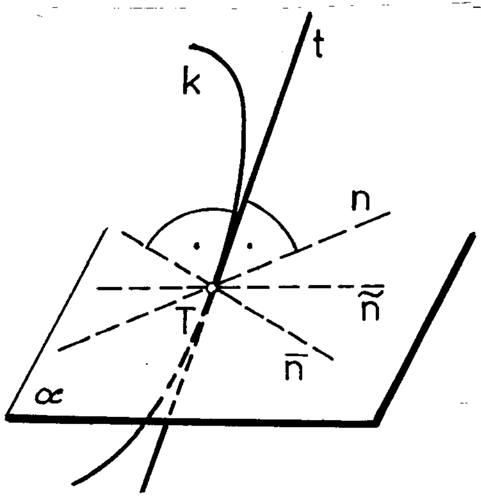
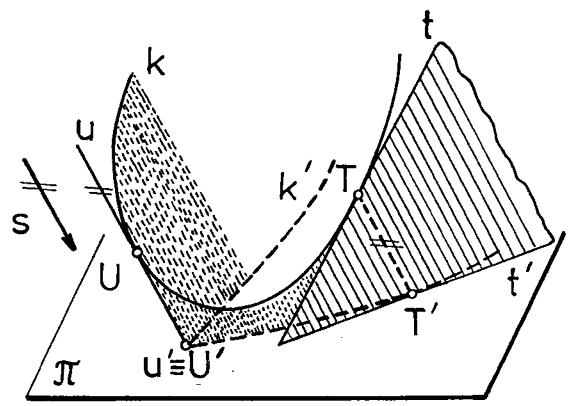
8. PROSTOROVÉ KŘIVKY

Křivka v E_3 je jednoparametrická množina $\{X[x, y, z]\}$ bodů, pro jejichž souřadnice platí $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$, $u \in I \subset R$, kde $x(t), y(t), z(t)$ jsou funkce proměnné t definované na otevřeném intervalu I mající dostatečný počet derivací.
Tečný vektor $\vec{t}$ křivky $\{X(u)\}$ je $\vec{t} = (\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du})$, obvykle předpokládáme $\vec{t} \neq \vec{0}$.
Tečna křivky v jejím bodě T má parametrické vyjádření $X = T + s\,\vec{t}$, $s \in R$.
Normála křivky v bodě T je přímka kolmá k tečně t v bodě T. Normály křivky v bodě T vytvoří rovinu α kolmou k tečně, nazýváme ji **normálovou rovinou** křivky. Na obrázku 8.1a. je znázorněna tečna t křivky k, několik jejích normál a normálová rovina.
Průmětem křivky je křivka, specielně bod.
Průmětem tečny křivky je tečna průmětu křivky nebo bod . Na obrázku 8.1b (rovnoběžné promítání se směrem s na průmětnu π) se tečna t křivky k promítá jako přímka t' , tečna u se promítá jako bod $u' \equiv U'$.

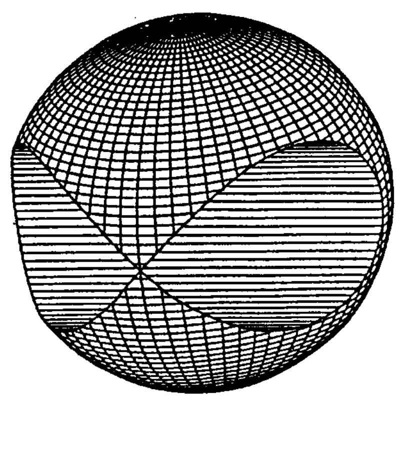


Normálová rovina křivky
Obr8.1a



Průměty tečen t, u křivky
Obr.8.1b

Popsali jsme prostorovou křivku, která je dána parametrickými rovnicemi. Jako příklad uvedeme šroubovici v 8.5.
Prostorovou křivku lze určit i jinými způsoby :
a)**Průniková křivka dvou ploch**
Například rovnicemi
$x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2, \quad (x - r)^2 + y^2 = r^2$
je určená křivka zvaná Vivianiho okno na obrázku 8.2. Je to průniková křivka kulové plochy s válcovou plochou.
b) Křivka určená **množinou opěrných bodů,** které určují interpolační či aproximační křivku (grafické křivky).
c)**Trajektorie bodu** při prostorovém pohybu.



Obr.8.2

8.1 Šroubový pohyb

vzniká složením otáčení kolem osy o a posunutí ve směru osy o , přičemž velikost posunutí je přímo úměrná velikosti otočení.

Sledujte obrázek 8.3 (vlevo náčrt, vpravo Mongeovo promítání).

Označíme:

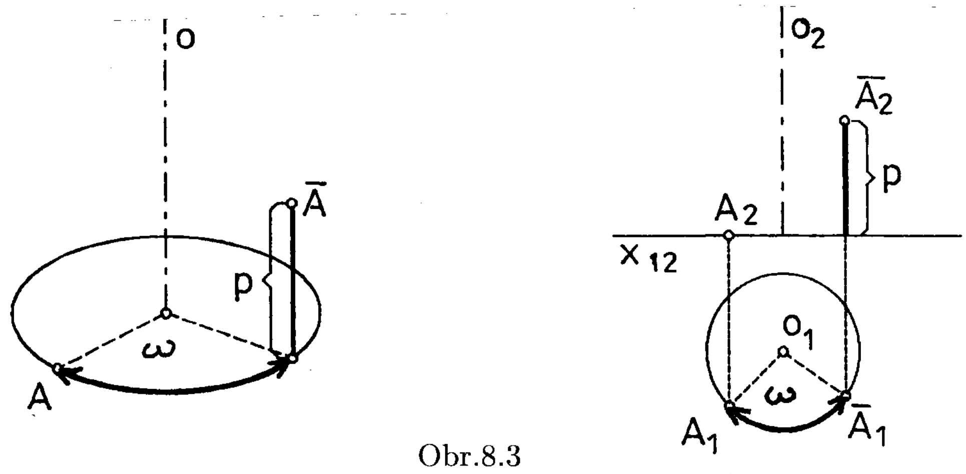
p ... velikost posunutí

ω ... velikost úhlu otočení v obloukové míře

$\mathbf{v_o}$ ... posunutí příslušné k otočení o **1** radián, nazývá se **parametr** (redukovaná výška závitu) šroubového pohybu

v ... posunutí příslušné k otočení o $\mathbf{2\pi}$ radiánů, nazývá se **výška závitu** šroubového pohybu.

Platí: $\mathbf{p} = \mathbf{v_o}\,\omega \qquad \mathbf{v_o} = \frac{\mathbf{v}}{2\pi}$



Obr.8.3

Smysl šroubového pohybu.

Orientujeme-li směr posunutí a úhel otáčení, dostaneme dva druhy šroubového pohybu a to pravotočivý a levotočivý šroubový pohyb, na obrázku 8.4 je vpravo znázorněn pravotočivý a vlevo levotočivý šroubový pohyb.

Určení šroubového pohybu

Šroubový pohyb budeme určovat následujícími údaji:

(osa, parametr $\mathbf{v_o}$, smysl) nebo

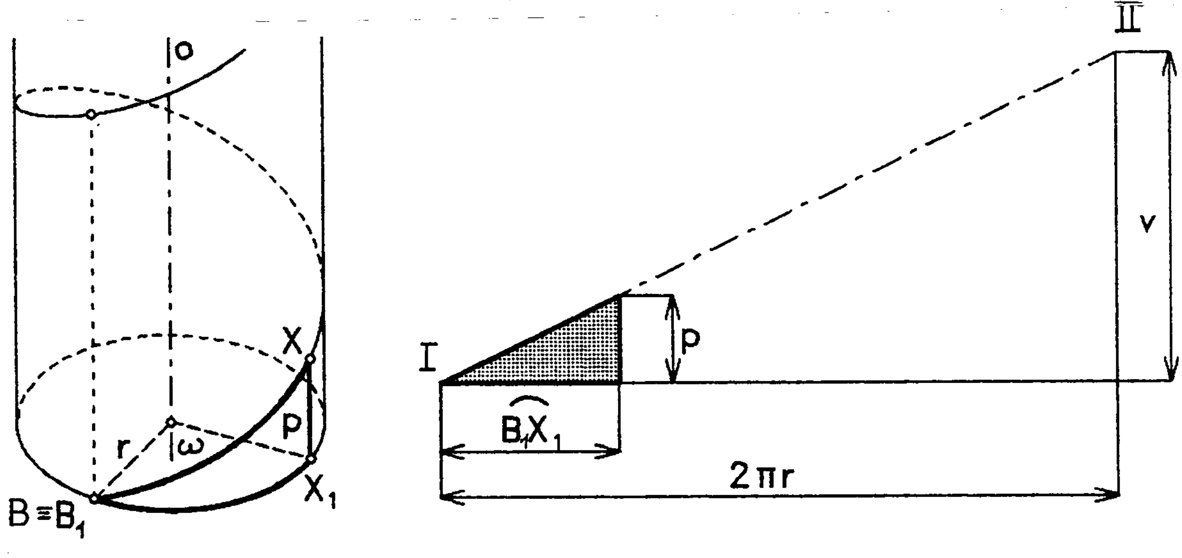
(osa, výška závitu v, smysl)

Levotočivý pohyb Obr.8.4 *Pravotočivý pohyb*

8.2 Šroubovice

je trajektorie bodu při šroubovém pohybu. Je určena tvořicím bodem B a šroubovým pohybem.

Šroubovice leží na rotační válcové ploše, jejíž osou je osa šroubového pohybu a poloměr je roven vzdálenosti tvořicího bodu B od osy. Rozvineme-li část této válcové plochy do roviny, dostaneme skutečnou délku oblouku šroubovice.Na obrázku 8.5 (jde pouze o náčrt) je vlevo znázorněna šroubovice a vpravo rozvinutí jednoho jejího závitu (úsečka $I\ II$). Pro $\omega = 2\pi$ se posunutí rovná výšce závitu šroubovice.
Poznámka. Otočení měříme obloukem, $\widehat{B_1 X_1} = r\,\omega$.

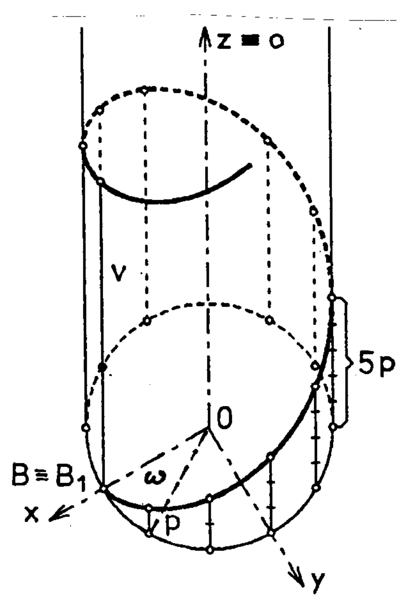


Obr.8.5

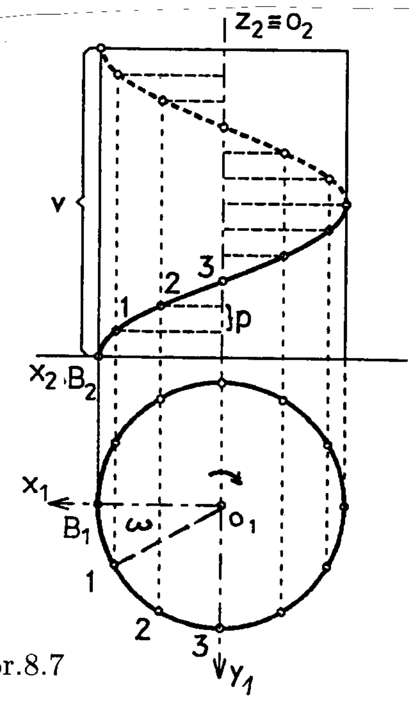
8.3 Zobrazení šroubovice

8.3.1 Úloha

Ve vojenské perspektivě zobrazte pravotočivou šroubovici, která je dána tvořicím bodem B a šroubovým pohybem (o, výška závitu v), viz obrázek 8.6.
Řešení. K otočení $\omega = \frac{2\pi}{12}$ přísluší posunutí $p = \frac{v}{12}$, konstrukce je zřejmá z obrázku.



Obr.8.6



Obr.8.7

8.3.2 Zobrazení šroubovice v Mongeově promítání, viz obrázek 8.7.
Zobrazte šroubovici v Mongeově promítání, je-li dán tvořicí bod B a pravotočivý šroubový pohyb osou o, $(o \perp \pi)$ a výškou závitu v.
Řešení
Sestrojujeme jednotlivé polohy bodu B při šroubovém pohybu, k otočení $\omega = \frac{2\pi}{12}$ přísluší posunutí $p = \frac{v}{12}$.
Úmluva. Smysl klesání vyznačujeme šipkou, osu šroubového pohybu volíme kolmou k půdorysně. Z obrázku 8.7 snadno usoudíme, že pro šroubovici s osou kolmou k půdorysně platí následující tvrzení.
Tvrzení
Půdorysem šroubovice je kružnice a nárysem šroubovice je sinusoida.
Tento závěr ověříme výpočtem. Užijeme parametrického vyjádření šroubovice (viz 8.5):
(1) $x = r\cos\,\omega$, (2) $y = r\sin\,\omega$, (3) $z = v_o\omega$, $\omega \in < 0, 2\pi >$.
Body půdorysu splňují rovnice (1), (2), leží tedy na kružnici. Body nárysu splňují rovnice (1), (3), ze kterých vyjádříme $x = r\ \cos\frac{z}{v_o} = r\ \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{z}{v_o})$. Body nárysu šroubovice leží tedy na sinusoidě.

8.4 Základní úlohy

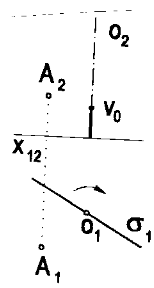
Pravotočivá šroubovice je dána tvořicím bodem A, osou o a parametrem v_o šroubového pohybu, $o \perp \pi$, úlohy budeme řešit v Mongeově promítání.

8.4.1 Úloha

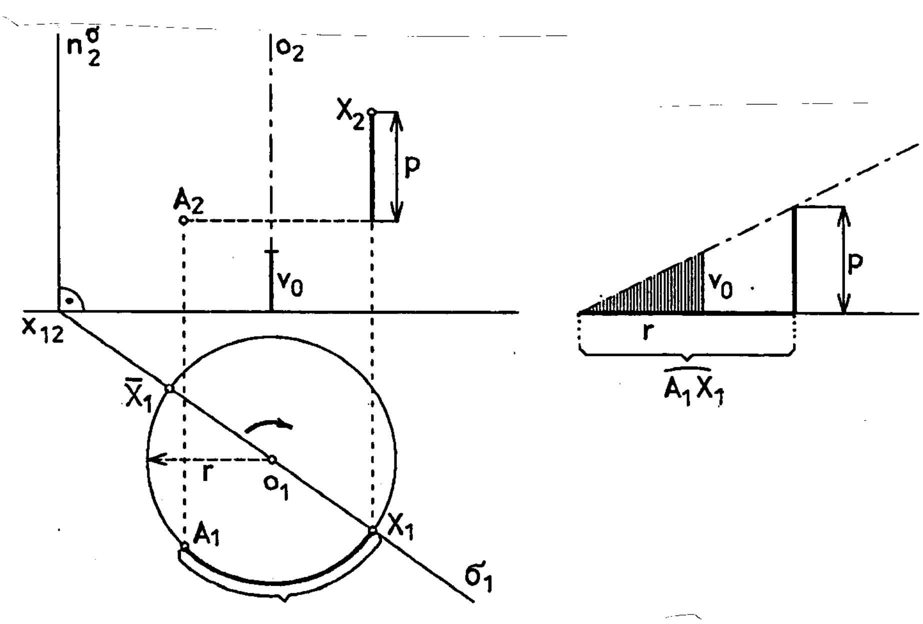
Sestrojte průsečík X šroubovice s rovinou σ, $\sigma \perp \pi$, viz obr. 8.8,
Řešení. Půdorysy průsečíků X, $\bar{X}$ leží na půdorysu σ_1 roviny a na půdorysu šroubovice. Odvodíme nárys bodu X tak, že **k otočení bodu** X danému obloukem $A_1\ X_1$ určíme jeho **posunutí** p :

1) Rozvineme část šroubovice do úsečky spolu s válcovou plochou na níž leží, viz obrázek 8.5. K otočení o 1 radián přísluší posunutí v_o.

2) Rektifikujeme $\overset{\frown}{A_1X_1}$ a sestrojíme posunutí p.



Poznámka
Rektifikaci oblouku (7.1.2) provedeme přibližně. Průsečíků šroubovice s rovinou $\sigma(o \subset \sigma)$ je nekonečně mnoho.



Obr.8.8

8.4.2 Úloha

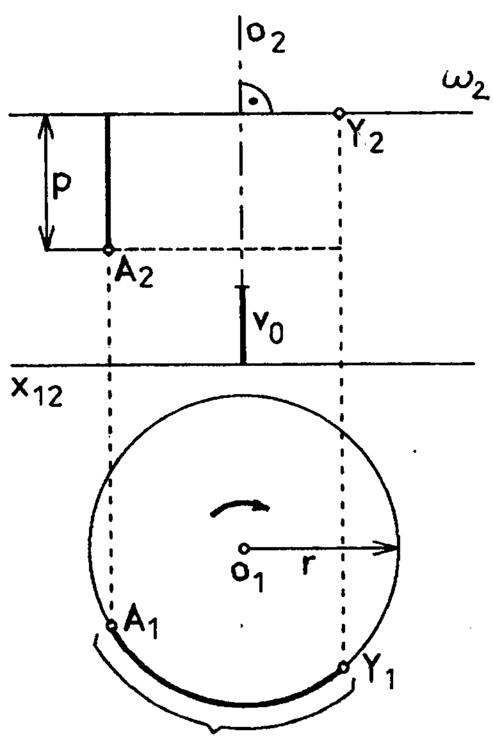
Sestrojte průsečík Y šroubovice s rovinou ω, $\omega \perp o$, viz obr. 8.9.

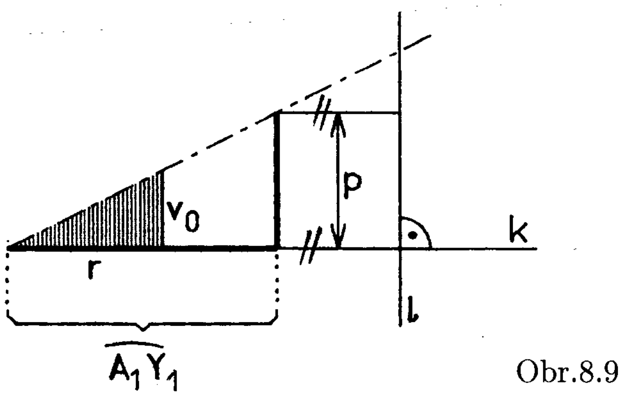
Řešení

Hledaný bod Y leží v ω, tudíž známe jeho posunutí p, $p = \mid z_\omega - z_A \mid$. K tomuto posunutí p sestrojíme příslušné otočení:

1) Rozvineme část šroubovice do úsečky spolu s válcovou plochou, viz obr. 8.5. K otočení o 1 radián přísluší posunutí v_o. Poloměr r umístíme na přímku k.

2) Posunutí p naneseme na libovolnou kolmici $l, l \perp k$, obrázek 8.9 vlevo a pomocí rovnoběžky jej umístíme tak, aby platilo $r : v_o = A_1Y_1 : p$. Získané otočení vyjádřené délkou $\widehat{A_1Y_1}$ navineme na půdorys šroubovice ve správném směru, získáme Y_1 a odvodíme $Y_2 \in \omega_2$.





Obr.8.9

8.5 Parametrické vyjádření šroubovice

Umístíme-li pravotočivý kartézský souřadnicový systém jako na obrázku 8.10, pak parametrické rovnice jednoho závitu šroubovice jsou:

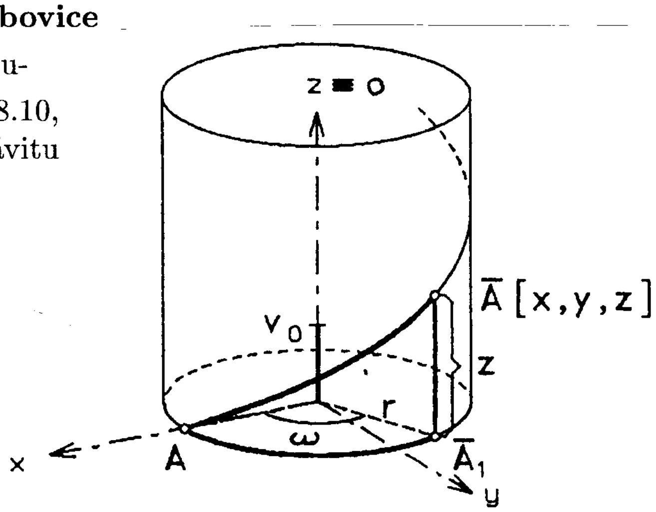
$x = r \cos \omega$

$y = r \sin \omega$

$z = v_o \omega,$

$\omega \in < 0, 2\pi >,$

r, v_o jsou konstanty .



Obr.8.10

8.6 Vlastnosti tečen šroubovice

Předpokládáme, že šroubovice je daná tvořicím bodem A, osou o ($o \perp \pi$), parametrem v_o a má úhel stoupání α. Poloměrem r šroubovice rozumíme poloměr válcové plochy, na které šroubovice leží, **úhlem stoupání** úhel α , pro nějž platí tg $\alpha = v_o/r$.

8.6.1 Věta

Tečny šroubovice svírají konstantní úhel α s rovinou kolmou k ose šroubovice.

Říkáme, že šroubovice je křivka konstantního spádu $s = \mathrm{tg}\alpha = v_o/r$.

Důkaz provedeme výpočtem. Užijeme-li parametrického vyjádření šroubovice z 8.5, pak její tečný vektor $\vec{t}$ je

$$\vec{t} = (\frac{dx}{d\omega}, \frac{dy}{d\omega}, \frac{dz}{d\omega}) = (-r\sin\omega, r\cos\omega, v_o).$$

Vypočteme úhel φ tečného vektoru $\vec{t}$ s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ osy o ($o \equiv z$) šroubovice: $\cos\varphi = \frac{\vec{t}\,\vec{k}}{|\vec{t}||\vec{k}|} = \frac{v_o}{\sqrt{r^2+v_o^2}}$.

Úhel φ je konstantní, neboť pro danou šroubovici jsou r, v_o konstanty. Jestliže je konstantní úhel φ tečny s osou šroubovice, tak je konstantní i úhel α tečny s rovinou kolmou k ose o šroubovice, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

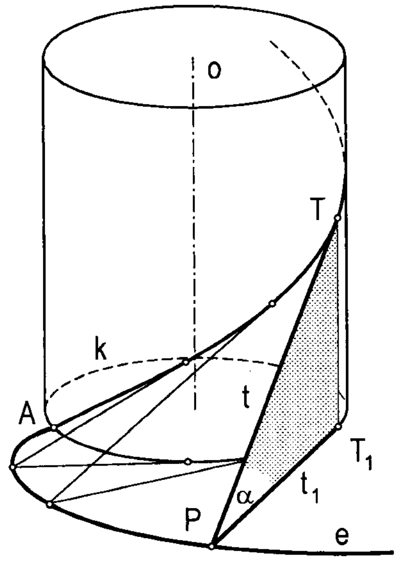
8.6.2 Věta

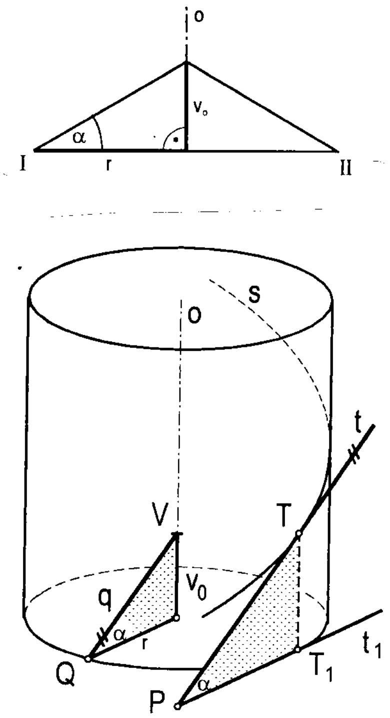
Půdorysné stopníky tečen šroubovice leží na kruhové evolventě e kružnice, která je půdorysem šroubovice, viz obrázek 8.11.

Důkaz

Z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle PT_1T$ plyne, že $|\ PT_1\ | = |\ \widehat{AT_1}\ |$ a bod P je bodem evolventy (7.1.3 a **7.8.5**) kružnice k.

Poznámka. Analogická věta k 8.6.2 platí pro průsečíky tečen šroubovice s libovolnou rovinou kolmou k její ose.





Obr.8.11 Obr.8.12

8.6.3 Věta

Tečny t šroubovice jsou rovnoběžné s površkami q řídicího kužele, který vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách délky r, v_o kolem osy o šroubovice, na které leží odvěsna délky v_o, obr.8.12.

Důkaz je zřejmý, neboť spád řídicího kužele se rovná spádu šroubovice $s = \mathrm{tg}\alpha$.

Poznámka. Výše uvedené vlastnosti užijeme ke konstrukcím tečny šroubovice.

8.7 I. Konstrukce tečny t v bodě T šroubovice

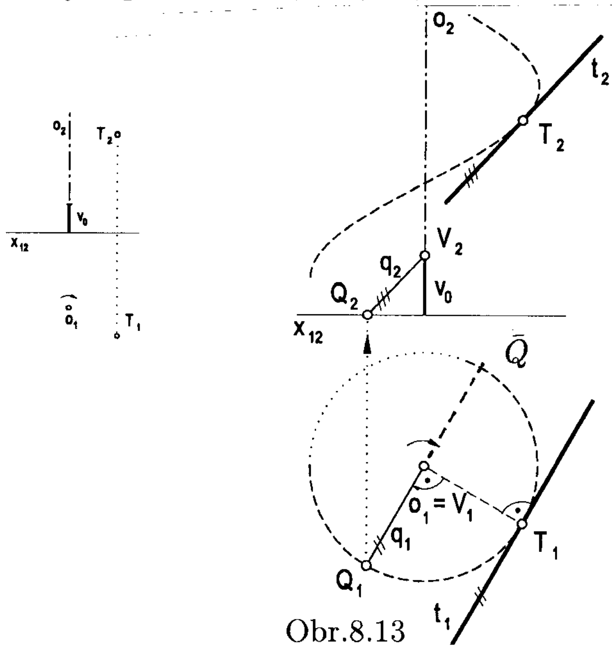
Pravotočivá šroubovice je dána: T, o, v_o . Ke konstrukci tečny t užijeme površky q řídicího kužele, která je s tečnou rovnoběžná, viz obrázek 8.13.

Postup

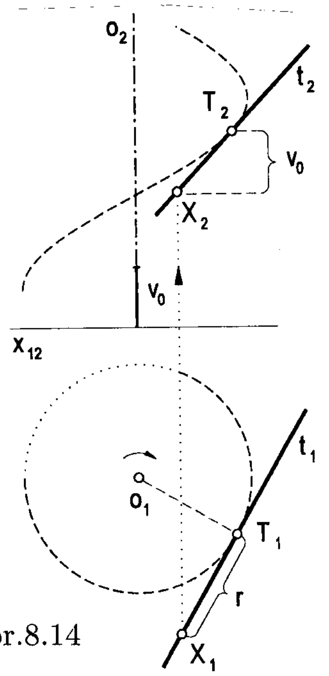
1) Půdorys t_1 tečny t je tečnou půdorysu šroubovice.

2) Nárys t_2 tečny odvodíme pomocí površky q : $q_1 \parallel t_1, q_2 \parallel t_2, V_1 \in q_1, V_2 \in q_2$.

Bod Q leží na podstavě kužele (zároveň půdorys šroubovice) a na površce q. Ze dvou možných průsečíků $Q, \bar{Q}$ byl vybrán Q pro pravotočivou šroubovici.



Obr.8.13



Obr.8.14

8.8 II. Konstrukce tečny t v bodě T šroubovice

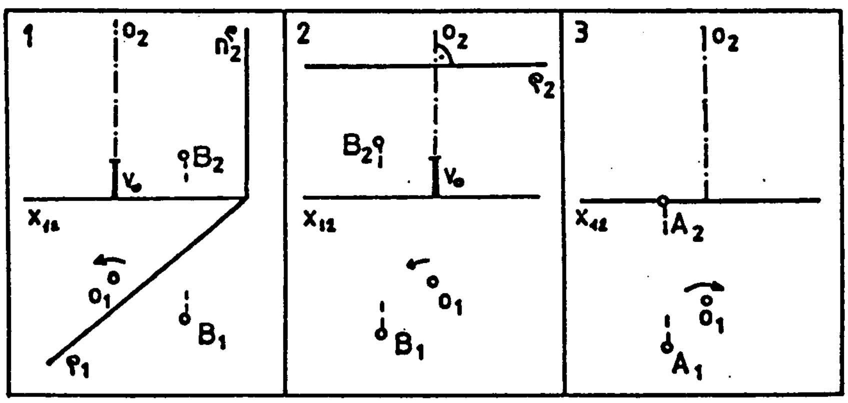
Pravotočivá šroubovice je dána: T, o, v_o. Sestrojíme další bod X tečny t, viz obr. 8.14. Pro průměty bodu X platí: $\mid z_T - z_X \mid = v_o$, $X_1 \in t_1, \mid X_1T_1 \mid = r$. Užili jsme konstantního spádu šroubovice tg$\alpha = v_o/r$. Musíme uvážit, zda jde o pravotočivou či levotočivou šroubovici.

Cvičení

1-2) Šroubovice je dána bodem B a šroubovým pohybem (o, v_o, levotočivý).

Sestrojte jeden průsečík šroubovice s danou rovinou ρ a v něm tečnu šroubovice.

3) Zobrazte jeden závit pravotočivé šroubovice bodu A, je-li dána její osa $o \perp \pi$ a její spád tg$\alpha = \frac{2}{3}$.



Obr.8.15