NMA VARIANTA "A" – 22.5.2012

1. Je dána tabulka hodnot

x_i	-2	-1	-1	0	0	0	1	1	2
y_i	0.8	-0.58	-0.62	-1.2	-0.5	-1.3	0	-0.8	1.2

   a) Zapište podmínku, kterou má splňovat polynom nejvýše 2. stupně, který aproximuje tabulku hodnot x_i y_i metodou nejmenších čtverců. Odvoďte soustavu normálních rovnic pro tento případ. **[8b]**

   b) Sestavte soustavu normálních rovnic pro zadanou tabulku hodnot a pro aproximaci polynomem $p_2^*(x)$ nejvýše 2. stupně. Proveďte LU rozklad matice soustavy a užitím LU rozkladu vypočtěte přesné řešení soustavy. **[10b]**

   c) Určete polynom $p_2^*(x)$ nejvýše 2. stupně, který danou tabulku hodnot aproximuje nejlépe ve smyslu metody nejmenších čtverců. **[7b]**

2. Je dána Cauchyova úloha

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2x - y_2^2 + y_1 + 1 \\ \sqrt{4 - y_1} - 2x \end{pmatrix} \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   a) Zapište oblast $\mathcal{G}$ v níž jsou splněny postačujícípodmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy **[5b]**

   b) Užitím Collatzovy metody (1.modifikace Eulerovy metody) s krokem $h = 1$ určete přibližně hodnotu řešení v bodě $x = 2$. **[10b]**

   c) Nechť y_i označuje hodnotu numerického řešení v bodě x_i získaného Collatzovou metodou a y_i^* hodnotu přesného řešení. Zapište pomocí těchto hodnot globální chybu ε_i. Zapište jaká je závislost ε_i na kroku h a určete jakého řádu je Collatzova metoda. Odhadněte, jak se změní globální chyba v bodě x při změně kroku z h na $h/4$ u Collatzovy metody. **[10b]**

3. Je dána Dirichletova okrajová úloha

$$y'' + \frac{1}{2x}y' - 4y = -\frac{2}{x}, \qquad y(1) = 1, y(5) = 0$$

   a) Danou rovnici převedte na samoadjungovaný tvar. Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy. Ověřte zda jsou splněny. **[8b]**

   b) Ukažte, že výraz $\frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$ je aproximací $y'(x)$ pro dostatečně hladkou funkci $y(x)$. Užitím tohoto vztahu odvoďte tvar síťových rovnic pro diskretizaci úlohy v samoadjungovaném tvaru metodou sítí s krokem h. **[8b]**

   c) Volte $h = 1$ a sestavte síť'ové rovnice pro Dirichletovu úlohu v samoadjungovaném tvaru získanou v a). Je pro tuto soustavu rovnic Gauss-Seidelova iterační metoda konvergentní? Zdůvodněte. **[9b]**

4. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2x}{t+1},$$
$$u(x,0) = ax + b \qquad \text{pro } x \in < 0, 4 >,$$
$$u(0,t) = 2 + t \qquad u(4,t) = -2 \quad \text{pro } t \in \langle 0, 10 \rangle$$

   a) Určete, pro které hodnoty $a, b \in R$ jsou splněny podmínky souhlasu a odvoďte síťovou rovnici v regulárním uzlu $(k+1)$-ní časové vrstvy při řešení dané úlohy implicitní metodou. Zapište podmínku stability pro implicitní metodu. **[10b]**

   b) Volte krok h a τ maximální tak, aby bod $A = [1; \frac{1}{2}]$ byl uzlem sítě implicitní metoda byla stabilní. Sestavte rovnice implicitního schematu na první časové vrstvě. **[9b]**

   c) Pro získanou soustavu rovnic z b) proved'te jeden krok Jacobiho iterační metody, počáteční iteraci volte jako nulový vektor (tj. $X^{(0)} = \vec{0}$). **[6b]**

Počet bodů je orientační!!!