Matematika III - příklady ze zkouškových testů s návody a výsledky

Leopold.Herrmann@fs.cvut.cz

1 Fourierovy řady

1.1 Fourierovy trigonometrické řady

Příklad 1.1.1.

$\boxed{\text{B}}$. Nechť f označuje 4-periodickou funkci (f má periodu $2L = 4$), která je v intervalu $(-2, 2]$ definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-2, 0], \\ 2, & x \in (0, 2]. \end{cases}$$

a) Znázorněte graf funkce f v intervalu $J = [-4, 4]$ a vypočtěte její Fourierovy koeficienty.

b) Zapište Fourierovu řadu funkce f a součet prvních pěti nenulových členů.

c) Určete a graficky znázorněte součet $s(x)$ řady v intervalu J. Speciálně určete hodnoty součtu v bodech $x = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4$.

Výsledky. a)

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 2\,dx = 2,$$
$$a_k = \frac{1}{2}\int_0^2 2\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$
$$b_k = \frac{1}{2}\int_0^2 2\sin\frac{k\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right] =$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{je-li } k \text{ sudé}, \\ \dfrac{4}{k\pi}, & \text{je-li } k \text{ liché}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

b)

$$f(x) \approx 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}\sin\frac{k\pi x}{2} \quad \text{nebo}$$
$$\approx 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2},$$
$$s_7(x) = 1 + \frac{4}{\pi}\Big(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + $$
$$+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \frac{1}{7}\sin\frac{7\pi x}{2}\Big).$$

c) Fourierova řada konverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Součet $s(x)$ je roven $f(x)$ vyjma čísel $0, \pm2, \pm4, \ldots$(sudých čísel), v nichž je roven 1.

Příklad 1.1.2.

$\boxed{\text{A}}$. Totéž zadání jako v Příkladu 1.1.1 pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-2, 0], \\ x, & x \in (0, 2]. \end{cases}$$

Výsledky. a)

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 x\,dx = 1,$$
$$a_k = \frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k - 1\right] =$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{pro } k \text{ sudé}, \\ -\dfrac{4}{k^2\pi^2}, & \text{pro } k \text{ liché}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N},$$
$$b_k = \frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\frac{k\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{k\pi}(-1)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

b)

$$f(x) \approx \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{2[(-1)^k-1]}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{2} +$$
$$+\frac{2(-1)^{k-1}}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big).$$

$$s_4(x) = \frac{1}{2} + \Big(-\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\Big) -$$
$$-\frac{1}{\pi}\sin(\pi x) +$$
$$+\Big(-\frac{4}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{2}\Big) -$$
$$-\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x).$$

c) Fourierova řada konverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Součet $s(x)$ je roven $f(x)$ vyjma čísel $\pm2, \pm6, \ldots$ (lichých násobků 2), v nichž je roven 1. Pro součet $s(x)$ v intervalu J platí

$$s(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-2, 0] \cup (2, 4], \\ x, & x \in (0, 2), \\ x+4, & x \in [-4, -2), \\ 1, & x \in \{-2, 2\}. \end{cases}$$

1.2 Fourierovy sinové a kosinové řady

Příklad 1.2.1.

$\boxed{\text{B.}}$ a) Spočtěte koeficienty a napište Fourierovu *sinovou* řadu 2π-periodické funkce f ($L = \pi$), která je definovaná v intervalu $(0, \pi)$ předpisem
$$f(x) = 1.$$

b) Napište součet prvních čtyř nenulových členů.

c) Určete a graficky znázorněte součet $s(x)$ řady v intervalu $J = [-2\pi, 2\pi]$.

Výsledky. a)

$$a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$
$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin kx \, dx = \frac{2}{k\pi} \left[1 - (-1)^k\right] = $$
$$= \begin{cases} 0, & \text{pro } k \text{ sudé}, \\ \dfrac{4}{k\pi}, & \text{pro } k \text{ liché}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

b)

$$f(x) \approx \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)\,x]}{2k-1} =$$
$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{7} \sin 7x + \cdots \right).$$

c) Řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, a to k 2π–periodickému lichému rozšíření konstantní funkce 1, $0 < x < \pi$, v bodech nespojitosti $k\pi$, k celé, konverguje k 0. Speciálně pro součet $s(x)$ v intervalu $[-2\pi, 2\pi]$ platí

$$s(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi), \\ 1, & x \in (-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi), \\ 0, & x \in \{-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi\}. \end{cases}$$

Příklad 1.2.2.

$\boxed{\text{A.}}$ Totéž zadání jako v Příkladu 1.2.1 pro funkce

1. $f(x) = x$;
2. $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

Výsledky. 1. a)

$$a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$
$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin kx \, dx = \frac{2x}{k\pi} \cos kx \Big|_\pi^0 =$$
$$= \frac{2}{k}(-1)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

b)

$$f(x) \approx 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin(kx)}{k} = 2\Big(\sin x -$$
$$- \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{1}{7} \sin 7x + \cdots \Big).$$

c) Řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, a to k 2π–periodickému lichému rozšíření funkce $f(x) = x$, $0 < x < \pi$, v bodech nespojitosti, tj. lichých násobcích π konverguje k 0. Speciálně pro součet s v intervalu $[-2\pi, 2\pi]$ platí

$$s(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & x \in [-2\pi, -\pi), \\ x, & x \in (-\pi, \pi), \\ x - 2\pi, & x \in (\pi, 2\pi], \\ 0, & x \in \{-\pi, \pi\}. \end{cases}$$

2.
$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, a to k 2π–periodickému lichému rozšíření funkce $\frac{\pi - x}{2}$, $0 < x < \pi$, a k 0 v bodech nespojitosti, tj. sudých násobcích π. Speciálně pro součet $s(x)$ v intervalu $[-2\pi, 2\pi]$ platí

$$s(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi + x}{2}, & x \in (-2\pi, 0), \\ 0, & x \in \{-2\pi, 0, 2\pi\}, \\ \dfrac{\pi - x}{2}, & x \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

Příklad 1.2.3.
$\boxed{\textbf{A}.}$ a) Vypočtěte Fourierovu *kosinovou* řadu pro danou $2L-$periodickou funkci: $f(x) = x$, $0 < x < L$.

b) Napište první čtyři nenulové členy řady.

c) Určete součet Fourierovy řady v intervalu $[-2L,\, 2L]$.

Výsledky. a) – b)

$$
\begin{aligned}
b_k &= 0, \quad k \in \mathbb{N}, \\
a_0 &= \frac{2}{L}\int_0^L x\,dx = L, \\
a_k &= \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = \frac{2L}{k^2\pi^2}\Big[(-1)^k - 1\Big] \\
&= \begin{cases} 0, & \text{pro } k \text{ sudé}, \\ -\dfrac{4L}{k^2\pi^2}, & \text{pro } k \text{ liché}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = \\
&= \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L} \\
&= \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{L} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{L} + \cdots\right).
\end{aligned}
$$

c) Řada konverguje pro všechny $x \in \mathbb{R}$, a to k $2L$-periodickému sudému rozšíření funkce $f(x) = x$, $0 < x < L$. Speciálně pro součet $s(x)$ v intervalu $[-2L,\, 2L]$ platí

$$
s(x) = \begin{cases} x + 2L, & x \in [-2L,\, -L), \\ -x, & x \in [-L,\, 0), \\ x, & x \in [0,\, L), \\ -x + 2L, & x \in [L,\, 2L]. \end{cases}
$$

2 Mocninné řady

2.1 Interval a obor konvergence

Příklad 2.1.1.
$\boxed{\textbf{B}.}$ Je dána mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{2^k\,(2k^2+1)}(x-2)^k.$$

a) Určete poloměr konvergence a interval konvergence dané řady.

b) Zapište intervaly, v nichž daná řada konverguje absolutně a diverguje. Situaci v krajních bodech intervalu konvergence nevyšetřujte.

Výsledky. Poloměr konvergence $R = 2$, interval konvergence $I = (0,\, 4)$. Řada absolutně konverguje pro $x \in I$ a diverguje pro $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$. *Poznámka.* V krajním bodě $x = 0$ diverguje (podle limitního srovnávacího kritéria), v krajním bodě $x = 4$ konverguje relativně (podle Leibnizova kritéria).

Příklad 2.1.2.
$\boxed{\textbf{A}.}$ Je dána mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{8^k\,(k^2+1)}(x-2)^{3k}.$$

a) Vypočtěte interval konvergence.

b) Určete všechna x, pro něž řada konverguje absolutně a všechna x, pro něž konverguje relativně.

c) Určete všechna x, pro něž řada diverguje.

Výsledky. Interval konvergence $I = (0,\, 4)$. Řada konverguje absolutně pro $x \in I$, relativně (podle Leibnizova kritéria) v pravém krajním bodě $x = 4$ a diverguje pro $x \in (-\infty,\, 0] \cup (4,\, +\infty)$.

2.2 Alternující řady - odhad chyby

Příklad 2.2.1.
$\boxed{\textbf{B}.}$ Je dána mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{2^{k+1}}.$$

a) Určete interval konvergence.

b) Dokažte, že řada pro $x = 0$ je alternující řadou $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\,c_k$, kde $c_k > 0$ splňují předpoklady Leibnizova kritéria.

c) Odhadněte chybu aproximace součtu řady částečným součtem prvních tří členů.

Návod. Užijte výsledku, který platí pro alternující řady $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,c_k$, ($c_k > 0$), které splňují předpoklady Leibnizova kritéria: *chyba aproximace součtu s částečným součtem s_n je menší než absolutní hodnota prvního vynechaného členu, tedy* $|s - s_n| < c_{n+1}$.

Výsledky. a)

1. *metoda* (limitní d'Alembertovo kritérium): interval konvergence $(-1,\,3)$.
2. *metoda* (vzorec pro součet geometrické řady): $a = \frac{1}{2}$, $q = \frac{x-1}{2}$, absolutně konvergentní pro $x \in (-1,\,3)$, $s = s(x) = \frac{1}{3-x}$. Speciálně $s(0) = \frac{1}{3}$.

b) Pro řadu $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,c_k$, $c_k = \frac{1}{2^{k+1}}$, jsou splněny předpoklady Leibnizova kritéria: i) $c_k < c_{k-1}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, ii) $c_k \to 0$ když $k \to +\infty$.

c) $|s - s_2| < c_3 = \frac{1}{16}\,(\approx 0.0626)$. *Poznámka.* $s_2 = \frac{3}{8}$, $|s - s_2| = \frac{1}{24}\,(\approx 0.0417) < \frac{1}{16}\,(\approx 0.0626)$.

Příklad 2.2.2.
$\boxed{\mathbf{A}.}$ Je dána mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-3)^{2k}}{4^k(k+1)^2}.$$

a) Určete interval konvergence I dané řady.

b) Vyšetřete konvergenci dané řady v krajních bodech intervalu konvergence I. Zapište intervaly, v nichž řada konverguje absolutně, v nichž diverguje a případné body, v nichž konverguje relativně. Znázorněte výsledky na číselné ose.

c) Dosaďte $x = 4$ do dané řady a odhadněte chybu aproximace součtu řady částečným součtem prvních 3 nenulových členů.

Návod. Viz Příklad 2.2.1 c).

Výsledky. a) $I = (1,\,5)$.

b) Řada konverguje absolutně v uzavřeném intervalu $[1,\,5]$, diverguje na $(-\infty,\,1) \cup (5,\,+\infty)$.

c) $s_2(4) = 1 - \frac{1}{4\cdot 4} + \frac{2}{4^2\cdot 9}$, $|s(4) - s_2(4)| < \frac{1}{4^3\cdot 16} \approx \frac{1}{1000}$.

2.3 Taylorův rozvoj funkce

Příklad 2.3.1.
$\boxed{\mathbf{B}.}$ Určete první čtyři nenulové členy rozvoje funkce $g(x) = \frac{1}{2-x}$ do Taylorovy řady se středem v bodě 0. Stanovte interval konvergence této řady.

Návod. Napište $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$ a užijte vzorec pro součet geometrické řady.

Výsledek.

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots\,, \qquad x \in I = (-2,\,2).$$

Příklad 2.3.2.
$\boxed{\mathbf{B}.}$ Vypočtěte koeficienty $c_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0, 1, 2$, Taylorovy řady funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x}$$

v bodě $x_0 = 0$ a zapište první tři nenulové členy Taylorova rozvoje této funkce v bodě 0.

Výsledek. $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = -\frac{1}{9}$,

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9}\,x^2 + \cdots\,.$$

Poznámka. Řada konverguje pro $x \in [-1,\,1]$.

Příklad 2.3.3.
$\boxed{\mathbf{A}.}$ a) Napište Taylorovu řadu funkce e^{-t^2} se středem v bodě 0.

b) Vypočtěte primitivní funkci $\int_0^x e^{-t^2}dt$ k funkci e^{-x^2} pomocí integrování člen po členu.

c) Vypočtěte $\int_0^1 e^{-t^2}dt$ s přesností na 2 desetinná místa, tj. s chybou menší než nebo rovnou $5\cdot 10^{-3}$.

Návod. Viz Příklad 2.2.1 c).

Výsledky. a) Použijeme známý rozvoj funkce e^x,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \ x \in \mathbb{R},$$

kde dosadíme $x = -t^2$.

b) Integrací člen po členu dostaneme

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \cdots = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!\,(2k+1)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

c)

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \cdots = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,(2k+1)},$$

řada splňuje předpoklady Leibnizova kritéria a odtud

$$\left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - s_n \right| < \frac{1}{(n+1)!\,(2n+3)} \leq \frac{5}{1000}$$

pokud $n \geq 3$. Součet $s_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = \frac{78}{105} = 0.743$ dává výsledek přesně na 2 desetinná místa.

2.4 Aproximace řešení lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu s nekonstantními koeficienty

Příklad 2.4.1.
B. a) Určete první čtyři nenulové členy rozvoje funkce $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ do Taylorovy řady se středem v bodě 0. *Návod.* Použijte vzorec pro součet geometrické řady.

b) Ukažte, že Cauchyova úloha (pro funkci $x \mapsto y(x)$)

$$y'' + xy = \frac{1}{1+x^2}, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = -2,$$

má právě jedno maximální řešení a určete interval J tohoto řešení. Ukažte, že existuje řešení úlohy ve tvaru součtu mocninné řady se středem v bodě 0 a určete interval konvergence I této řady.

c) Řešení úlohy aproximujte polynomem 4. stupně.

Výsledky. a)

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad I = (-1, 1).$$

b) Spojitost koeficientu a pravé strany g na intervalu $J = \mathbb{R}$, $0 \in J$.

c)

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots, \\ x \in I,$$
$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12 c_4 x^2 + \cdots, \quad x \in I,$$
$$xy = c_0 x + c_1 x^2 + \cdots, \quad x \in I,$$
$$y \approx 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4.$$

Příklad 2.4.2.
A. a) Určete první čtyři nenulové členy rozvoje funkce $g(x) = \operatorname{arctg} x$ do Taylorovy řady se středem v bodě 0.

Návod. Pomocí vzorce pro součet geometrické řady určete rozvoj funkce $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a pak integrujte člen po členu.

b) Ukažte, že Cauchyova úloha (pro funkci $x \mapsto y(x)$)

1. $y'' + xy = \operatorname{arctg} x, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 1,$
2. $$\begin{cases} y'' + xy' + 2y = \operatorname{arctg} x, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = \dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

má právě jedno maximální řešení a určete interval J tohoto řešení. Ukažte, že existuje řešení úlohy ve tvaru součtu mocninné řady se středem v bodě 0 a určete interval konvergence I této řady.

c) Řešení úlohy aproximujte polynomem 4. stupně, resp. 5. stupně.

Výsledky. a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \\ &\qquad x \in I = (-1,\,1), \\ \operatorname{arctg} x &= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \\ &= \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx = \\ &= \int \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}\,dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int (-1)^k x^{2k}\,dx = \\ &= C + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \\ &= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,\end{aligned}$$

integrační konstanta C se určí dosazením $x = 0$, tedy $C = 0$.

Alternativně:

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}\,dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^k t^{2k}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.\end{aligned}$$

Poznámka. Rozvoj platí nejenom pro $x \in (-1,\,1)$, ale i pro $x \in [-1,\,1]$.

b) Spojitost koeficientů a pravé strany na intervalu $J = \mathbb{R}$.

c) 1.

$$\begin{aligned}y &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots, \\ &\qquad x \in I, \\ x\,y &= c_0 x + c_1 x^2 + \cdots, \quad x \in I, \\ y'' &= 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + \cdots, \quad x \in I, \\ y &\approx 1 + x - \frac{1}{12}x^4.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}y &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \\ &\quad + c_5 x^5 + \cdots, \quad x \in I, \\ x\,y' &= c_1 x + 2c_2 x^2 + 3c_3 x^3 + \cdots, \\ &\qquad x \in I, \\ y'' &= 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \cdots, \\ &\qquad x \in I, \\ y &\approx \frac{1}{3}x - \frac{1}{60}x^5.\end{aligned}$$

Příklad 2.4.3.

$\boxed{\textbf{A.}}$ a) Určete první čtyři nenulové členy rozvoje funkce $g(x) = \ln(1+x)$ do Taylorovy řady se středem v bodě 0.

Návod. Pomocí vzorce pro součet geometrické řady určete rozvoj funkce $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ a pak integrujte člen po členu.

b) Ukažte, že Cauchyova úloha (pro funkci $x \mapsto y(x)$):

$$\begin{cases} y'' + y\ln(1+x) = x + e^x, \\ \quad y(0) = -1,\ y'(0) = -1, \end{cases}$$

má právě jedno maximální řešení a určete interval J tohoto řešení. Ukažte, že existuje řešení úlohy ve tvaru součtu mocninné řady se středem v bodě 0 a určete interval konvergence I této řady.

c) Řešení úlohy aproximujte polynomem 4. stupně.

Výsledky. a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \\ &\qquad x \in (-1,\,1), \\ \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.\end{aligned}$$

b) Spojitost koeficientu a pravé strany na intervalu $J = (-1,\,\infty)$, $0 \in J$.

c)

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \\ &\quad + c_4 x^4 + \cdots, \quad x \in I = (-1,\, 1), \\ y \ln(1+x) &= c_0 x + \left(c_1 - \frac{c_0}{2}\right) x^2 + \cdots, \ x \in I, \\ x + e^x &= 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}, \\ y &\approx -1 - x + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{2}\, x^3 + \frac{1}{12}\, x^4. \end{aligned}$$

Příklad 2.4.4.

$\boxed{\mathbf{B}.}$ a) Určete první čtyři nenulové členy rozvoje funkce $g(x) = \frac{1}{1+x}$ do Taylorovy řady se středem v bodě 0. Stanovte interval konvergence této řady.

Návod. Užijte vzorec pro součet geometrické řady.

b) Ukažte, že Cauchyova úloha (pro funkci $x \mapsto y(x)$):

$$\begin{cases} y'' + x^2\, y = \dfrac{1}{1+x}, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

má právě jedno maximální řešení a určete interval J tohoto řešení. Ukažte, že existuje řešení úlohy ve tvaru součtu mocninné řady se středem v bodě 0 a určete interval konvergence I této řady.

c) Řešení úlohy aproximujte polynomem 5. stupně.

Výsledky. a)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad x \in I = (-1,\, 1).$$

b) Spojitost koeficientu a pravé strany na intervalu $J = (-1, +\infty)$, $0 \in J$.

c)

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \\ &\quad + c_5 x^5 + \cdots, \quad x \in I, \\ y'' &= 2c_2 + 6c_3 x + 12 c_4 x^2 + 20 c_5 x^3 + \cdots, \\ &\qquad x \in I, \\ x^2\, y &= c_0 x^2 + c_1 x^3 + \cdots, \quad x \in I. \end{aligned}$$

$$y \approx 1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{20}\, x^5.$$

Příklad 2.4.5.

$\boxed{\mathbf{B}.}$ a) Určete první čtyři nenulové členy rozvoje funkce $g(x) = \frac{1}{2-x}$ do Taylorovy řady se středem v bodě 0. Stanovte interval konvergence této řady.

Návod. Napište $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$ a užijte vzorec pro součet geometrické řady.

b) Ukažte, že Cauchyova úloha (pro funkci $x \mapsto y(x)$):

$$\begin{cases} y'' + x\, y = \dfrac{1}{2-x}, \\ y(0) = \frac{1}{4},\ y'(0) = \frac{1}{8}, \end{cases}$$

má právě jedno maximální řešení a určete interval J tohoto řešení. Ukažte, že existuje řešení úlohy ve tvaru součtu mocninné řady se středem v bodě 0 a určete interval konvergence I této řady.

c) Řešení úlohy aproximujte polynomem 5. stupně.

Výsledky. a)

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^3 + \cdots, \quad x \in I = (-2,\, 2).$$

b) Spojitost koeficientu a pravé strany g na intervalu $J = (-\infty, 2)$, $0 \in J$.

c)

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \\ &\quad + c_5 x^5 + \cdots, \quad x \in I, \\ y'' &= 2c_2 + 6c_3 x + 12 c_4 x^2 + 20 c_5 x^3 + \cdots, \\ &\qquad x \in I, \\ x\, y &= c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + \cdots, \quad x \in I. \\ y &\approx \frac{1}{4} + \frac{1}{8} x + \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{320}\, x^5. \end{aligned}$$

3 Rovnice 1. řádu

3.1 Věta o existenci a jednoznačnosti

Příklad 3.1.1.

$\boxed{\text{B.}}$ Určete a graficky znázorněte oblasti v rovině, v nichž jsou splněny postačující podmínky existence a jednoznačnosti maximálního řešení Cauchyovy úlohy pro následující rovnice:

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(y^2+2)}{y(x^2-1)}$;
2. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x(x+2)} = x + 2.$

Výsledky. 1. • Funkce $f = f(x,y) = \frac{x(y^2+2)}{y(x^2-1)}$ • a její parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(y^2-2)}{y^2(x^2-1)}$ jsou *spojité* v *oblastech*

$$\begin{aligned}
G_1 &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1,\ y > 0\},\\
G_2 &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1,\ y < 0\},\\
G_3 &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-1,1),\ y > 0\},\\
G_4 &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-1,1),\ y < 0\},\\
G_5 &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x < -1,\ y > 0\},\\
G_6 &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x < -1,\ y < 0\}.
\end{aligned}$$

Alternativně zapsáno pomocí kartézského součinu množin

$$\begin{aligned}
G_1 &= (1,+\infty) \times (0,+\infty),\\
G_2 &= (1,+\infty) \times (-\infty,0),\\
G_3 &= (-1,1) \times (0,+\infty),\\
G_4 &= (-1,1) \times (-\infty,0),\\
G_5 &= (-\infty,-1) \times (0,+\infty),\\
G_6 &= (-\infty,-1) \times (-\infty,0).
\end{aligned}$$

2. Rovnice je lineární, a proto oblastí, v níž jsou splněny postačující podmínky existence a jednoznačnosti maximálního řešení Cauchyovy úlohy je každá oblast $J \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$, kde J je společný interval spojitosti koeficientu a pravé strany. Tedy

$$\begin{aligned}
G_1 &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x < -2,\ y \in \mathbb{R}\},\\
G_2 &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-2,0),\ y \in \mathbb{R}\},\\
G_5 &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Navíc, maximální řešení je definováno na každém společném intervalu spojitosti koeficientu a pravé strany.

Příklad 3.1.2.

$\boxed{\text{B.}}$ Cauchyova úloha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x}, \quad y(-2) = -1,$$

má maximální řešení $y \equiv -1$ definované pro $x \in (-\infty, 0)$. Existují jiná maximální řešení této Cauchyovy úlohy? V kladném případě, najděte alespoň jedno, v opačném případě zdůvodněte odpověď.

Výsledek. Oblast $G = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ y \in \mathbb{R}\}$ je oblastí, v níž jsou splněny podmínky existence a *jednoznačnosti* maximálního řešení Cauchyovy úlohy. Jiná maximální řešení tedy neexistují.

3.2 Metoda separace proměnných

Příklad 3.2.1.

$\boxed{\text{B.}}$ a) Dokažte, že v polorovině $G_+ = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ jsou splněny postačující podmínky existence a jednoznačnosti maximálního řešení Cauchyovy úlohy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}, \quad y(0) = 1.$$

b) Spočtěte maximální řešení uvedené úlohy včetně intervalu.

Výsledek. a) Funkce $f = f(x,y) = \frac{3x^2}{2y}$ a její parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3x^2}{2y^2}$ jsou spojité v oblastech $G_+ = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, $G_- = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$ a bod $[0,1]$ náleží oblasti G_+.

b) Obecné řešení rovnice v G_+, resp. G_-:

$$y = \pm\sqrt{x^3 + C}, \quad x \in (-\sqrt[3]{C},\ +\infty).$$

Cauchyova úloha:

$$y = \sqrt{x^3 + 1}, \quad x \in (-1,\ +\infty).$$

Příklad 3.2.2.

$\boxed{\text{B.}}$ Najděte maximální řešení následujících Cauchyových úloh. Určete interval, v němž je maximální řešení definováno.

1. $\dfrac{dy}{dx} = y^2, \quad y(0) = 1;$
2. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y(0) = 0;$
3. $\dfrac{dy}{dx} = 2x(1 + y^2), \quad y(0) = 0;$
4. $\dfrac{dy}{dx} = (1 + x)\,(1 + y^2), \quad y(0) = 1;$
5. $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}, \quad (y > 0), \quad y(0) = 1;$
6. $\dfrac{dy}{dx} = y^3, \quad y(0) = 1;$
7. $\dfrac{dy}{dx} + y^3 = 0, \quad y(0) = 1;$

Výsledky.

1. $y = -\dfrac{1}{x-1}$, $x \in (-\infty,\, 1)$;
2. $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$;
3. $y = \operatorname{tg} x^2$, $x \in \left(-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)$;
4. $y = \operatorname{tg}(x + \frac{x^2}{2})$, $-\frac{\pi}{2} < x + \frac{x^2}{2} < \frac{\pi}{2}$,
   $\big($tedy $x \in (-1 - \sqrt{1+\pi},\, -1 + \sqrt{1+\pi})\big)$;
5. $y = (x+1)^2$, $x \in (-1,\, +\infty)$;
6. $y = \sqrt{\dfrac{1}{1-2x}}$, $x \in (-\infty,\, 1/2)$;
7. $y = \sqrt{\dfrac{1}{1+2x}}$, $x \in (-1/2, +\infty)$.

3.3 Lineární rovnice

Příklad 3.3.1.

$\boxed{\text{B.}}$ Najděte obecné řešení rovnice

1. $\dfrac{dy}{dx} + 3\,y = 3\,e^x;$
2. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3}{2x}\,y = \sqrt{x^3}, \quad (x > 0);$
3. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2}{x+1}\,y = (x+1)^2, \quad (x \neq -1).$

Výsledky.

1. $y = \frac{1}{2}e^{3x} + C\,e^{-3x}$, $x \in \mathbb{R}$;
2. $y = (x + C)\,\sqrt{x^3}$, $x > 0$;
3. $y = (x+C)\,(x+1)^2$, $x > -1$ nebo $x < -1$.

Příklad 3.3.2.

$\boxed{\text{B.}}$ Najděte maximální řešení následujících Cauchyových úloh. Určete interval, na němž jsou maximální řešení definována.

1. $y' - \dfrac{2y}{x} = -x^2, \quad y(1) = 10;$
2. $y' - \dfrac{2y}{x} = \dfrac{4}{x^2}, \quad y(1) = 9;$
3. $2xy' - y = 3x^2, \quad y(1) = 0;$
4. $y' - \dfrac{y}{2x} = \sqrt{x}, \quad y(1) = 3;$
5. $y' + y\ \operatorname{tg} x = \sin 2x, \quad y(2\pi) = 1;$
6. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x+3}, \quad y(-2) = 4.$

Výsledky.

1. $y = -x^3 + Cx^2$, $C = 11$, $x > 0$;
2. $y = -\dfrac{4}{3x} + C\,x^2$, $C = \dfrac{31}{3}$, $x > 0$;
3. $y = x^2 + C\sqrt{x}$, $C = -1$, $x > 0$;
4. $y = (x + C)\,\sqrt{x}$, $C = 2$, $x > 0$;
5. $y = -2\cos^2 x + C\,\cos x$, $C = 3$,
   $x \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right)$;
6. $y = \dfrac{x - 3\ln(x+3) + C}{x}$, $C = -6$,
   $x \in (-3, 0)$.

3.4 Bernoulliova rovnice

Příklad 3.4.1.
$\boxed{\mathbf{A}.}$ Vypočtěte maximální řešení Cauchyovy úlohy (nezapomeňte uvést jeho interval)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x}, \quad y(-2) = -2.$$

Výsledek. Rovnice se separovatelnými proměnnými nebo Bernoulliova rovnice: $y = ux$, $\frac{du}{dx} = u^2$,

$$y = -1 + \frac{1}{x+1}, \quad x \in (-\infty, -1).$$

3.5 Exaktní rovnice

Příklad 3.5.1.
$\boxed{\mathbf{A}.}$ Vypočtěte obecný integrál rovnice

$$(-5x + y)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0.$$

Určete integrální křivku procházející bodem [a)] $M_1 = [0, 2]$ a [b)] $M_2 = [1, 5]$.

Výsledek. Pro funkce $M = -5x + y$ a $N = x - y + 4$ platí $N_x = M_y$ všude v rovině (jednoduše souvislé oblasti) $\mathbb{R}^2$. Rovnice je tedy exaktní a její obecný integrál je

$$-\frac{5}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + 4y = C, \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Pro $C = 6$ integrální křivka prochází bodem M_1, bod M_2 je singulární bod rovnice.

Příklad 3.5.2.
$\boxed{\mathbf{A}.}$ Určete oblasti v rovině, v nichž je daná rovnice exaktní a vypočtěte obecný integrál:

$$(-\frac{1}{\cos^2 x} + \cos 5y)\,dx + (-5x \sin 5y + 2y)\,dy = 0.$$

Výsledek. Pásy $G_k =$

$$= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi),\, y \in \mathbb{R}\},$$
$$k \text{ je celé číslo},$$

jsou jednoduše souvislé oblasti a platí na nich $N_x = M_y$, kde $M = -\frac{1}{\cos^2 x} + \cos 5y$ a $N = -5x \sin 5y + 2y$. Rovnice je tedy exaktní a její obecný integrál je

$$-\operatorname{tg} x + x \cos 5y + y^2 = C, \quad (C \in \mathbb{R}).$$

4 Lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

4.1 Metoda odhadu

Příklad 4.1.1.
$\boxed{\mathbf{B}.}$ Je dána lineární diferenciální rovnice druhého řádu (pro funkci $t \mapsto y(t)$):

$$\ddot{y} - 2\dot{y} = 8e^{-2t}.$$

a) Určete fundamentální systém řešení příslušné homogenní rovnice $\ddot{y} - 2\dot{y} = 0$ a zapište její obecné řešení.

b) Metodou odhadu určete partikulární řešení dané nehomogenní rovnice a zapište její obecné řešení.

c) Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy pro počáteční podmínky $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -2$. Nezapomeňte uvést interval maximálního řešení.

Výsledky. Obecné řešení:

$$y = C_1 + C_2 e^{2t} + e^{-2t},\ t \in \mathbb{R},\ (C_1, C_2 \in \mathbb{R}),$$

Cauchyova úloha:

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ \text{tj. } y = e^{-2t}.$$

Příklad 4.1.2.
$\boxed{\mathbf{B}.}$ Totéž pro následující Cauchyovy úlohy:

1. $\ddot{y} - 9y = 5e^{2t}, \quad y(0) = -2, \dot{y}(0) = 1;$
2. $\ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = 5e^{-2t}, \ y(0) = 2, \dot{y}(0) = -3;$
3. $\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = e^{3t}, \quad y(0) = \frac{1}{6}, \dot{y}(0) = 0;$
4. $\ddot{y} - y = e^{2t}, \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1;$
5. $\ddot{y} + y = \cos 2t, \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1;$
6. $\ddot{y} - y = t + 2, \quad y(0) = 2, \dot{y}(0) = 0.$

Výsledky.

1. Obecné řešení: $y = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t} - e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$,
   Cauchyova úloha: $C_1 = 0$, $C_2 = -1$;

2. Obecné řešení: $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} + e^{-2t}$, $t \in \mathbb{R}$, $(C_1,\, C_2 \in \mathbb{R})$,
Cauchyova úloha: $C_1 = 1$, $C_2 = 0$;
3. Obecné řešení: $y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{12} e^{3t}$, $t \in \mathbb{R}$, $(C_1,\, C_2 \in \mathbb{R})$,
Cauchyova úloha: $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{12}$;
4. Obecné řešení: $y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, $(C_1,\, C_2 \in \mathbb{R})$,
Cauchyova úloha: $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{3}$.
5. Obecné řešení: $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{3}\cos 2t$, $t \in \mathbb{R}$, $(C_1,\, C_2 \in \mathbb{R})$,
Cauchyova úloha: $C_1 = \frac{1}{3}$, $C_2 = 1$.
6. Obecné řešení: $y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} - t - 2$, $t \in \mathbb{R}$, $(C_1,\, C_2 \in \mathbb{R})$.
Cauchyova úloha: $C_1 = \frac{5}{2}$, $C_2 = \frac{3}{2}$.

4.2 Metoda odhadu - modifikace

Příklad 4.2.1.

$\boxed{\text{B.}}$ Je dána lineární diferenciální rovnice druhého řádu (pro funkci $t \mapsto y(t)$):

$$\ddot{y} - 2\dot{y} = 4t + 2.$$

a) Určete fundamentální systém řešení příslušné homogenní rovnice $\ddot{y} - 2\dot{y} = 0$ a zapište její obecné řešení.

b) Metodou odhadu určete partikulární řešení dané nehomogenní rovnice a zapište její obecné řešení.

c) Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy pro počáteční podmínky $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -2$. Nezapomeňte uvést interval maximálního řešení.

Výsledky. Obecné řešení:

$$y = C_1 + C_2 e^{2t} - t^2 - 2t,\ t \in \mathbb{R},\ (C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}),$$

Cauchyova úloha:

$$C_1 = 1,\ C_2 = 0,\ \text{tj. } y = 1 - 2t - t^2.$$

Příklad 4.2.2.

$\boxed{\text{A.}}$ Totéž pro následující Cauchyovy úlohy:

1. $\ddot{y} + 9y = 6\cos 3t, \quad y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 1;$
2. $\ddot{y} - 9y = e^{3t}, \quad y(0) = \frac{1}{6},\ \dot{y}(0) = \frac{2}{3};$
3. $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 2e^{-2t},\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0.$

Výsledky.

1. Obecné řešení: $y = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + t\sin 3t$, $t \in \mathbb{R}$, $(C_1,\, C_2 \in \mathbb{R})$,
Cauchyova úloha: $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.
2. Obecné řešení: $y = \left(\frac{1}{6}t + C_1\right) e^{3t} + C_2 e^{-3t}$, $t \in \mathbb{R}$, $(C_1,\, C_2 \in \mathbb{R})$,
Cauchyova úloha: $C_1 = \frac{1}{6}$, $C_2 = 0$.
3. Obecné řešení: $y = (C_1 + C_2\, t + t^2)\, e^{-2t}$, $t \in \mathbb{R}$, $(C_1,\, C_2 \in \mathbb{R})$,
Cauchyova úloha: $C_1 = C_2 = 0$.

Příklad 4.2.3.

$\boxed{\text{A.}}$ Vypočtěte maximální řešení následujících Cauchyových úloh:

1. $\ddot{y} - 2\dot{y} = t\, e^{-2t}, \quad y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0;$
2. $\ddot{y} - 2\dot{y} = t + e^{-2t}, \quad y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0.$
3. $\ddot{y} + 4y = e^{-t} + 4\cos 2t,\ y(0) = \frac{1}{5},\ \dot{y}(0) = 0.$

Výsledky.

1. Partikulární řešení hledáme ve tvaru:
$$y_P = (A_1 t + A_0)\, e^{-2t}.$$
Obecné řešení: $y = \left(\frac{1}{8}t + \frac{3}{32}\right) e^{-2t} + C_1 e^{2t} + C_2$, $t \in \mathbb{R}$, $(C_1,\, C_2 \in \mathbb{R})$,
Cauchyova úloha: $C_1 = \frac{1}{32}$, $C_2 = -\frac{1}{8}$;
2. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_P = y_{P_1} + y_{P_2}$, kde
$$y_{P_1} = t\,(A_1 t + A_0), \quad y_{P_2} = A e^{-2t}.$$
Obecné řešení: $y = -\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}e^{-2t} + C_1 e^{2t} + C_2$, $t \in \mathbb{R}$, $(C_1,\, C_2 \in \mathbb{R})$,
Cauchyova úloha: $C_1 = \frac{1}{4}$, $C_2 = -\frac{3}{8}$.

3. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_P = y_{P_1} + y_{P_2}$, kde

$$y_{P_1} = A_0\, e^{-t},$$
$$y_{P_2} = t\,(A\cos 2t + B\sin 2t).$$

Obecné řešení: $y = \frac{1}{5}\, e^{-t} + t\sin 2t + C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$, $(C_1,\, C_2 \in \mathbb{R})$,
Cauchyova úloha: $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{10}$.

5 Lineární soustavy

5.1 FS - ověření

Příklad 5.1.1.

$\boxed{\textbf{A}.}$ Je dána lineární homogenní soustava s nekonstantními koeficienty

$$\dot{x} = \frac{1}{t}\,x - y,$$
$$\dot{y} = \frac{1}{t^2}\,x + \frac{2}{t}\,y.$$

a) Zapište matici soustavy a pomocí ní zapište soustavu ve vektorovém tvaru pro funkci

$$t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) Dokažte, že dvojice funkcí

$$X^1 = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} \quad X^2 = \begin{pmatrix} -t^2\ln t \\ t(1+\ln t) \end{pmatrix}$$

tvoří fundamentální systém řešení soustavy na intervalu $J = (0,\, +\infty)$. Zapište obecné řešení soustavy na intervalu J.

c) Najděte maximální řešení Cauchyovy úlohy pro počáteční podmínku

$$X(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nezapomeňte uvést interval maximálního řešení.

Výsledky. a)

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} X.$$

b) Funkce X^1 a X^2 tvoří fundamentální systém řešení na intervalu $J = (0,\, +\infty)$, neboť

1. X^1 a X^2 jsou řešení na intervalu J;

2. Wronskián

$$W(t) = \begin{vmatrix} t^2 & -t^2\ln t \\ -t & t(1+\ln t) \end{vmatrix} = t^3 \neq 0$$

pro $t \in J$.

Obecné řešení:

$$X = C_1\, X^1 + C_2\, X^2, \quad t \in J,\ (C_1,\, C_2 \in \mathbb{R} \text{ lib.}),$$

nebo, v souřadnicích,

$$x = C_1\, t^2 - C_2\, t^2 \ln t,$$
$$y = -C_1\, t + C_2\, t(1+\ln t).$$

c) Cauchyova úloha: $C_1 = 1$, $C_2 = 3$,

Příklad 5.1.2.

$\boxed{\textbf{A}.}$ Je dána lineární diferenciální rovnice (druhého řádu s nekonstantními koeficienty pro funkci $t \mapsto x(t)$):

$$(R) \qquad \ddot{x} - \frac{2}{t}\,\dot{x} - \frac{4}{t^2}\,x = 0.$$

a) Převeďte rovnici na soustavu druhého řádu (pro funkce $t \mapsto x(t)$ a $t \mapsto \dot{x}(t)$).

b) Dokažte, že dvojice funkcí

$$X^1 = \begin{pmatrix} t^4 \\ 4t^3 \end{pmatrix} \quad X^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$$

tvoří fundamentální systém řešení vzniklé soustavy na intervalu $J_1 = (-\infty,\, 0)$ a na intervalu $J_2 = (0,\, +\infty)$. Zapište obecné řešení soustavy na intervalu J_1, resp. J_2.

c) Najděte maximální řešení Cauchyovy úlohy dané rovnicí (R) a počátečními podmínkami

$$x(1) = 1, \quad \dot{x}(1) = 9.$$

Nezapomeňte uvést interval maximálního řešení.

Výsledky. a)

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = \frac{4}{t^2}\,x + \frac{2}{t}\,y.$$

b) Funkce X^1 a X^2 tvoří fundamentální systém řešení na intervalu J_i ($i = 1, 2$), neboť

1. X^1 a X^2 jsou řešení na intervalu J_i;
2. Wronskián
$$W(t) = \begin{vmatrix} t^4 & \frac{1}{t} \\ 4t^3 & -\frac{1}{t^2} \end{vmatrix} = -5t^2 \neq 0 \text{ pro } t \neq 0.$$

Obecné řešení:

$$X = C_1\,X^1 + C_2\,X^2, \quad t \in J_i,\ (C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}).$$

c) Cauchyova úloha pro soustavu (počáteční podmínky jsou $x(1) = 1$, $y(1) = 9$): $C_1 = 2$, $C_2 = -1$, $t \in J_2$. První souřadnice je řešením Cauchyovy úlohy pro rovnici (R):

$$x = 2t^4 - \frac{1}{t}, \qquad t \in J_2.$$

6 Lineární soustavy s konstantními koeficienty

6.1 FS - nalezení (Eulerova metoda), typ bodu rovnováhy (BR)

Příklad 6.1.1.

$\boxed{\textbf{A.}}$ a) Určete všechna $p \in \mathbb{R}$, pro něž lineární homogenní soustava

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & p \\ 5 & 1 \end{pmatrix} X$$

má izolovaný bod rovnováhy. Stanovte typ izolovaného bodu rovnováhy v závislosti na parametru p.

b) Pro $p = 3$ určete fundamentální systém řešení dané soustavy (Eulerovou metodou), zapište obecné řešení dané soustavy a určete maximální řešení Cauchyovy úlohy s počáteční podmínkou

$$X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nezapomeňte uvést interval maximálního řešení.

c) Pro $p = 3$ zapište rovnice přímek, na nichž leží polopřímkové fázové trajektorie (pokud existují) a graficky je znázorněte ve fázové rovině (včetně orientace). Graficky znázorněte fázovou trajektorii maximálního řešení Cauchyovy úlohy. Pokud je trajektorie uzavřená křivka, najděte primitivní (nejmenší kladnou) periodu řešení.

Návod. Reálné vlastní číslo $\Longrightarrow$ reálný vlastní vektor a každý reálný vlastní vektor = směrový vektor přímky, na níž leží polopřímkové trajektorie.

Výsledky. a) BR [0, 0] je jediný (a tedy izolovaný) právě tehdy, když determinant $\det A$ matice soustavy je nenulový: $\det A = -1-5p \neq 0$, tj. $p \neq -\dfrac{1}{5}$. Jestliže $\det A < 0$, tj. $p > -\dfrac{1}{5}$, BR je typu sedlo ($\det A$ je roven součinu vlastních čísel, takže v případě $\det A < 0$ jsou vlastní čísla nutně reálná různých znamének). Jestliže $\det A > 0$, tj. $p < -\dfrac{1}{5}$, pak vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\det A}$ a BR je typu střed.

b) Pro $p = 3$:

$$\lambda_1 = -4,\ V^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 4,\ V^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální systém řešení (na $\mathbb{R}$):

$$X^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4t}, \quad X^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{4t},$$
$$t \in \mathbb{R}, \quad (C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Cauchyova úloha:

$$C_1 = -1,\ C_2 = 0,\ \text{tj. } X = \begin{pmatrix} -e^{-4t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix} \ t \in \mathbb{R}.$$

c) Polopřímkové fázové trajektorie na přímkách o směrových vektorech V^1 a V^2, tj. na přímkách $y = -x$, $y = \frac{5}{3}x$, BR [0, 0] typu sedlo, fázová trajektorie maximálního řešení Cauchyovy úlohy je polopřímka $y = -x$, $x < 0$, orientovaná směrem do počátku.

Příklad 6.1.2.

$\boxed{\mathbf{A}.}$ a) Určete všechna $p \in \mathbb{R}$, pro něž lineární homogenní soustava

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ p & 0 \end{pmatrix} X$$

má izolovaný bod rovnováhy. Stanovte typ izolovaného bodu rovnováhy v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$.

b) Pro $p = 5$ určete pomocí Eulerovy metody obecné řešení.

c) Pro $p = 5$ určete maximální řešení Cauchyovy úlohy s počáteční podmínkou

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a graficky znázorněte jeho trajektorii (včetně orientace). V případě, že trajektorie je uzavřená křivka, najděte primitivní (nejmenší kladnou) periodu řešení.

Výsledky. a) $\det A = 5p$, $p \neq 0$ – izolovaný BR $[0, 0]$, $p < 0$ – sedlo, $p > 0$ – střed.

b) Pro $p = 5$:

$$\lambda_{1,2} = \pm 5i, \quad V\ (= V^1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Reálný fundamentální systém řešení (na $\mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} \cos 5t \\ \sin 5t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin 5t \\ -\cos 5t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} \cos 5t \\ \sin 5t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin 5t \\ -\cos 5t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad (C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}).$$

c) Cauchyova úloha: $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Fázová trajektorie je jednotková kružnice se středem v počátku, kladně orientovaná, neboť $\vec{\tau}_{[1,0]} = (0,\, 5)^T$. *Všechna (nenulová)* řešení jsou periodická s primitivní periodou $2\pi/5$.

Příklad 6.1.3.

$\boxed{\mathbf{B}.}$ Je dána lineární homogenní soustava

$$\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = 4x - 2y.$$

a) Zapište matici soustavy a spočtěte její vlastní čísla a příslušné vlastní vektory.

b) Určete fundamentální systém řešení dané soustavy (Eulerovou metodou) a zapište její obecné řešení. Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy pro počáteční podmínku

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 5.$$

Nezapomeňte uvést interval maximálního řešení.

c) Ukažte, že soustava má právě jeden bod rovnováhy a určete jeho typ. Zapište rovnice přímek, na nichž leží polopřímkové fázové trajektorie (pokud existují). Graficky znázorněte ve fázové rovině polopřímkové fázové trajektorie a fázovou trajektorii maximálního řešení (včetně orientace).

Výsledky. a)

$$\lambda_1 = 2,\ V^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -3,\ V^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b) Fundamentální systém řešení (na $\mathbb{R}$):

$$X^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad X^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t},\ t \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t}, \qquad t \in \mathbb{R},\ (C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Cauchyova úloha:

$$C_1 = -C_2 = 1,\ \text{tj. } X = \begin{pmatrix} e^{2t} - e^{-3t} \\ e^{2t} + 4e^{-3t} \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

c) BR $[0, 0]$ je jediný (a tedy izolovaný), neboť determinant $\det A$ matice soustavy je nenulový. BR $[0, 0]$ je typu sedlo, neboť $\det A < 0$ (vlastní čísla jsou reálná různých znamének, $\det A = \lambda_1 \lambda_2$). Polopřímkové fázové trajektorie na přímkách $y = x$, $y = -4x$, $\vec{\tau}_{[0,\,5]} \parallel (1,\, -2)^T$.

Příklad 6.1.4.

$\boxed{\textbf{B.}}$ Je dána lineární homogenní soustava

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} X.$$

a) Určete (reálný) fundamentální systém řešení dané soustavy a zapište její obecné řešení.

b) Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy při počáteční podmínce $X(0) = (-1,\,1)^T$.

c) Ověřte, že soustava má jediný bod rovnováhy a určete jeho typ. Graficky znázorněte ve fázové rovině fázovou trajektorii maximálního řešení (včetně orientace). Pokud je trajektorie uzavřená křivka, najděte primitivní (nejmenší kladnou) periodu řešení.

Výsledky. a)

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i, \quad V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+2i \end{pmatrix}.$$

Reálný fundamentální systém řešení (na $\mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} -\cos 2t \\ \cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ 2\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení:

$$X = \begin{pmatrix} -C_1 \cos 2t - C_2 \sin 2t \\ (C_1 + 2C_2)\cos 2t + (-2C_1 + C_2)\sin 2t \end{pmatrix},$$

$$t \in \mathbb{R}, \quad (C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Cauchyova úloha: $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, tj.

$$X = \begin{pmatrix} -\cos 2t \\ \cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

c) BR $[0,\,0]$ je jediný (a tedy izolovaný), neboť determinant matice soustavy je nenulový. BR $[0,0]$ typu střed, neboť vlastní čísla jsou ryze imaginární ($\lambda_{1,2} = \pm 2i$). Trajektorie je elipsa se středem v počátku, kladně orientovaná, neboť $\vec{\tau}_{[-1,\,1]} = (0,\,-4)^T$. Primitivní perioda *všech nenulových* řešení je π.

Příklad 6.1.5.

$\boxed{\textbf{B.}}$ Je dána lineární homogenní soustava

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} X.$$

a) Spočtěte vlastní čísla a příslušné vlastní vektory matice dané soustavy.

b) Určete fundamentální systém řešení dané soustavy (Eulerovou metodou) a zapište její obecné řešení.

c) Ukažte, že soustava má právě jeden bod rovnováhy a určete jeho typ. Zapište rovnice přímek, na nichž leží polopřímkové fázové trajektorie (pokud existují).

Výsledky. a)

$$\lambda_1 = \frac{5}{2},\, V^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2},\, V^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Fundamentální systém řešení (na $\mathbb{R}$):

$$X^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{5}{2}t}, \quad X^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{\frac{3}{2}t}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{5}{2}t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{\frac{3}{2}t},$$

$$t \in \mathbb{R}, \; (C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}).$$

c) Polopřímkové fázové trajektorie na přímkách $y = x$, $y = -x$. Bod rovnováhy $[0,\,0]$ je jediný (a tedy izolovaný), neboť matice soustavy má nenulový determinant, BR je typu (bikritický) uzel, neboť vlastní čísla jsou reálná různá stejného znaménka.

Příklad 6.1.6.

$\boxed{\textbf{A.}}$ Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro něž má lineární homogenní soustava s konstantními koeficienty

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix} X$$

izolovaný bod rovnováhy. Diskutujte závislost typu bodu rovnováhy na parametru p. Najděte obecné řešení pro $p = 5$.

Výsledky. $\det A = -3 + p \neq 0$ - izolovaný bod rovnováhy, $p = 3$ nekonečně mnoho bodů rovnováhy, leží na přímce $y = -3x$.

$p < 3$ sedlo (neboť $\det A < 0$), diskriminant $D = 4(4 - p)$, $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4 - p} \implies p \in (3,\, 4)$ (bikritický) uzel, $p = 4$ monokritický uzel, $p > 4$ ohnisko.

Pro $p = 5$:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i, \quad V = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 + i \end{pmatrix}.$$

Reálný fundamentální systém řešení (na $\mathbb{R}$):

$$e^{-t}\begin{pmatrix} -\cos t \\ 2\cos t - \sin t \end{pmatrix},\; e^{-t}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t + 2\sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} x &= e^{-t}(-C_1 \cos t - C_2 \sin t), \\ y &= e^{-t}[(2C_1 + C_2)\cos t + (-C_1 + 2C_2)\sin t], \\ &\quad t \in \mathbb{R},\; (C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Bod rovnováhy je typu ohnisko, trajektorie jsou spirály, které se na něj navíjejí (neboť $\Re\lambda_{1,2} = -1 < 0$).

6.2 Nehomogenní soustavy

Příklad 6.2.1.

B. Je dána lineární nehomogenní soustava

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

s počáteční podmínkou

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Eulerovou metodou určete obecné řešení X_H příslušné homogenní soustavy.

b) Najděte bod rovnováhy a stanovte jeho typ. Určete obecné řešení dané soustavy.

Návod. Využijte toho, že soustava je autonomní a za partikulární řešení volte bod rovnováhy, tj. $X_P = X^R$.

c) Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy.

Výsledky. a)

$$X_H = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},\; (C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}).$$

b) Bod rovnováhy

$$X^R = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

typu sedlo. Obecné řešení:

$$X = X_H + X^R.$$

c) Cauchyova úloha: $C_1 = -C_2 = -\frac{1}{4}$.

Příklad 6.2.2.

A. Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy pro lineární nehomogenní soustavu

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + t^2, \\ \dot{y} &= 4x + t + 4, \end{cases}$$

s počátečními podmínkami

$$x(0) = 0,\; y(0) = -\frac{1}{4}.$$

Návod. Užijte eliminační metodu: první rovnici soustavy zderivujte a za $\dot{y}$ dosaďte z druhé rovnice.

Výsledek. Obecné řešení rovnice $\ddot{x} + 4x = t - 4$:

$$x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{t}{4} - 1, \qquad t \in \mathbb{R},\; (C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Následně, z první rovnice soustavy:

$$\begin{aligned} y &= -\dot{x} + t^2 = \\ &= 2C_1 \sin 2t - 2C_2 \cos 2t + t^2 - \frac{1}{4}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cauchyova úloha: $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

7 Autonomní nelineární soustavy

7.1 Existence, jednoznačnost

Příklad 7.1.1.

$\boxed{\mathbf{B}}$. Je dána nelineární autonomní soustava

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sqrt{x^2-1} + x\ln y, \\ \dot{y} &= \dfrac{1}{x-1} + \sqrt[3]{y^2-1} + 1. \end{cases}$$

a) Zapište postačující podmínky existence a jednoznačnosti maximálního řešení Cauchyovy úlohy pro danou soustavu.

b) Zapište všechny oblasti (v $\mathbb{R}^3$), v nichž jsou tyto podmínky splněny.

c) Ve fázové rovině znázorněte a zapište oblasti, jejichž body prochází právě jedna fázová trajektorie.

Výsledky.
a) Označme pravé strany soustavy $P = \sqrt{x^2-1} + x\ln y$ a $Q = \frac{1}{x-1} + \sqrt[3]{y^2-1} + 1$. Společným definičním oborem funkcí P a Q jsou dvě disjunktní části poloroviny $y > 0$, a to množina $\{\,[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1,\, y > 0\,\} \cup \{\,[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \le -1,\, y > 0\,\}$. Postačující podmínkou existence a jednoznačnosti maximálního řešení Cauchyovy úlohy je spojitost jejich parciálních derivací na oblasti. Parciální derivace sestavené do Jacobiovy matice

$$J = \frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \ln y & \dfrac{x}{y} \\ \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \dfrac{2y}{3\sqrt[3]{(y^2-1)^2}} \end{pmatrix}$$

jsou spojité pro $x^2 > 1$, $y \ne \pm 1$, $y > 0$, tj. ve čtyřech oblastech

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\,[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1,\, y > 1\,\}, \\ H_2 &= \{\,[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1,\, 0 < y < 1\,\}, \\ H_3 &= \{\,[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x < -1,\, y > 1\,\}, \\ H_4 &= \{\,[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x < -1,\, 0 < y < 1\,\}. \end{aligned}$$

(Obecně platným důsledkem je i spojitost samotných funkcí P a Q na H_i; v tomto příkladu je stejně zřejmá.)

b) Oblasti, v nichž jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti maximálního řešení Cauchyovy úlohy, jsou:

$$G_i = \{\,[t,x,y] \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R},\, [x,y] \in H_i\,\}, \\ i = 1,2,3,4.$$

c) Oblasti, jejichž body prochází právě jedna trajektorie, jsou H_i, $i = 1,2,3,4$.

Příklad 7.1.2.

$\boxed{\mathbf{B}}$. Totéž zadání jako v Příkladu 7.1.1 pro soustavu

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sqrt{y-1} - \ln\frac{y}{x}, \\ \dot{y} &= y - x^2 - \sqrt[3]{y-x}. \end{cases}$$

Výsledky. a) Jacobiova matice J pravých stran, tj.

$$P = \sqrt{y-1} - \ln\frac{y}{x}, \quad Q = y - x^2 - \sqrt[3]{y-x},$$

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{2\sqrt{y-1}} - \dfrac{1}{y} \\ -2x + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(y-x)^2}} & 1 - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(y-x)^2}} \end{pmatrix}$$

je spojitá pro $x > 0$, $y \ne 0$, $y > 1$, $y \ne x$, tj. v oblastech

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\,[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < y < x\,\} \quad \text{a} \\ H_2 &= \{\,[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y,\, y > 1\,\}. \end{aligned}$$

b) Oblasti, v nichž jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti maximálního řešení Cauchyovy úlohy jsou:

$$G_i = \{\,[t,x,y] \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R},\, [x,y] \in H_i\,\}, \quad i = 1,2.$$

c) H_1, H_2.

7.2 Newtonovské soustavy

Příklad 7.2.1.

$\boxed{\mathbf{B}}$. Je dána nelineární autonomní soustava

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -(\frac{1}{4} - x^2)\,x. \end{cases}$$

a) Ukažte, že každým bodem fázové roviny prochází právě jedna fázová trajektorie soustavy.

Návod. Vypočtěte Jacobiovu matici pravých stran soustavy a popište vlastnost, která zajišťuje uvedené tvrzení.

b) Určete všechny body rovnováhy.

c) Určete rovnici fázových trajektorií. Speciálně určete trajektorii procházející bodem $M = [1, 1]$.

Návod. Fázové trajektorie newtonovské soustavy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -g(x), \end{aligned}$$

(ekvivalentní rovnici $\ddot{x} + g(x) = 0$), kde $g \in C^1(J)$, jsou určeny vztahem (zvaným první integrál)

$$\frac{y^2}{2} + \int g(x)\,dx = C(\text{onst.})$$

(Je to řešení rovnice se separovatelnými proměnnými $g(x)\,dx + y\,dy = 0$.)

Výsledky.
a) Jacobiova matice J pravých stran, tj.

$$P = y,\ \ Q = -\big(\frac{1}{4} - x^2\big)\,x,\ \ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} + 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

je spojitá v $\mathbb{R}^2$.

b) Tři body rovnováhy:

$$[0,\,0],\ [\frac{1}{2},\,0],\ [-\frac{1}{2},\,0]$$

.

c) Ostatní trajektorie:

$$y^2 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{2} = C$$

(řešení rovnice se separovatelnými proměnnými: $y\,dy = (-\frac{1}{4}x + x^3)\,dx)$, $C = \frac{3}{4}$.

Příklad 7.2.2.

$\boxed{\mathbf{B}}$. Totéž zadání jako v Příkladu 7.2.1 pro soustavu

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\dfrac{x}{1+x^2}. \end{cases}$$

Výsledky.
a) Jacobiova matice J pravých stran, tj.

$$P = y,\ \ Q = -\frac{x}{1+x^2},\ \ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

je spojitá v $\mathbb{R}^2$.

b) Jediný bod rovnováhy:

$$[0,\,0].$$

c) Rovnice trajektorií:

$$y^2 + \ln(1+x^2) = C, \quad C = 1 + \ln 2.$$

Příklad 7.2.3.

$\boxed{\mathbf{B}}$. Dynamický systém je dán nelineární rovnicí druhého řádu (pro funkci $t \mapsto x(t)$):

1. $\ddot{x} - 9x + x^3 = 0$;
2. $\ddot{x} + 2x - x^2 = 0$;
3. $\ddot{x} + \sin x = 0$.

a) Převeďte rovnici na autonomní soustavu druhého řádu (pro funkce $x = x(t)$ a $y = \dot{x}(t)$). Dokažte, že každým bodem fázové roviny prochází právě jedna fázová trajektorie soustavy.

Návod. Spočtěte Jacobiovu matici pravých stran soustavy a napište, která její vlastnost dokazuje uvedený výrok.

b) Určete všechny body rovnováhy.

c) Určete rovnici fázových trajektorií. U třetí soustavy speciálně trajektorii procházející bodem $M = [\frac{\pi}{2}, 0]$.

Návod. Viz Příklad 7.2.1 c).

Výsledky. 1. a) Jacobiova matice J pravých stran newtonovské soustavy

$$\dot{x} = y,\ \ \dot{y} = 9x - x^3,\ \ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

je spojitá v $\mathbb{R}^2$.

b) Tři body rovnováhy: $[0,\,0]$, $[-3,\,0]$, $[3,\,0]$.

c) Ostatní trajektorie: $y^2 + \frac{x^4}{2} - 9x^2 = C$ (řešení rovnice se separovatelným proměnnými: $y\,dy = (9x - x^3)\,dx)$.

2. a) Jacobiova matice J pravých stran newtonowské soustavy

$$\dot{x} = y,\ \ \dot{y} = -2x + x^2,\ \ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 + 2x & 0 \end{pmatrix}$$

je spojitá v $\mathbb{R}^2$.

b) Dva body rovnováhy: [0, 0], [2, 0],

c) Ostatní trajektorie: $y^2 + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 = C$.

3. a) Jacobiova matice J pravých stran newtonowské soustavy

$$\dot{x} = y, \ \ \dot{y} = -\sin x, \ \ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{pmatrix}$$

je spojitá v $\mathbb{R}^2$.

b) Nekonečně mnoho bodů rovnováhy: $[k\pi, 0]$, k celé.

c) $\frac{y^2}{2} = \cos x + C$, $(\cos x + C \geq 0)$, speciálně trajektorie procházející bodem $M = [\frac{\pi}{2}, 0]$: $C = 0$, tj. $y^2 = 2\cos x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
(*Poznámka.* Trajektorie jsou uzavřené $\mapsto$ řešení jsou periodická.)

7.3 Obecné soustavy - fázový portrét

Příklad 7.3.1.

A. Totéž zadání jako v Příkladu 7.2.1 pro soustavy

1.
$$\begin{cases} \dot{x} &= 1 - 2xy, \\ \dot{y} &= x + y^2. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \dot{x} &= y\ \ln(1 + x^2), \\ \dot{y} &= -\dfrac{xy^2}{1 + x^2} \end{cases}$$

U druhé soustavy určete speciálně rovnici trajektorie procházející bodem

a) $M_1 = [1, 1]$ resp.

b) $M_2 = [0, 1]$.

Výsledky.
1. a) Jacobiova matice J pravých stran, tj.

$$P = 1 - 2xy, \ \ Q = x + y^2,$$
$$J = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$$

je spojitá v $\mathbb{R}^2$.

b) Jediný bod rovnováhy:

$$\left[-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right].$$

c) Exaktní rovnice $(x + y^2)\,dx + (2xy - 1)\,dy = 0$, rovnice trajektorie:

$$\frac{x^2}{2} + xy^2 - y = C, \quad C = \frac{1}{2}.$$

2. a) Jacobiova matice soustavy

$$J = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{1+x^2} & \ln(1 + x^2) \\ \frac{y^2\,(-1+x^2)}{(1+x^2)^2} & -\frac{2xy}{1+x^2} \end{pmatrix}$$

je spojitá v $\mathbb{R}^2$.

b) Body rovnováhy: všechny body os souřadných.

c) Exaktní rovnice $\frac{xy^2}{1+x^2}\,dx + y\ln(1 + x^2)\,dy = 0$. Rovnice pro trajektorie: $\frac{y^2}{2}\ln(1 + x^2) = C$. Speciálně trajektorie procházející bodem M_1: $C = \frac{1}{2}\ln 2$, bod M_2 je bodem rovnováhy (jednobodová trajektorie).

Příklad 7.3.2.

A. Je dána nelineární autonomní soustava

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x + y - 1, \\ \dot{y} &= -\dfrac{1}{x} - 3y + 3. \end{cases}$$

a) Určete oblasti, jejichž body prochází právě jedna fázová trajektorie soustavy.

b) Určete všechny body rovnováhy.

c) Určete rovnici fázových trajektorií. Speciálně určete trajektorii procházející bodem $M = [1, 1]$.

Výsledky. a) Jacobiova matice J pravých stran, tj. $P = 3x + y - 1$, $Q = -\frac{1}{x} - 3y + 3$, $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \frac{1}{x^2} & -3 \end{pmatrix}$, je spojitá v pravé polorovině $H_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \in \mathbb{R}\}$ a v levé polorovině $H_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ y \in \mathbb{R}\}$.

b) Dva body rovnováhy: $[\frac{1}{3}, 0]$ a $[-\frac{1}{3}, 2]$.

c) $-Q\,dx + P\,dy = 0$ je exaktní rovnice, rovnice trajektorie:

$$\ln|x| + 3x(y - 1) + \frac{(y - 1)^2}{2} = C, \quad C = 0.$$