

Opakovací kurs středoškolské matematiky – podzim

František Mráz

Ústav technické matematiky, Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz

I. Mocniny, odmocniny, algebraické výrazy

Upravte (zjednodušte), případně určete číselnou hodnotu. U výrazů udejte, kdy mají smysl.

1. $4n^2 \cdot 3(-n^3)(-2n^4)$ 2. $((-2)^{-1})^{-6}$ 3. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-14} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$
4. $\left(\frac{2ab}{25x^2y^2}\right)^{-3} : \left(\frac{4a}{5xy^2}\right)^{-2}$ 5. $\frac{ax+bx}{ax-bx}$ 6. $\frac{x-1}{x^2-x}$
7. $8m - [6m - (2n + 4m)] + 4n$ 8. $3x - 4y - (-5y - 6x) - (7x + 8y)$
9. $(2x + 2)x - (x^2 + 2x + 4)$ 10. $4n^2 - (2n - 3)^2$
11. $\frac{15x + 4y}{12} - \frac{3y - 22x}{9}$ 12. $\left(\frac{1}{b+1} - \frac{2b}{b^2-1}\right) : \frac{b}{1-b}$
13. $(p + q) : \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$ 14. $\left(\frac{x-1}{x-2} - \frac{x}{x-1}\right) \left(x - \frac{3x}{x+1}\right)$
15. $\frac{15}{-\frac{32}{6}}$ 16. $\frac{\frac{6x}{yz}}{\frac{8xz}{y}}$ 17. $\frac{b-1 + \frac{6}{b-6}}{b-2 + \frac{3}{b-6}}$ 18. $\left(\frac{-16}{5}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{\frac{64}{25}}{2 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}}$

Výsledky kapitoly I

1. $24n^9$ 2. 64 3. $\left(\frac{4}{3}\right)^4$ 4. $\frac{1250x^4y^2}{ab^3}$, $abxy \neq 0$ 5. $\frac{a+b}{a-b}$, $x \neq 0, a-b \neq 0$
6. $\frac{1}{x}$, $x \neq 0, x \neq 1$ 7. $6m + 6n$ 8. $2x - 7y$ 9. $x^2 - 4$ 10. $12n - 9$ 11. $\frac{133x}{36}$
12. $\frac{1}{b}$, $b \neq 0, b \neq \pm 1$, 13. pq , $p \neq 0, q \neq 0, p+q \neq 0$ 14. $\frac{x}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1, x \neq 2$
15. $-\frac{5}{8}$ 16. $\frac{3}{4z^2}$, $xyz \neq 0$ 17. $\frac{b-4}{b-5}$, $b \neq 3, b \neq 5, b \neq 6$ 18. 0, (zkouška z př. 85)

II. Rovnice lineární, kvadratické, kubické, s absolutní hodnotou

Řešte dané rovnice a proveďte zkoušku.

19. $3(4-x) - 6(3-2x) = 2x - 27$ 20. $\frac{t}{2} - \frac{t+5}{3} = \frac{t-3}{2} - \frac{t-2}{3}$
21. $\frac{y+5}{10} - \frac{y-4}{8} = 1$ 22. $\frac{25x+6}{15} - (x-1) = \frac{2x}{3} + \frac{7}{5}$
23. $5 + \frac{3}{3u-12} = \frac{5-u}{u-4}$ 24. $|2x-7| + |2-x| = 3$

Řešte dané rovnice a proveďte zkoušku:

25. $x^2 + 5x = 0$ 26. $(3x+1)(x-\sqrt{5}) = 0$ 27. $(3-\lambda)^2 + 4 = 0$
28. $x^3 - 4x^2 + 5x = 0$ 29. $3x^2 \cdot x - (x^3 + 16) = 0$ 30. $(3-\lambda)(3+\lambda) - 4 = 0$
31. $(1-\lambda)(-1-\lambda) + 5 = 0$ 32. $(2x+3)x - (x^2 + 3x + 9) = 0$

Výsledky kapitoly II

19. $x = -3$ 20. Nemá řešení 21. $y = 0$ 22. $x \in \mathbb{R}$ 23. Nemá řešení, neboť $4 \notin D$
24. $x_1 = 2, x_2 = 4$ 25. $x_1 = 0, x_2 = -5$ 26. $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \sqrt{5}$ 27. $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$
28. $x_1 = 0, x_{2,3} = 2 \pm i$ 29. $x = 2$ 30. $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{5}$ 31. $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ 32. $x_{1,2} = \pm 3$

III. Funkce

Předpokládá se znalost definičních oborů, grafů a základních vlastností "elementárních" funkcí (funkce mocninná, lineární, kvadratická, absolutní hodnota, lineární lomená, odmocnina, exponenciální, logaritmická, goniometrické)

Určete definiční obor dané funkce $y = f(x)$:

$$\begin{array}{llll} 33. y = 3x - 5 & 34. y = 4x^7 - 5x^3 + \frac{3}{2}x - 8 & 35. y = \frac{x^3 - 8}{x} & 36. y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} \\ 37. y = \frac{2x - 3}{x^2 + 2x - 3} & 38. y = \sqrt{5 - 3x} & 39. y = \frac{x - 2}{\sqrt{x + 5}} & 40. y = \frac{3x}{\sqrt{2 - x^2}} \\ 41. y = e^{100x-7} & 42. y = (x + 2) e^{1/x} & 43. y = \sqrt{1 - |x|} & 44. y = \sqrt{\sin x} \\ 45. y = \ln(x^2 - 1) & 46. y = \ln(x^2 + 2x + 3) & 47. y = \frac{x}{\ln x} & \end{array}$$

Určete hodnoty logaritmické funkce:

$$48. \ln 1 \quad 49. \ln 0 \quad 50. \ln e \quad 51. \ln \sqrt[3]{e} \quad 52. \ln \left(\frac{1}{e^2} \right) \quad 53. \ln(-2)$$

Určete logaritmus daného výrazu při daném základu z

$$54. V = \frac{1}{3} \pi r^2 v, z = 5 \quad 55. y = \sqrt[3]{\frac{b^2}{4}}, z = 4 \quad 56. T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}, z = e \quad 57. y = \frac{a^2}{x\sqrt{y}}, z = a$$

Určete výraz V , je-li dán jeho logaritmus

$$\begin{array}{ll} 58. \ln V = \ln 4 - \ln 3 + \ln \pi + 3 \ln r & 59. \log_2 V = 3 \log_2 x + (n + 3) \log_2 y - 3 \\ 60. \log_a V = \frac{3}{4} \log_a(x + 2) - 2 \log_a y & 61. \log_5 V = 2 \log_5(x - 2) + 3 \log_5(x + 2) - 2 \log_5(x^2 - 4) \end{array}$$

Výsledky kapitoly III

$$33. x \in \mathbb{R} \quad 34. x \in \mathbb{R} \quad 35. x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad 36. x \in \mathbb{R} \quad 37. x \in \mathbb{R} - \{1, -3\}$$

$$38. x \in (-\infty, 5/3) \quad 39. x \in (-5, +\infty) \quad 40. x \in (-\sqrt{2}, +\sqrt{2}) \quad 41. x \in \mathbb{R}$$

$$42. x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad 43. x \in \langle -1, 1 \rangle \quad 44. \text{sjednocení intervalů } \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$$

$$45. x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \quad 46. x \in \mathbb{R} \quad 47. x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$48. 0 \quad 49. \text{není definován} \quad 50. 1 \quad 51. 1/3 \quad 52. -2 \quad 53. \text{není definován}$$

$$54. \log_5 V = \log_5 \pi + 2 \log_5 r + \log_5 v - \log_5 3 \quad 55. \log_4 y = \frac{2}{3} \log_4 b - \frac{1}{3}$$

$$56. \ln T = \ln 2 + \ln \pi + \frac{1}{2}(\ln l - \ln 2 - \ln g) \quad 57. \log_a y = 2 - \log_a x - \frac{1}{2} \log_a y$$

$$58. V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad 59. V = \frac{x^3 y^{n+3}}{8} \quad 60. V = \sqrt[4]{(x+2)^3/y^2} \quad 61. V = \frac{(x-2)^2(x+2)^3}{(x^2-4)^2} = x+2$$

IV. Rovnice exponenciální, logaritmické, s odmocninami

Řešte dané rovnice a proveďte zkoušku.

$$62. 3^x = 81 \quad 63. \left(\frac{1}{4} \right)^x = 16 \quad 64. 2^x = -8 \quad 65. 2011^x = 1 \quad 66. e^x = \frac{1}{e}$$

$$67. \sqrt{128} = 8^x \quad 68. \left(\frac{3}{2} \right)^x = \frac{8}{27} \quad 69. 5^{x^2-2} \cdot 5^{3x+4} = 1 \quad 70. x^2 e^x + 3x e^x - 4e^x = 0$$

$$71. (5x - 1)e^x + 5e^x = 0 \quad 72. e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 0$$

$$73. \ln x = 0 \quad 74. \ln x = 1 \quad 75. \ln x = 3 \quad 76. \ln x + 1 = 0 \quad 77. \ln(\sqrt{x}) = -2$$

$$78. \ln(x+1) = 0 \quad 79. 2 \ln x - 1 = 0 \quad 80. 2x + 3x \ln x = 0 \quad 81. \ln(x^2 - 3) = 0$$

$$82. \frac{\sqrt{x}}{2} - 1 = 0 \quad 83. \sqrt{3x+4} = x \quad 84. x - \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} = 0 \quad 85. 2x \cdot \sqrt{x+2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+2}} = 0$$

Výsledky kapitoly IV

62. $x = 4$ 63. $x = -2$ 64. nemá řešení 65. $x = 0$ 66. $x = -1$ 67. $x = 7/6$
68. $x = -3$ 69. $x_1 = -1, x_2 = -2$ 70. $x_1 = 1, x_2 = -4$ 71. $x = -\frac{4}{5}$ 72. $x = 1$
73. $x = 1$ 74. $x = e$ 75. $x = e^3$ 76. $x = e^{-1} = 1/e$ 77. $x = \frac{1}{e^4}$ 78. $x = 0$
79. $x = \sqrt{e}$ 80. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ 81. $x = \pm 2$ 82. $x = 4$ 83. $x = 4, (x = -1 \text{ nevyhovuje})$
84. $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2$ 85. $x_1 = 0, x_2 = -8/5$

V. Nerovnice lineární, kvadratické, s absolutní hodnotou

Řešte dané nerovnice:

86. $2 - 3x \geq 4$ 87. $\frac{4x - 3}{5} < \frac{3x - 4}{2} - \frac{2x - 5}{3}$ 88. $x^3 - 1 > 0$
89. $x^2 - 4 \geq 0$ 90. $x^2 + \frac{7}{2}x - 2 \geq 0$ 91. $2x^2 + 5x < 0$
92. $x^2 - 2x + 5 < 0$ 93. $x^2 + 1 > 0$ 94. $|x - 3| < 2$
95. $|x - 3| < 0$ 96. $|3x + 2| \leq 1$ 97. $|x - 1| < |x - 3|$
98. $\left| \frac{x + 1}{x - 1} \right| \leq 1$ 99. $\frac{3}{x - 3} < 0$ 100. $\frac{x + 2}{2x - 1} \leq 1$

Výsledky kapitoly V

86. $x \in (-\infty, -2/3)$ 87. $x \in (-8, +\infty)$ 88. $x \in (1, +\infty)$ 89. $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
90. $x \in (-\infty, -4) \cup (1/2, +\infty)$ 91. $x \in (-5/2, 0)$ 92. \emptyset 93. $x \in \mathbb{R}$ 94. $x \in (1, 5)$
95. \emptyset 96. $x \in (-1, -1/3)$ 97. $x \in (-\infty, 2)$ 98. $x \in (-\infty, 0)$ 99. $x \in (-\infty, 3)$
100. $x \in (-\infty, 1/2) \cup (3, +\infty)$

VI. Nerovnice exponenciální a logaritmické

Řešte dané nerovnice:

101. $5^x \leq 625$ 102. $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{125}{27}$ 103. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8$ 104. $e^x + x e^x > 0$
105. $\ln x < 0$ 106. $\ln x \geq 1$ 107. $\ln(x + 4) \leq 0$ 108. $x \ln x + 2x \geq 0$

Výsledky kapitoly VI

101. $x \in (-\infty, 4)$ 102. $x \in (-3, +\infty)$ 103. $x \in (-\infty, -3)$ 104. $x \in (-1, +\infty)$
105. $x \in (0, 1)$ 106. $x \in (e, +\infty)$ 107. $x \in (-4, -3)$ 108. $x \in (1/e^2, +\infty)$

VII. Goniometrické funkce

Upravte (zjednodušte) dané výrazy. Určete, pro jaká x mají smysl.

109. $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$ 110. $\cotg x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ 111. $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$

Najděte řešení daných goniometrických rovnic:

112. $\sin^2 x - \sin x = 0$ 113. $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$ 114. $\sin 2x = \cotg x$

Výsledky kapitoly VII

109. $1 - \sin x, x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 110. $\frac{1}{\sin x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 111. $1, x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
112. $x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 113. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 114. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

VIII. Komplexní čísla

(imaginární jednotka, algebraický tvar, goniometrický tvar, aritmetické operace, číslo komplexně sdružené, absolutní hodnota, Moivreova věta)

Upravte, případně určete hodnotu:

115. i^3 116. i^4 117. $i^5 - i^6$ 118. $(3 + 7i)i$ 119. $(2 + 3i)(3 - 4i)$
120. $(3 - 2i)^2$ 121. $(-2 + 3i)(-2 - 3i)$ 122. $(2 - 3i)(1 + 4i) - (2 + 3i)(1 - 4i)$

Určete absolutní hodnotu (velikost) komplexního čísla:

123. $z = 3 + 4i$ 124. $z = 4 - 3i$ 125. $z = -3i$ 126. $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
127. $z = -1 + \frac{1}{2}i$ 128. $z = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i$ 129. $z = \cos x + i \sin x, x \in \mathbb{R}$

Výsledky kapitoly VIII

115. $-i$ 116. 1 117. $i + 1$ 118. $3i - 7$ 119. $18 + i$ 120. $5 - 12i$ 121. 13 122. $10i$
123. $|z| = 5$ 124. $|z| = 5$ 125. $|z| = 3$ 126. $|z| = 1$ 127. $z = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 128. $|z| = 1$ 129. $|z| = 1$

IX. Analytická geometrie v rovině

(body, vektory, hlavně však přímky, kuželosečky a množiny v rovině ohraničené těmito křivkami)

130. Napište parametrický, obecný a směrnicový tvar rovnice přímky, která prochází body $A = [5, 2]$, $B = [9, 4]$. Načrtněte si obrázek.

Určete a načrtněte kuželosečky, které jsou dány následujícími rovnicemi.

131. $x = y^2 - 3$ 132. $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 2 = 0$
133. $x^2 + y^2 + 6y - 3 = 0$ 134. $x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

Načrtněte rovinný obrazec D , který je omezen danými křivkami nebo je zadán nerovnicemi:

135. $x + y \leq 1, x + 1 \geq y \geq 0$ 136. $y \geq 0, y \leq 2 - x, x \geq y^2$
137. $2x + 2y = 5, xy = 1$ 138. $x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq 0$

Výsledky kapitoly IX

130. $x = 5 + 4t, y = 2 + 2t, t \in \mathbb{R}; x - 2y - 1 = 0; y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
131. parabola, osa v ose x , vrchol $V = [-3, 0]$, otevřená doprava 132. elipsa $S = [2, -1]$, $a = 2, b = \sqrt{2}$
133. kružnice $S = [0, -3]$, $r = \sqrt{12}$ 134. hyperbola $S = [3, 1]$, $a = 4, b = 2$
135. rovnoramenný trojúhelník nad osou x , souměrný podle osy y
136. "křivočarý" trojúhelník v prvním kvadrantu ohraničený dvěma úsečkami a částí paraboly
137. obrazec ohraničen v prvním kvadrantu úsečkou a rovnoosou hyperbolou
138. posunutý půlkruh v prvním kvadrantu, $S = [2, 0]$

Literatura:

- [1] J. Černý a kolektiv: **Matematika - přijímací zkoušky na ČVUT**. Nakladatelství ČVUT Praha, 2007
- [2] F.Jirásek a kol.: **Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ**. SPN, Praha 1986
- [3] J.Neustupa: **Matematika I**. Skriptum Strojní fakulty. Nakladatelství ČVUT, Praha 2014 (též starší vydání ...)
- [4] L.Samková: **Sbírka příkladů z matematiky**. Fak. architektury, Nakladatelství ČVUT, Praha 2002
- [5] F.Vejšada, F.Talafous: **Sbírka úloh z matematiky pro SVVŠ**. SPN, Praha 1969

Základní vzorce pro úpravy algebraických výrazů

$$\begin{aligned}a - (b + c) &= a - b - c, & a(b \pm c) &= ab \pm ac \\(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, & (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, & (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), & a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

Vzorce pro počítání s mocninami a odmocninami

(pokud mají uvedené výrazy smysl)

$$\begin{aligned}a^r \cdot a^s &= a^{r+s}, & \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s}, & (a^r)^s &= a^{rs}, & (ab)^r &= a^r b^r, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r}, & a^{-r} &= 1/a^r, & a^{r/s} &= \sqrt[s]{a^r} & \sqrt[r]{ab} &= \sqrt[r]{a} \sqrt[r]{b}\end{aligned}$$

Kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

má řešení
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{kde } D = b^2 - 4ac$$

Základní vlastnosti logaritmů ($x > 0$, $y > 0$, základ $a > 0$, $a \neq 1$)

$$\begin{aligned}\log_a xy &= \log_a x + \log_a y, & \log_a \left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y, & \log_a x^r &= r \log_a x \\ \log_a 1 &= 0, & \log_a \left(\frac{1}{x}\right) &= \log_a 1 - \log_a x = -\log_a x, & \log_a a &= 1\end{aligned}$$

Goniometrické funkce, základní vzorce

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq k\pi$$

Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Aritmetická posloupnost

je zadána rekurentním vztahem $a_{n+1} = a_n + d$, kde d je diference, $n \in \mathbb{N}$, t.j. přirozené číslo

n -tý člen: $a_n = a_1 + (n - 1)d$, součet prvních n členů: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Geometrická posloupnost

je zadána rekurentním vztahem $a_{n+1} = a_n \cdot q$, kde q je kvocient, $n \in \mathbb{N}$,

n -tý člen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, součet prvních n členů: $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Komplexní čísla

Imaginární jednotka i : $i^2 = -1$

$$z = a + bi$$

algebraický tvar komplexního čísla z

$$\bar{z} = a - bi$$

číslo komplexně sdružené s číslem $z = a + bi$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

absolutní hodnota (velikost) komplexního čísla $z = a + bi$

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

goniometrický tvar komplexního čísla z

Moivreův vzorec:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$