UKÁZKA PÍSEMNÉ ZKOUŠKY/2010/B.

1. Je dána soustava lineárních rovnic $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} p & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

a) Zformulujte postačující podmínky (pro matici A) pro konvergenci Jacobiovy iterační metody. Určete všechny hodnoty parametru p, pro které jsou splněny.

b) Pro hodnotu parametru $p = 4$ zvolte $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ a určete $x^{(1)}$ a $x^{(2)}$ pomocí Jacobiovy iterační metody.

c) Pro $p = 4$ proveďte LU rozklad matice A, a spočtené přesné řešení porovnejte s výsledkem v b).

2. Je dána soustava nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 4 &= 4y^2 \\ 3 \cdot \sin x &= 2x + y \end{aligned}$$

a) Zvolte počáteční aproximaci $x^{(0)} = [\,2, -2]$ a použitím Newtonovy metody určete následující aproximaci $x^{(1)}$.

b) Určete $\|x^{(0)} - x^{(1)}\|_1$, tj. sloupcovou normu rozdílu obou aproximací.

c) Lze za počáteční aproximaci zvolit $x^{(0)} = [\,0, 0\,]$? Odpověď odůvodněte.

3. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' = \cos(x).y - \frac{x}{y'} \qquad y(1) = 0,\ y'(1) = -1$$

a) Napište obecně postačující podmínky existence a jednoznačnosti maximálního řešení Cauchyovy úlohy a určete oblast, kde jsou splněny pro danou Cauchyovu úlohu.

b) Užitím Collatzovy metody (E1) s krokem $h = 0.1$ určete přibližnou hodnotu y a y' v bodě $x = 1.1$.

4. V oblasti určené body $A = [0,0]$, $B = [2,0]$, $C = [2,1.2]$, $D = [0.5,1.2]$ je dána parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + 3$$

a na hranici čtyřúhelníka ABCD okrajová podmínka $u(x,y) = x + y$.

a) Zvolte prostorový krok $h = 0.5$ (pro obě proměnné x a y) a vytvořte síť tak, aby bod $[1.5, 0.5]$ byl jejím uzlem. Síť graficky znázorněte, kroužkem označte regulární uzly a čtverečkem neregulární uzly.

b) V regulárních uzlech sestavte diferenční rovnice použitím metody sítí. V jednom z neregulárních uzlů sestavte příslušnou rovnici použitím lineární interpolace (zvolte např. neregulární uzel, který leží nejblíže uzlu $[1.5, 0.5]$).