Typové příklady zkouškových testů z MIII - sada 1

A1. Nechť f označuje 2π-periodickou funkci (f má periodu $2L = 2\pi$), která je v intervalu $(-\pi,\, \pi]$ definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi,\, 0], \\ x, & x \in (0,\, \pi]. \end{cases}$$

a) Znázorněte graf funkce f v intervalu $J = [-2\pi,\, 2\pi]$ a vypočtěte její Fourierovy koeficienty.

b) Zapište Fourierovu řadu funkce f a aproximujte funkci částečným součtem až po čtvrtou harmonickou ($k = 4$).

c) Určete a graficky znázorněte součet řady v intervalu J. Určete hodnoty součtu v bodech $x = -\pi$, $x = 0$ a $x = \pi$.

A2. a) Určete první čtyři nenulové členy rozvoje funkce $g(x) = \ln(1+x)$ do Taylorovy řady se středem v bodě 0.

Návod. Pomocí vzorce pro součet geometrické řady určete rozvoj funkce $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ a pak integrujte člen po členu.

b) Ukažte, že Cauchyova úloha (pro funkci $y = y(x)$):

$$\begin{cases} y'' + y\ln(1+x) &= x + e^x, \\ y(0) = -1, \quad y'(0) &= -1, \end{cases}$$

má právě jedno maximální řešení a určete interval J tohoto řešení. Ukažte, že existuje řešení úlohy ve tvaru součtu mocninné řady se středem v bodě 0 a určete interval konvergence I této řady.

c) Řešení úlohy aproximujte polynomem 4. stupně.

A3. Je dána diferenciální rovnice (pro funkci $y = y(t)$): $\ddot{y} + 9y = 6\cos 3t$.

a) Určete fundamentální systém řešení příslušné homogenní rovnice a zapište její obecné řešení.

b) Metodou odhadu určete partikulární řešení dané nehomogenní rovnice a zapište její obecné řešení.

c) Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy pro danou nehomogenní rovnici s počátečními podmínkami $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$. Nezapomeňte uvést interval maximálního řešení.

A4. Je dána nelineární autonomní soustava

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x + y - 1, \\ \dot{y} &= -\dfrac{1}{x} - 3y + 3. \end{cases}$$

a) Spočtěte Jacobiovu matici pravých stran dané soustavy. Zapište oblasti ve fázové rovině, jejichž body prochází právě jedna fázová trajektorie.

b) Určete všechny body rovnováhy dané soustavy.

c) Určete rovnici fázové trajektorie procházející bodem $M = [1, 1]$.

Výsledky.

A1. a)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{1}{k^2\pi}\left[(-1)^k - 1\right] = \begin{cases} 0, & \text{je-li } k \text{ sudé}, \\ -\dfrac{2}{k^2\pi}, & \text{je-li } k \text{ liché}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{1}{k}(-1)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

b)

$$f(x) \approx \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi}\cos kx + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin kx\right) \quad \text{nebo}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos[(2m-1)x]}{(2m-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k},$$

$$s_4(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x.$$

c) Fourierova řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Součet $s(x)$ je roven $f(x)$ vyjma lichých násobků π, v nichž je roven $\frac{\pi}{2}$.

A2. a)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad x \in (-1,\, 1),$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

b) Spojitost koeficientu a pravé strany na intervalu $J = (-1,\, \infty)$, $0 \in J$.

c)

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \cdots, \quad x \in I = (-1,\, 1),$$

$$y\ln(1+x) = c_0x + \left(c_1 - \frac{c_0}{2}\right)x^2 + \cdots, \quad x \in I,$$

$$x + e^x = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$y \approx -1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4.$$

A3. $y = t\sin 3t + C_1\cos 3t + C_2\sin 3t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}),$
Cauchyova úloha: $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

A4. a) Jacobiova matice J pravých stran, tj. $P = 3x + y - 1$, $Q = -\frac{1}{x} - 3y + 3$, $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \frac{1}{x^2} & -3 \end{pmatrix}$, je spojitá v pravé polorovině $H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\, y \in \mathbb{R}\}$ a v levé polorovině $H_2 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\, y \in \mathbb{R}\}$.

b) Dva body rovnováhy: $[\frac{1}{3},\, 0]$ a $[-\frac{1}{3},\, 2]$.

c) $-Q\,dx + P\,dy = 0$ je exaktní rovnice, rovnice trajektorie:

$$\ln|x| + 3x(y-1) + \frac{(y-1)^2}{2} = C, \quad C = 0.$$

Typové příklady zkouškových testů z MIII - sada 1

B1. Nechť f označuje 4-periodickou funkci (f má periodu $2L = 4$), která je v intervalu $(-2, 2]$ definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-2, 0], \\ 2, & x \in (0, 2]. \end{cases}$$

a) Znázorněte graf funkce f v intervalu $J = [-4, 4]$ a vypočtěte její Fourierovy koeficienty.

b) Zapište Fourierovu řadu funkce f a aproximujte funkci částečným součtem prvních čtyř nenulových členů.

c) Určete a graficky znázorněte součet řady v intervalu J. Určete hodnoty součtu v bodech $x = -2$, $x = 0$ a $x = 2$.

B2. a) Určete první čtyři nenulové členy rozvoje funkce $g(x) = \dfrac{1}{2-x}$ do Taylorovy řady se středem v bodě 0. Stanovte interval konvergence této řady.

Návod. Napište $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$ a užijte vzorec pro součet geometrické řady.

b) Ukažte, že Cauchyova úloha (pro funkci $y = y(x)$):

$$\left\{ \begin{aligned} y'' + x\,y &= \frac{1}{2-x}, \\ y(0) = \frac{1}{4}, \quad y'(0) &= 0, \end{aligned} \right.$$

má právě jedno maximální řešení a určete interval J tohoto řešení. Ukažte, že existuje řešení úlohy ve tvaru součtu mocninné řady se středem v bodě 0 a určete interval konvergence I této řady.

c) Řešení úlohy aproximujte polynomem 4. stupně.

B3. Je dána diferenciální rovnice (pro funkci $y = y(t)$):

$$\ddot{y} - 9y = 5e^{2t}.$$

a) Určete fundamentální systém řešení diferenciální rovnice $\ddot{y} - 9y = 0$ a zapište její obecné řešení.

b) Metodou odhadu určete partikulární řešení dané nehomogenní rovnice a zapište její obecné řešení.

c) Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy pro počáteční podmínky $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 3$. Nezapomeňte uvést interval maximálního řešení.

B4. Je dána nelineární autonomní soustava $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -(\frac{1}{9} - x^2)\,x$.

a) Dokažte, že každým bodem fázové roviny prochází právě jedna fázová trajektorie soustavy.

Návod. Spočtěte Jacobiovu matici pravých stran dané soustavy.

b) Určete všechny body rovnováhy dané soustavy.

c) Určete rovnice fázových trajektorií.

Návod. Fázové trajektorie newtonovské soustavy $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -g(x)$ (ekvivalentní rovnici $\ddot{x} + g(x) = 0$), jsou určeny vztahem (prvním integrálem) $\frac{y^2}{2} + \int g(x)\,dx = \text{konst.}$

Výsledky.

B1. a)

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 2dx = 2,$$

$$a_k = \frac{1}{2}\int_0^2 2\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$b_k = \frac{1}{2}\int_0^2 2\sin\frac{k\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{k\pi}\left[1 - (-1)^k\right] = \begin{cases} 0, & \text{je-li } k \text{ sudé}, \\ \dfrac{4}{k\pi}, & \text{je-li } k \text{ liché}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

b)

$$f(x) \approx 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k}\sin\frac{k\pi x}{2} \quad \text{nebo}$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2},$$

$$s_5(x) = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}\right).$$

c) Fourierova řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Součet $s(x)$ je roven $f(x)$ vyjma čísel $0, \pm 2, \pm 4, \ldots$, (celých násobků 2), v nichž je roven 1.

B2. a)

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \cdots\right), \quad x \in I = (-2, 2).$$

b) Spojitost koeficientu a pravé strany na intervalu $J = (-\infty, 2)$, $0 \in J$.

c)

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \cdots, \quad x \in I,$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \cdots, \quad x \in I,$$

$$x\,y = c_0x + c_1x^2 + \cdots, \quad x \in I.$$

$$y \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{96}x^4.$$

B3.

$$y = -e^{2t} + C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Cauchyova úloha: $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

B4. a) Jacobiova matice J pravých stran

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{9} + 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

je spojitá v $\mathbb{R}^2$.

b) Tři body rovnováhy: $[0, 0]$, $[\frac{1}{3}, 0]$, $[-\frac{1}{3}, 0]$.

c) $y^2 + \frac{x^2}{9} - \frac{x^4}{2} = C$ (řešení rovnice se separovatelnými proměnnými: $y\,dy = (-\frac{x}{9} + x^3)\,dx$).

Typové příklady zkouškových testů z MIII - sada 2

A1. Je dána mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{8^k\,(k^2+1)}(x-2)^{3k}.$$

a) Vypočtěte poloměr konvergence.

b) Určete všechna x, pro něž řada konverguje absolutně a všechna x, pro něž konverguje relativně.

c) Určete všechna x, pro něž řada diverguje.

A2. a) Napište Taylorovu řadu funkce e^{-t^2} se středem v bodě 0.

b) Vypočtěte primitivní funkci $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ k funkci e^{-x^2} pomocí integrování člen po členu.

c) Vypočtěte $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ s přesností na 2 desetinná místa, tj. s chybou menší než nebo rovnou $5\cdot 10^{-3}$.

Návod. Užijte výsledku, který platí pro alternující řady $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,c_k$ $(c_k>0)$, které splňují předpoklady Leibnizova kritéria: chyba aproximace součtu s částečným součtem s_n je menší než absolutní hodnota prvního vynechaného členu, tedy $|s-s_n|<c_{n+1}$.

A3. a) Najděte obecné řešení lineární nehomogenní rovnice (pro funkci $y=y(x)$)

$$y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{x+3}.$$

b) Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy dané rovnicí a počáteční podmínkou $y(-2)=4$. Nezapomeňte uvést interval maximálního řešení.

A4. a) Určete všechna $p\in\mathbb{R}$, pro něž lineární soustava

$$\dot X=\begin{pmatrix}-1 & p\\ 5 & 1\end{pmatrix}X$$

má izolovaný bod rovnováhy. Stanovte typ izolovaného bodu rovnováhy v závislosti na parametru p.

b) Pro $p=3$ určete fundamentální systém řešení dané soustavy (Eulerovou metodou), zapište obecné řešení dané soustavy a určete maximální řešení Cauchyovy úlohy s počáteční podmínkou

$$X(0)=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}.$$

c) Pro $p=3$ zapište rovnice přímek, na nichž leží polopřímkové fázové trajektorie (pokud existují) a graficky je znázorněte ve fázové rovině (včetně orientace). Graficky znázorněte fázovou trajektorii maximálního řešení Cauchyovy úlohy. Pokud je trajektorie uzavřená křivka, najděte primitivní (nejmenší kladnou) periodu řešení.

Výsledky.

A1. Interval konvergence $I=(0,\,4)$. Řada konverguje absolutně pro $x\in I$, relativně (podle Leibnizova kritéria) v pravém krajním bodě $x=4$ a diverguje pro $x\in(-\infty,\,0]\cup(4,\,+\infty)$.

A2. a) Použijeme známý rozvoj funkce e^x, $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, $x\in\mathbb{R}$, kde dosadíme $x=-t^2$.

b) Integrací člen po členu dostaneme

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt=x-\frac{x^3}{1!\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{k!\,(2k+1)},\quad x\in\mathbb{R}.$$

c)

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,(2k+1)},$$

řada splňuje předpoklady Leibnizova kritéria a odtud

$$\left|\int_0^1 e^{-x^2}\,dx-s_n\right|<\frac{1}{(n+1)!\,(2n+3)}\le\frac{5}{1000}$$

pokud $n\ge 3$. Součet $s_3=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}=\frac{78}{105}=0.743$ dává výsledek přesně na 2 desetinná místa.

A3. Obecné řešení:

$$y=\frac{x-3\ln(x+3)+C}{x},\quad x\in(-3,0),\quad (C\in\mathbb{R}).$$

Maximální řešení Cauchyovy úlohy: $C=-6$.

A4. a) BR $[0,\,0]$ je izolovaný právě tehdy, když determinant matice soustavy $\Delta=-1-5p$ je nenulový, tj. $p\neq-\dfrac{1}{5}$. Jestliže $p>-\dfrac{1}{5}$, je BR typu sedlo. Jestliže $p<-\dfrac{1}{5}$, je BR typu střed.

b) Pro $p=3$:

$$\lambda_1=-4,\ V^1=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\qquad \lambda_2=4,\ V^2=\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}.$$

Fundamentální systém řešení (na $\mathbb{R}$):

$$X^1=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^{-4t},\quad X^2=\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}e^{4t},\quad t\in\mathbb{R}.$$

$$\text{Obecné řešení: } X=C_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^{-4t}+C_2\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}e^{4t},\quad t\in\mathbb{R},\quad (C_1,\,C_2\in\mathbb{R}).$$

$$\text{Cauchyova úloha: } C_1=-1,\ C_2=0,\ X=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}e^{-4t}.$$

c) Polopřímkové fázové trajektorie na přímkách o směrových vektorech V^1 a V^2, tj. na přímkách $y=-x$, $y=\frac{5}{3}x$, BR $[0,\,0]$ typu sedlo, fázová trajektorie maximálního řešení Cauchyovy úlohy je polopřímka $y=-x$, $x<0$, orientovaná směrem do počátku.

Typové příklady zkouškových testů z MIII - sada 2

B1. a) Určete Fourierovu sinovou řadu 2π–periodické funkce f, pro níž

$$f(x) = -1, \quad 0 < x < \pi.$$

b) Zapište součet prvních čtyř nenulových členů.

c) Určete a graficky znázorněte součet řady pro $-2\pi < x < 2\pi$.

B2. Je dána mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{4^k\,(2k+1)} (x+2)^{2k}.$$

a) Vypočtěte poloměr konvergence a určete interval konvergence.

b) Určete x, pro něž řada konverguje absolutně a x, pro něž řada diverguje. Situaci v krajních bodech intervalu konvergence nevyšetřujte.

c) Vypočtěte koeficienty $c_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0, 1, 2$, Taylorovy řady funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x}$$

v bodě $x_0 = 0$ a zapište první tři nenulové členy Taylorova rozvoje této funkce v bodě 0.

B3. a) Určete oblast v rovině $\mathbb{R}^2$, v níž jsou splněny postačující podmínky existence a jednoznačnosti maximálního řešení Cauchyovy úlohy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}, \quad y(0) = -1.$$

b) Spočtěte maximální řešení uvedené úlohy, včetně intervalu.

B4. Je dána lineární soustava

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X.$$

a) Spočtěte vlastní čísla a příslušné vlastní vektory matice dané soustavy.

b) Určete fundamentální systém řešení dané soustavy (Eulerovou metodou) a zapište její obecné řešení. Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy pro počáteční podmínku

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Nezapomeňte uvést interval maximálního řešení.

c) Ukažte, že soustava má právě jeden bod rovnováhy a určete jeho typ. Zapište rovnice přímek, na nichž leží polopřímkové fázové trajektorie (pokud existují). Graficky znázorněte ve fázové rovině polopřímkové fázové trajektorie a fázovou trajektorii maximálního řešení (včetně orientace).

Výsledky.

B1. a)

$a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$b_k = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin kx\,dx = \frac{2}{k\pi}\,\cos kx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{k\pi}\left[(-1)^k - 1\right] = \begin{cases} 0, & \text{je-li } k \text{ sudé}, \\ -\dfrac{4}{k\pi}, & \text{je-li } k \text{ liché}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

b)

$$f(x) \approx -\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)\,x]}{2k-1} = -\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \cdots\right).$$

c) Řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a na intervalu $(-2\pi, 2\pi)$ pro součet platí

$$s(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi), \\ 1, & x \in (-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi), \\ 0, & x \in \{-\pi,\, 0,\, \pi\}. \end{cases}$$

B2. a)–b) Interval konvergence $I = (-4, 0)$. Řada absolutně konverguje pro $x \in I$ a diverguje pro $x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$. Poznámka. V krajních bodech konverguje relativně (podle Leibnizova kritéria).

c)

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9}\,x^2 + \cdots.$$

B3. V oblasti (polorovině) $G = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R},\, y < 0\}$ je spojitá funkce $f(x, y) = \dfrac{3x^2}{2y}$ a její parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{3x^2}{2y^2}$ a $[0, -1] \in G$. Maximální řešení Cauchyovy úlohy:

$$y = -\sqrt{x^3+1}, \quad x \in (-1, +\infty).$$

B4. a)

$$\lambda_1 = 2,\, V^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -3,\, V^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b) Fundamentální systém řešení (na $\mathbb{R}$):

$$X^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad X^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Obecné řešení: } X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Cauchyova úloha: } C_1 = -C_2 = 1, \quad X = \begin{pmatrix} e^{2t} - e^{-3t} \\ e^{2t} + 4e^{-3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) Polopřímkové fázové trajektorie na přímkách $y = x$, $y = -4x$, BR $[0, 0]$ typu sedlo, $\vec{\tau}_{[0,\,5]} \parallel (1, -2)^T$.