

## VARIANTA A 15.5.2012

1. Je dána soustava nelineárních rovnic  $y^2 = 4 - x$ ,  $y = \ln(x - 2)$ 
  - (a) Určete graficky přibližnou polohu a počet všech kořenů soustavy. [7b]
  - (b) Odvoďte vztahy pro řešení soustavy dvou nelineárních rovnic  $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$  Newtonovou metodou. [8b]
  - (c) Volte  $X^{(0)} = (3; 0)^T$  a vypočítejte  $X^{(1)}$  Newtonovou metodou. [10b]
2. Je dána Cauchyho úloha

$$y''' - \frac{x}{y} = \frac{2}{x+1} \quad y(3) = 2, \quad y'(3) = 4, \quad y''(3) = 1$$

- (a) Zapište oblast existence a jednoznačnosti dané CÚ. [5b]
  - (b) Užitím Collatzovy metody s krokem  $h = -2$  spočítejte  $y''(1)$ . [10b]
  - (c) Necht'  $y_i$  označuje hodnotu numerického řešení v bodě  $x_i$  a  $y_i^*$  hodnotu přesného řešení. Zapište pomocí těchto hodnot globální chybu  $\varepsilon_i$ . Definujte řád metody. Odhadněte, jak se změní globální chyba v daném bodě při změně kroku z  $h$  na  $h/3$  u této metody? [10b]
3. Dána Dirichletova úloha  $\Delta u = xy$ , čtyřúhelníku s vrcholy  $[0;0], [0;3], [-2;3], [-3;0]$ ,  $u(x, y) = x + y$  na hranici oblasti.
    - (a) Sestavte síťové rovnice, které dostanete při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem  $h = 1$ . V neregulárních uzlech užíjte lineární interpolaci. [11b]
    - (b) Ukažte, že při vhodném pořadí rovnic lze výslednou soustavu řešit Jacobiho metodou. Zvolte  $X^{(0)} = 0$  a spočítejte  $X^{(1)}$  danou metodou. [7b]
    - (c) Dokažte, že pro  $u \in C^4$  je druhá centrální diference náhradou  $u''$  druhého řádu přesnosti. [7b]

4. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8tx,$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) = x & \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2x & \text{ pro } x \in \langle 0, 3 \rangle, \\ u(0, t) = 0, & \quad u(3, t) = 3 + 6t & \text{ pro } t \in \langle 0, 10 \rangle. \end{aligned}$$

- (a) Ověřte splnění podmínek souhlasu. [5b]
- (b) Odvoďte schéma pro náhradu hodnot na první časové vrstvě s přesností  $o(\tau^2)$ . [8b]
- (c) Volte krok  $h = 1$  a  $\tau = 0.5$ . Spočítejte hodnoty řešení na časové vrstvě  $t = 1$  explicitním schematem. Na první časové vrstvě použijte náhradu s přesností  $o(\tau^2)$ . [12b]

Počet bodů je orientační!!!

## VARIANTA A 15.5.2012

1. Je dána soustava nelineárních rovnic  $y^2 = 4 - x$ ,  $y = \ln(x - 2)$ 
  - (a) Určete graficky přibližnou polohu a počet všech kořenů soustavy. [7b]
  - (b) Odvoďte vztahy pro řešení soustavy dvou nelineárních rovnic  $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$  Newtonovou metodou. [8b]
  - (c) Volte  $X^{(0)} = (3; 0)^T$  a vypočtěte  $X^{(1)}$  Newtonovou metodou. [10b]
2. Je dána Cauchyho úloha

$$y''' - \frac{x}{y} = \frac{2}{x+1} \quad y(3) = 2, \quad y'(3) = 4, \quad y''(3) = 1$$

- (a) Zapište oblast existence a jednoznačnosti dané CÚ. [5b]
  - (b) Užitím Collatzovy metody s krokem  $h = -2$  spočítejte  $y''(1)$ . [10b]
  - (c) Necht'  $y_i$  označuje hodnotu numerického řešení v bodě  $x_i$  a  $y_i^*$  hodnotu přesného řešení. Zapište pomocí těchto hodnot globální chybu  $\varepsilon_i$ . Definujte řád metody. Odhadněte, jak se změní globální chyba v daném bodě při změně kroku z  $h$  na  $h/3$  u této metody? [10b]
3. Dána Dirichletova úloha  $\Delta u = xy$ , čtyřúhelníku s vrcholy  $[0;0], [0;3], [-2;3], [-3;0]$ ,  $u(x, y) = x + y$  na hranici oblasti.
    - (a) Sestavte síťové rovnice, které dostanete při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem  $h = 1$ . V neregulárních uzlech užíjte lineární interpolaci. [11b]
    - (b) Ukažte, že při vhodném očíslování uzlů lze výslednou soustavu řešit Jacobiho metodou. Zvolte  $X^{(0)} = 0$  a spočítejte  $X^{(1)}$  danou metodou. [7b]
    - (c) Dokažte, že pro  $u \in C^4$  je druhá centrální diference náhradou  $u''$  druhého řádu přesnosti. [7b]

4. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8tx,$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) = x & \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2x & \text{ pro } x \in \langle 0, 3 \rangle, \\ u(0, t) = 0, & \quad u(3, t) = 3 + 6t & \text{ pro } t \in \langle 0, 10 \rangle. \end{aligned}$$

- (a) Ověřte splnění podmínek souhlasu. [5b]
- (b) Odvoďte schéma pro náhradu hodnot na první časové vrstvě s přesností  $o(\tau^2)$ . [8b]
- (c) Volte krok  $h = 1$  a  $\tau = 0.5$ . Spočítejte hodnoty řešení na časové vrstvě  $t = 1$  explicitním schematem. Na první časové vrstvě použijte náhradu s přesností  $o(\tau^2)$ . [12b]

Počet bodů je orientační!!!