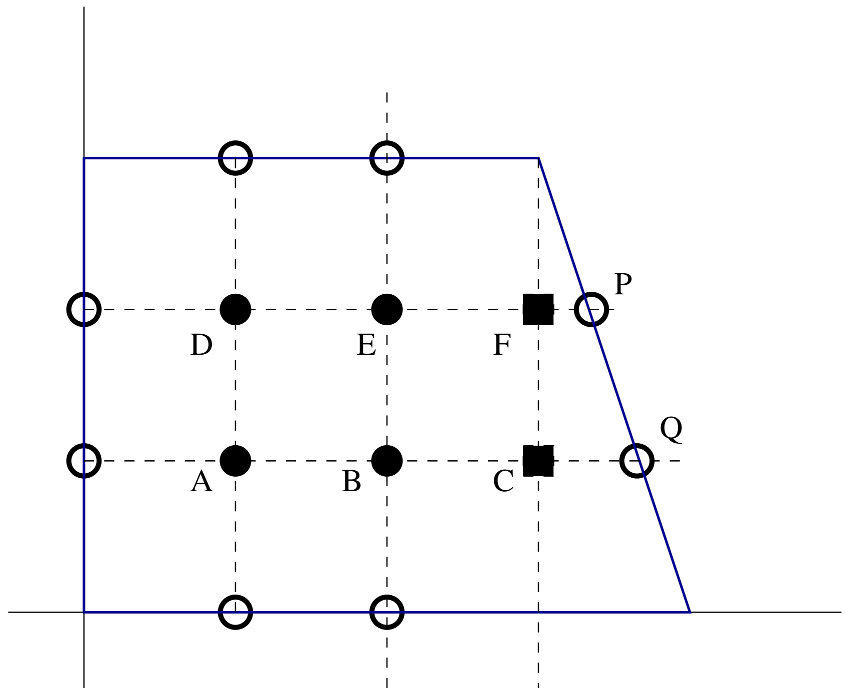
následně pak z podobnosti trojúhelníků dostaneme

$$\frac{U_N - U_R}{h} = \frac{\varphi(Q) - U_R}{(1+\delta)h},$$

a tedy po úpravě

$$\varphi(Q) = (1+\delta)U_N - \delta U_R.$$

d) *Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby bod $[0, 0]$ byl uzlem sítě. Sestavte síťové rovnice.*



Rovnice v regulárních uzlech

$$\begin{aligned}
4U_A - U_B - U_D - (0 \cdot 0.5) - (0.5 \cdot 0) &= 0.5^2 \cdot 0.5, \\
4U_B - U_A - U_C - U_E - (1 \cdot 0) &= 0.5^2 \cdot 0.5, \\
4U_D - U_A - U_E - (0 \cdot 1) - (0.5 \cdot 1.5) &= 0.5^2 \cdot 1, \\
4U_E - U_D - U_B - U_F - (1 \cdot 1.5) &= 0.5^2 \cdot 1,
\end{aligned}$$

a pak v uzlech neregulárních

$$\begin{aligned}
(1 + \frac{2}{3})U_C - \frac{2}{3}U_B &= (0.5 \cdot (1.5 + \frac{2}{3} \cdot 0.5)), \\
(1 + \frac{1}{3})U_F - \frac{1}{3}U_E &= (1 \cdot (1.5 + \frac{1}{3} \cdot 0.5)),
\end{aligned}$$

Numerická matematika B – 4.6. 2015

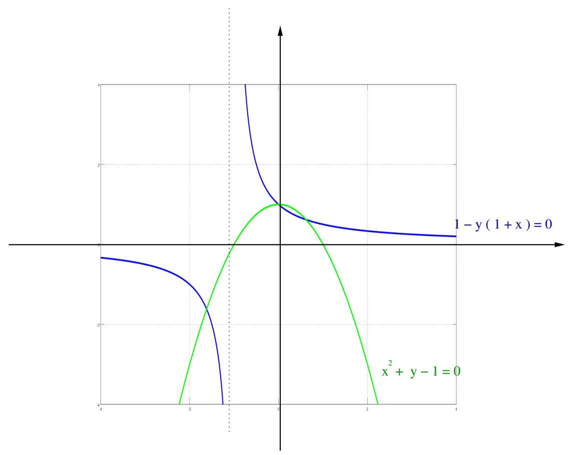
B1. Dána soustava nelineárních rovnic

$$1 - y(1+x) = 0, \qquad x^2 + y - 1 = 0$$

a) Určíme z grafu přibližnou polohu všech řešení soustavy, nejprve si ale rovnice upravíme (vyjádříme y),

$$y = \frac{1}{1+x}, \qquad y = 1 - x^2$$

Nakreslíme graf



b) *Zvolte počáteční aproximaci* $X^{(0)} = (0,0)^T$ *a určete* $X^{(1)}$ *Newtonovou metodou.* Vidíme, že funkce

$$f(x,y) = 1 - y(1+x), \qquad g(x,y) = x^2 + y - 1 = 0$$

mají parciální derivace

$$f_x = -y, \quad f_y = -(1+x), \qquad g_x = 2x, \quad g_y = 1.$$

Dosadíme $X^{(0)} = (-1,1)^T$ a sestavíme soustavu rovnic pro přírůstky

$$\begin{aligned} f_x(X^{(0)})\Delta_x + f_y(X^{(0)})\Delta_y &= -f(X^{(0)}), \\ g_x(X^{(0)})\Delta_x + g_y(X^{(0)})\Delta_y &= -g(X^{(0)}), \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} -1\Delta_x + 0\Delta_y &= -\left(1 - (-1)\cdot 0\right), \\ -2\Delta_x + 1\Delta_y &= -\left((-1)^2 + 1 - 1\right). \end{aligned}$$

Najdeme řešení $\Delta_y = 1$, $\Delta_x = 1$ a spočteme nové přiblížení

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

B2. Řešme Cauchyovu úlohu $\dot{X} = \boldsymbol{A}X, \ X(0) = X_0$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \ X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

a) Určíme vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1).$$

Spektrální poloměr matice $\boldsymbol{A}$ je $\rho(\boldsymbol{A}) = 3$.

b) *Volíme krok $h = 0.1$ a spočteme přibližnou hodnotu řešení v bodě $t = 0.1$ Eulerovou metodou*

$$X^{(1)} = X^{(0)} + 0.1\boldsymbol{A}X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 4.4 \end{pmatrix}$$

c) $h = 0.1,$ *Collatzova metoda* : $t_0 = 0,\ h = 0.1,\ X^{(0)} = (0,4)^T$. Hodnotu $\boldsymbol{k}_1$ již máme (viz b)) nebo znovu spočteme

$$\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$X_{pom} = X^{(0)} + 0.05\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 4.2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.2 \\ 4.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} + 0.1\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} -4.4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.44 \\ 4.5 \end{pmatrix}.$$

B3.

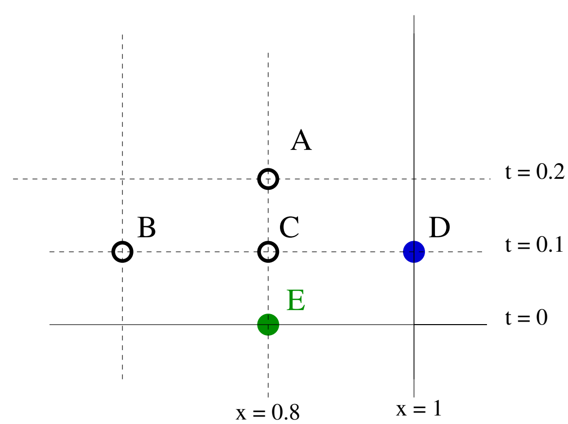
a) *Podmínky souhlasu:*

	Poloha (u),	**Rychlost** (u_t)
Bod $x = 0, t = 0$:	$0 \cdot (0-1) = \sin(0),$	$1 - 0^2 = \cos(0)$
Bod $x = 1, t = 0$:	$1 \cdot (1-1) = 0,$	$1 - 1^2 = 0$

b) *Podmínka stability pro $h = 0.2$ a $\tau = 0.1$:*

$$\sigma^2 = \frac{4\tau^2}{h^2} = \frac{4 \cdot 0.01}{0.04} = 1 \leq 1.$$

c) Nakreslíme si obrázek:



Hodnota $U_E = -0.8 \cdot 0.2 = -0.16$ je dána počáteční podmínkou (nultá vrstva) a hodnota $U_D = 0$ je dána okrajovou podmínkou. Hodnoty na první časové vrstvě spočteme (náhrada na 1. časové vrstvě)

$$U_B = -0.6 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot (1 - 0.6^2) = -0.24 + 0.064 = -0.176.$$

$$U_C = -0.8 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot (1 - 0.8^2) = -0.16 + 0.036 = -0.124.$$

Určíme přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.8, 0.2]$.

$$U_A = \sigma^2 U_B + (2 - 2\sigma^2) U_C + \sigma^2 U_D - U_E + \tau^2 f(C),$$

tedy

$$U_A = 1 \cdot (-0.176) + 0 \cdot (-0.124) + 1 \cdot (0) - (-0.16) + 0.01 \cdot (2 \cdot 0.8) = 0.$$

B4.

$$-\left(x^2 y'\right)' + (x+1)y = -x^3 \qquad y(1) = 0, y(5) = 0.$$

a) Postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení jsou:

Podmínka I. Funkce p, p', q, f jsou spojité, tj. $p, p', q, f \in \mathcal{C}(\langle 1, 5 \rangle)$.

Podmínka II. Funkce $p(x) > 0, q(x) \geq 0$ v intervalu $\langle 1, 5 \rangle$.

Pro danou úlohu máme $p(x) = x^2$, $q(x) = x + 1$, a $f(x) = -x^3$. Vidíme, že podmínky I. a II. jsou splněny, existuje tedy právě jedno řešení dané úlohy.

b) Rovnice zapíšeme v uzlech $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, dle vzorce tedy máme

$$\begin{aligned}
-2.25 \cdot \underbrace{0}_{y_0} + (2.25 + 6.25 + 1^2(2+1)) y_1 - 6.25 y_2 &= -2^3, \\
-6.25 y_1 + (6.25 + 12.25 + 1^2(3+1)) y_2 - 12.25 y_3 &= -3^3, \\
-12.25 y_2 + (12.25 + 20.25 + 1^2(4+1)) y_3 - 20.25 \cdot \underbrace{0}_{y_4} &= -4^3.
\end{aligned}$$

Hodnoty $y_0 = 0$ a $y_4 = 0$ jsou dány okrajovou podmínkou. Dosadíme a dostáváme v maticovém zápise

$$\begin{pmatrix} 11.5 & -6.25 & 0 \\ -6.25 & 22.5 & -12.25 \\ 0 & -12.25 & 37.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -27 \\ -64 \end{pmatrix}.$$

Snadno ukážeme, že matice této soustavy je ODD (např. v řádcích), tj.

$$11.5 > 6.25, \qquad 22.5 > 12.25 + 6.25, \qquad 37.5 > 12.25.$$