

UKÁZKA PÍSEMNÉ ZKOUŠKY/2010/A.

1. (a) Zapište oblast, v níž jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy $y'' = \frac{x}{y-1} + \sqrt{y'+1}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
(b) Užitím 1.modifikace Eulerovy metody určete přibližné hodnoty $y(0,2)$ a $y'(0,2)$ s krokem $h = 0,2$.
2. Dána Dirichletova úloha: $\Delta u = 1$, Ω je čtyřúhelník s vrcholy $[0; 0]$, $[1; 5; 0]$, $[2; 1; 5]$, $[0; 1; 5]$, $u(x, y) = x - y$ na hranici Γ dané oblasti Ω .
(a) Sestavte soustavu síťových rovnic, kterou dostanete při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem $h = 0,5$. (pro náhradu řešení v neregulárních uzlech užíjte lineární interpolaci).
(b) Ověřte, že získanou soustavu síťových rovnic lze řešit Gauss-Seidelovou iterační metodou.

I. Dána soustava lineárních rovnic tvaru $A.X = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 1 \\ p & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ -2 \end{pmatrix}$$

Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbf{R}$, pro které je splněna

- (a) některá z postačujících podmínek,
- (b) nutná a postačující podmínka

konvergence Gauss-Seidelovy iterační metody pro danou soustavu.

- (c) Proved'te $L U$ rozklad matice A pro případ $p = 1$.

- II. (a) Odvoďte vztahy pro řešení soustavy dvou nelineárních rovnic $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ Newtonovou iterační metodou.
(b) Určete graficky přibližnou polohu všech kořenů soustavy $y = \frac{4}{x^2}$, $x^2 - 4x + 4y^2 = 0$.
(c) Pro jeden z kořenů zvolte $X^{(0)} = (4; 0, 5)^T$ a sestavte rovnice pro výpočet aproximace $X^{(1)}$ Newtonovou metodou.