

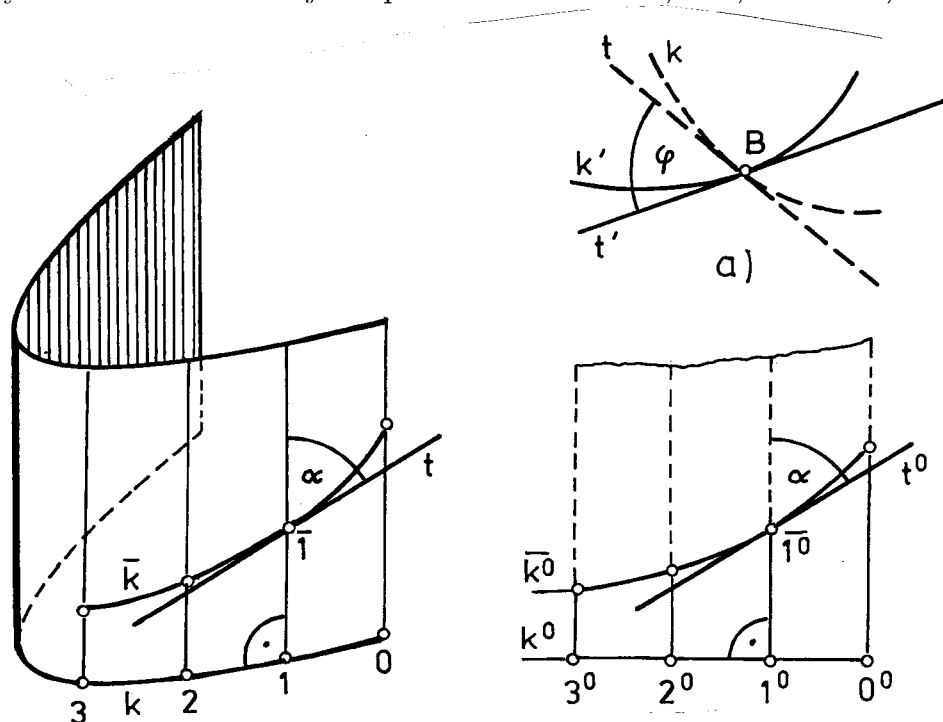
13. ROZVINUTELNÉ PLOCHY

13.1 Definice

Rozvinutí je zobrazení části plochy na část roviny, které zachovává délky oblouků a úhly křivek. Plocha se nazývá **rozvinutelná**, jestliže ji můžeme rozvinout do roviny.

Příklad

Na obrázku 13.1 je rozvinuta část válcové plochy (řídící křivka k , směr $1\bar{1}$) do části roviny. Všimněte si, že oblouk 30 řídící křivky k se rozvine do úsečky $3^0 0^0$ o stejné délce a pravý úhel mezi površkou $1\bar{1}$ a řídící křivkou je zachován. Křivka \bar{k} se rozvine do křivky \bar{k}^0 a úhel α křivky \bar{k} s površkou se zachová, $\angle 1\bar{1}, t = \angle \bar{1}^0 t^0, t^0 = \alpha$.



Obr.13.1

Poznámka

Úhel dvou křivek je definován jako úhel φ jejich tečen, viz obrázek 13.1a. Útvary v rozvinutí značíme indexem 0 .

13.2 Věta

Rozvinutelné plochy jsou: rovina, kuželová plocha, válcová plocha a plocha tečen prostorové křivky.

Je zřejmé, že rozvinutelné plochy jsou přímkové plochy. S přímkovými plochami jsme se setkali v kapitolách 10, 11, kde vznikaly rotací nebo šroubovým pohybem tvořící přímky. Vyjdeme z této skutečnosti a budeme definovat přímkové plochy obecněji.

13.3 Přímková plocha je jednoparametrická soustava přímek, nazveme je površkami plochy. Přímkové plochy dělíme do dvou skupin na **rozvinutelné a zborcené** podle následující charakteristické vlastnosti.

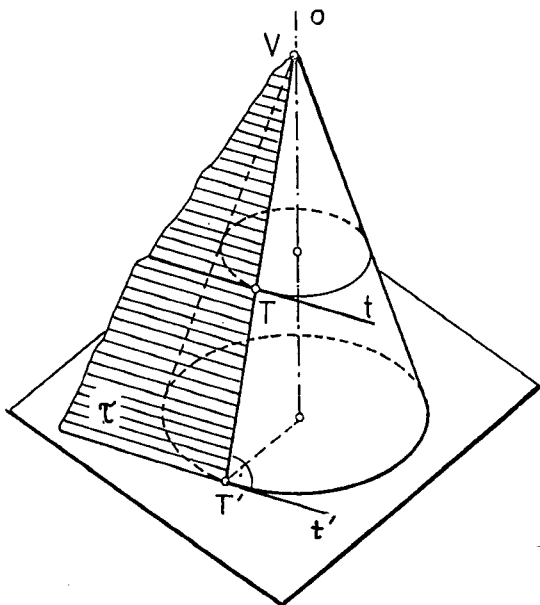
13.4 Věta

Přímková plocha je rozvinutelná právě tehdy, jestliže její tečné roviny v bodech každé površky jsou totožné.

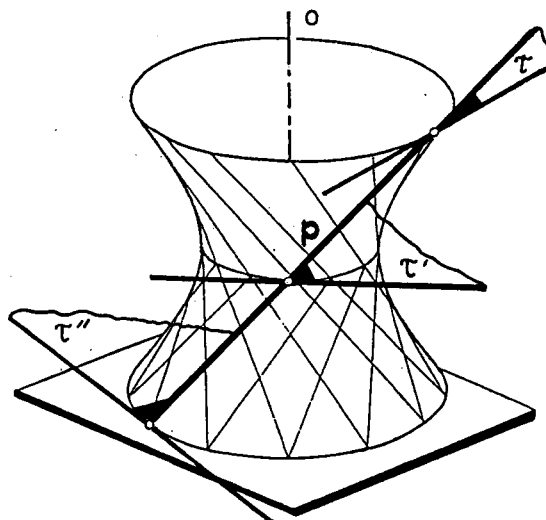
Přímková plocha je zborcená, jestliže má podél površky p nekonečně mnoho tečných rovin. Tyto roviny tvoří svazek rovin s osou p .

Příklad

Rotační kuželová plocha je rozvinutelná, tečná rovina τ podél její površky VT se nemění, viz obr.13.2 a. Jednodílný hyperboloid je zborcená přímková plocha, její tečné roviny τ, τ', τ'' podél jedné površky p tvoří svazek, viz obr. 13.2b.



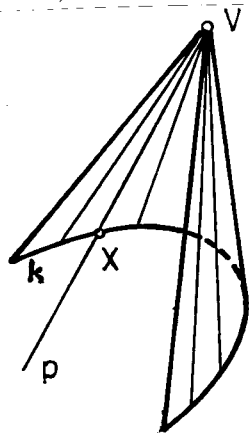
Obr.13.2a



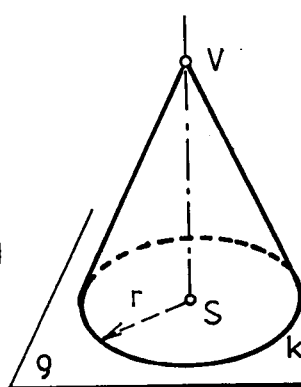
Obr.13.2b

13.5 Kuželové plochy

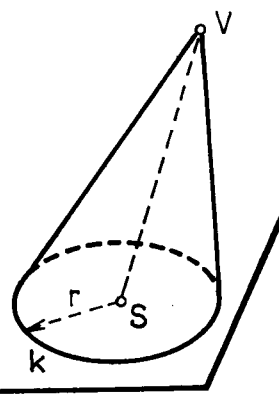
Kuželová plocha je dána vrcholem V , řídicí křivkou k . Je to množina přímek $p = VX$, kde $X \in k$, viz obr. 13.3a. Pokud $k \subset \rho$, pak předpokládáme $V \notin \rho$.



Obr.13.3a



Obr.13.3b



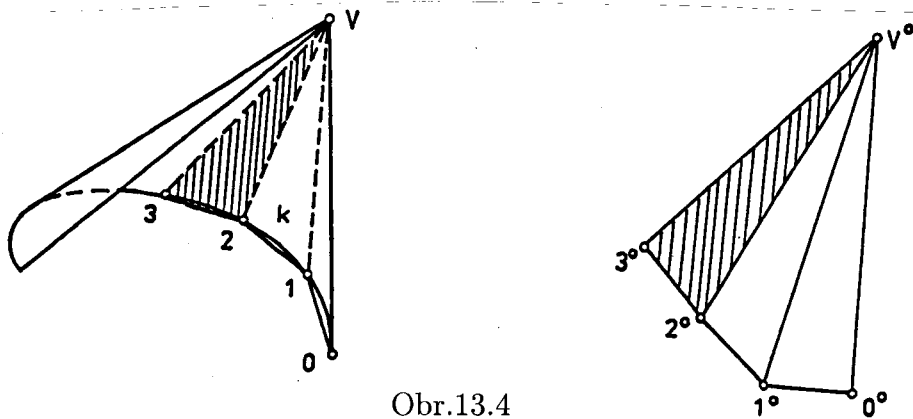
Obr.13.3c

Je-li řídicí křivka kružnice $k = (S, r)$ v rovině ρ , vznikne:

- rotační kuželová plocha pro $SV \perp \rho$** , viz obrázek 13.3 b,
- kosá kruhová kuželová plocha pro $SV \not\perp \rho$** , obrázek 13.3 c.

13.5.1 Rozvinutí části kuželové plochy

Kuželovou plochu nahradíme vepsanou n-bokou jehlanovou plochou a její část rozvineme tak, že sestrojíme **skutečné velikosti trojúhelníkových stěn**, viz obrázek 13.4.



Obr.13.4

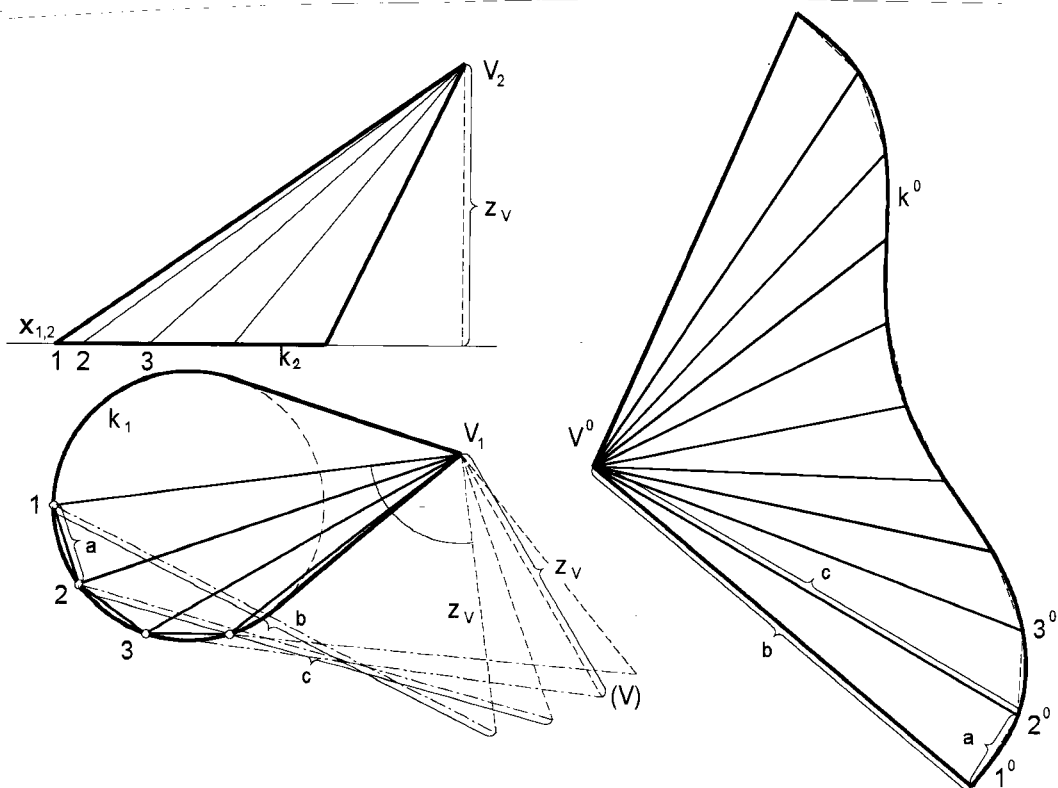
13.5.2 Úloha

Rozviňte část kosé kruhové kuželové plochy, která je dána vrcholem V a řídicí křivkou k .

Na obrázku 13.5 je konstrukce rozvinutí v Mongeově promítání, skutečná velikost dvou trojúhelníků $\triangle V^0 1^0 2^0$, $\triangle V^0 2^0 3^0$ (stěn jehlanu) a výsledek.

Řešení

Část kuželové plochy nahradíme pláštěm například desetibokého jehlanu. Sestrojíme skutečné velikosti jednotlivých hran (sklopením jejich promítacích rovin do půdorysny podle 3.6.2) a trojúhelníkových stěn. Hrany jehlanu 12, 23 atd. leží v půdorysně a jsou tedy v půdorysu ve skutečné velikosti.



Obr.13.5

13.5.3 Úloha

Rozviňte plášť rotačního kužele s řezem rovinou ω .

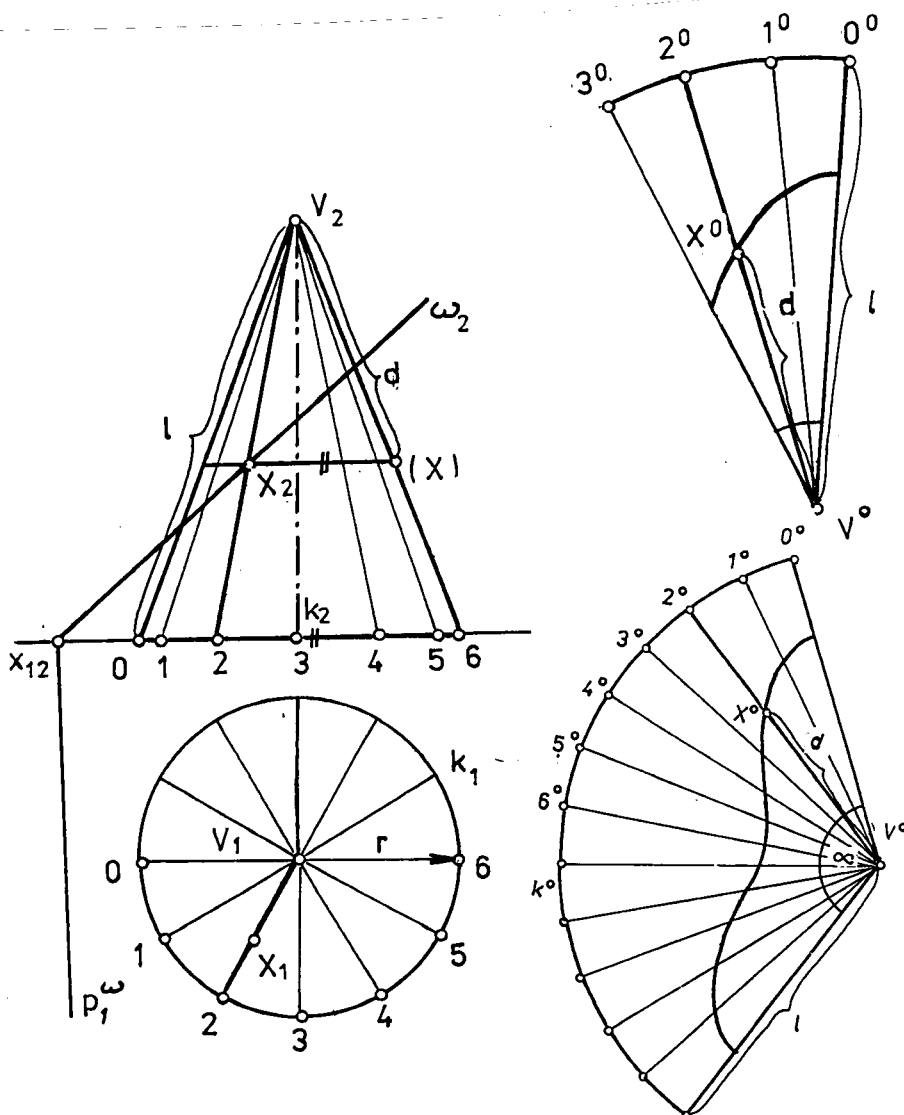
Na obrázku 13.6 je konstrukce řezu a části rozvinutí v Mongeově promítání a zmenšený výsledek celého rozvinutí.

Řešení

Rotační kužel se rozvine do kruhové výseče o poloměru l , (rovná se straně kužele) a středovém úhlu α , r je poloměr podstavy kužele. Pro úhel α (v radiánech) platí $\alpha l = 2\pi r$, a sestojíme jej graficky přibližným navinutím délky podstavné kružnice k na rozvinutou k° . Kužel nahradíme dvanáctibokým jehlanem.

Řez rovinou ω sestojíme bodově, ω je nárysně promítací, $\omega \perp \nu$, $X \equiv V2 \cap \omega$ je bod řezu.

Skutečné vzdálenosti bodů X řezu od vrcholu V sestojíme otočením povrchů kužele do polohy rovnoběžné s nárysnou (do povrchy $V6$ a $|V_2(X)| = d$ je skutečná velikost úsečky VX). V rozvinutí se $|V^0X^0|$ rovná skutečné velikosti $|VX|$.



Obr.13.6

Poznámka

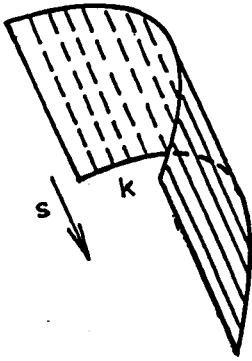
Konstrukce řezů kuželových a válcových ploch (kuželů a válců) rovinou najdete ve 3.kapitole, část 3.8.

13.6 Válcové plochy

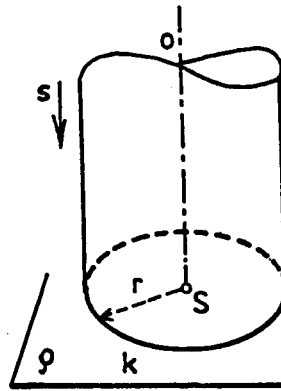
Válcová plocha je dána směrem s a řídicí křivkou k . Je to množina přímek rovnoběžných se směrem s a protínajících křivku k , viz obrázek 13.7. Pokud k leží v rovině ρ , předpokládáme $s \nparallel \rho$.

Je-li řídicí křivka kružnice $k = (S, r)$ v rovině ρ , vznikne :

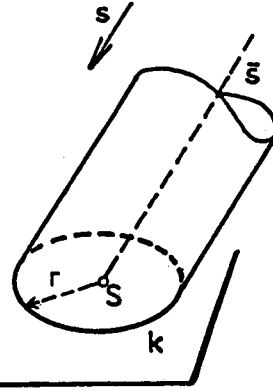
rotační válcová plocha pro $s \perp \rho$, obrázek 13.8a, nebo
kosá kruhová válcová plocha pro $s \not\perp \rho$, obrázek 13.8b.



Obr.13.7



Obr.13.8a



Obr.13.8b

13.6.1 Úloha

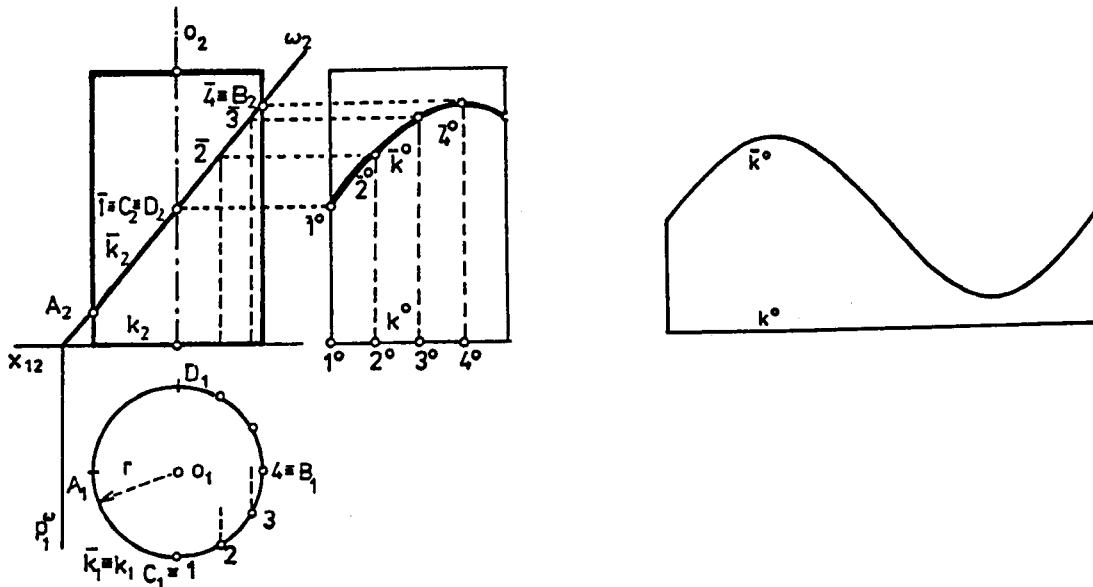
Rozviňte část rotační válcové plochy mezi řídicí kružnicí k a řezem \bar{k} promítací rovinou ω .

Na obrázku 13.9. je konstrukce rozvinutí části válcové plochy a zmenšené výsledné rozvinutí.

Řešení

Řez válcové plochy rovinou ω je elipsa určená osami AB, CD , ($CD = 2r$), viz 3.8.

Konstrukce rozvinutí je zřejmá z obrázku.



Obr.13.9

13.6.2 Úloha

Sestrojte libovolný normální řez kosé kruhové válcové plochy (normální řez je řez rovinou ω , která je kolmá k površkám válcové plochy). Sestrojte skutečnou velikost normálního řezu, viz obr. 13.10.

Řešení

Ze zadání je zřejmé, že površky válcové plochy jsou rovnoběžné s nárýsnou. Rovina normálního řezu ω , $\omega \perp s$, je v našem případě nárýsně promítací ($s \perp \omega$, $s \parallel \nu \Rightarrow \omega_2 \perp s_2$).

Řez rovinou ω :

elipsa s osami AB , CD

($|CD| = 2r$, $CD \parallel \pi$).

Nárys řezu: úsečka A_2B_2 .

Půdorys řezu:

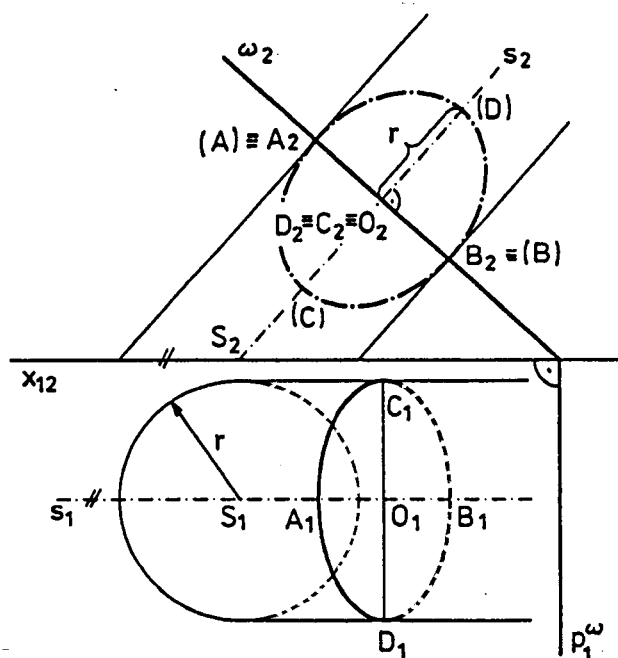
elipsa s osami A_1B_1 , C_1D_1

($CD \parallel \pi \Rightarrow A_1B_1 \perp C_1D_1$, podle 1.7.2).

Skutečná velikost řezu ve sklopení do hlavní roviny rovnoběžné s ν :

elipsa s osami $(A)(B)$, $(C)(D)$,

$(A) \equiv A_2$, $(B) \equiv B_2$, $| (C)(D) | = 2r$.



Obr.13.10

13.6.3 Úloha

Rozvíňte část kosé kruhové válcové plochy mezi řídicí kružnicí k a normálním řezem \bar{k} rovinou ω , obrázek 13.11. (Válcová plocha je umístěna tak, aby měla površky rovnoběžné s nárýsnou.)

Řešení

Z 13.1 víme, že rozvinutí zachovává úhly křivek. Kosou válcovou plochu rozvineme tak, že **rozvineme její normální řez \bar{k} do úsečky \bar{k}^o** a površky budou k ní kolmé, obrázek 13.11.

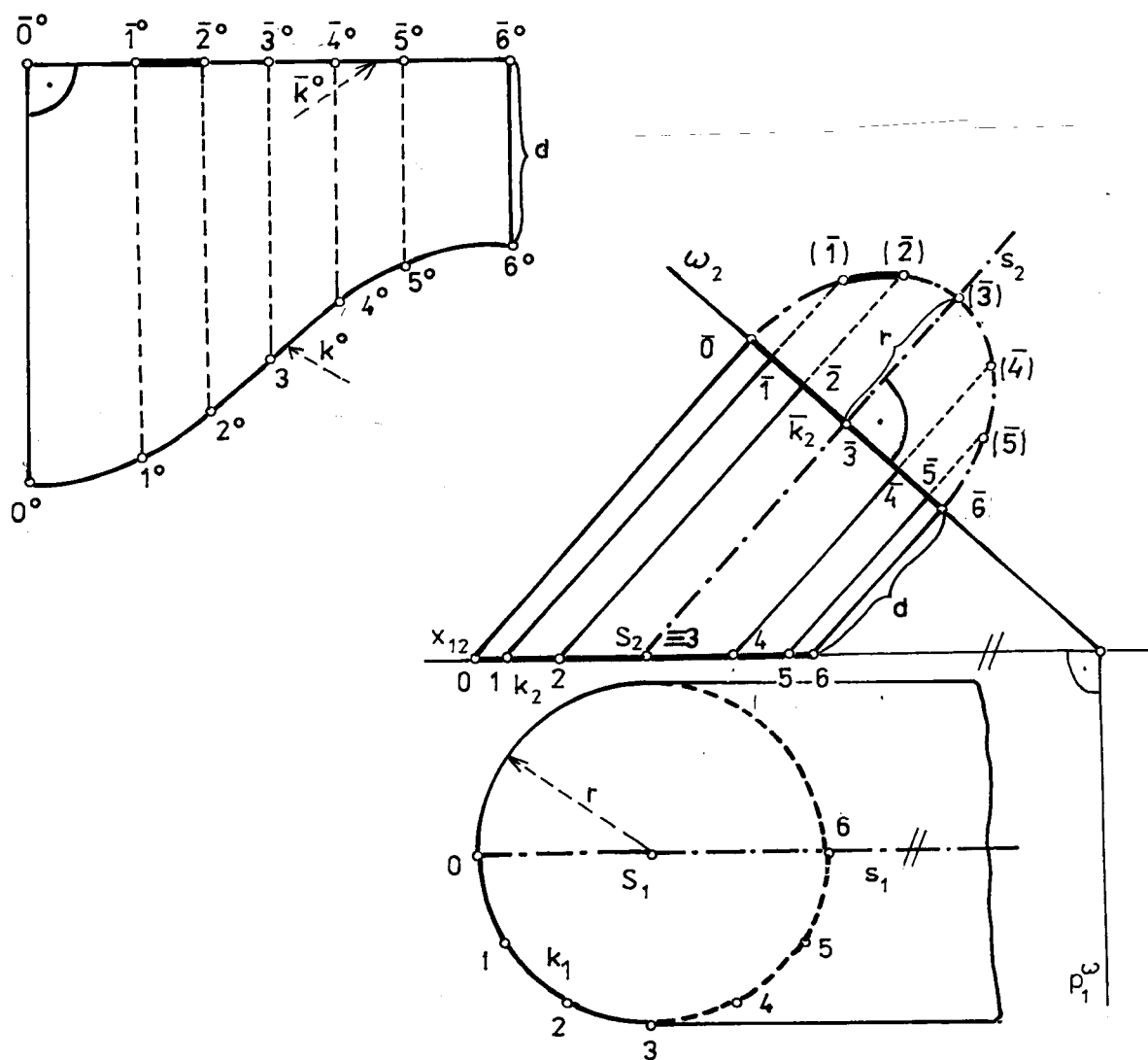
1) Konstrukce normálního řezu válcové plochy - elipsy \bar{k} podle 13.6.2

2) Skutečná velikost normálního řezu \bar{k} ve sklopení do hlavní roviny σ (13.6.2).

2) Řídicí kružnici rozdělíme na 12 dílů, válcovou plochu nahradíme dvanáctibokou hranolovou plochou.

3) Elipsu \bar{k} přibližně rozvineme do úsečky \bar{k}^o , $(\bar{1})(\bar{2}) = |\bar{1}^o \bar{2}^o|$ a podobně.

4) Rozvinuté površky jsou kolmé k rozvinuté elipse \bar{k}^o , jejich délky jsou ve skutečné velikosti v nárýse.



Obr.13.11

V technické praxi (např.vzduchotechnika) se vyskytuje problém spojení dvou i více potrubí rozvinutelnou plochou. Plochám, které zprostředkují přechod mezi dvěma profily ploch říkáme **přechodové** . Budeme se zabývat rozvinutelnými přechodovými plochami mezi profily různých vlastností.

13.7 Rozvinutelné přechodové plochy mezi křivkou k a lomenou čarou složíme z částí rovin a částí kosých kuželových ploch.

Pokud chceme, aby vzniklá plocha obsahovala pouze regulární body ve smyslu 9.1 , pak **rovinné části rozvinutelné přechodové plochy musí ležet v tečných rovinách** kuželových ploch podél společných površek. Bývá zvykem říkat, že taková plocha je **hladká**.

13.7.1 Úloha

Sestrojte hladkou rozvinutelnou přechodovou plochu mezi obdélníkem ABCD a kružnicí k (oba útvary leží ve vodorovných rovinách).

Na obrázku 13.12 vpravo je zobrazena konstrukce plochy v Mongeově promítání, její názorný obrázek vlevo nahoře a část rozvinutí vlevo dole.

Řešení

Hledanou plochu vytvoříme ze čtyř trojúhelníků a čtyř částí kosých kruhových kuželových ploch následovně:

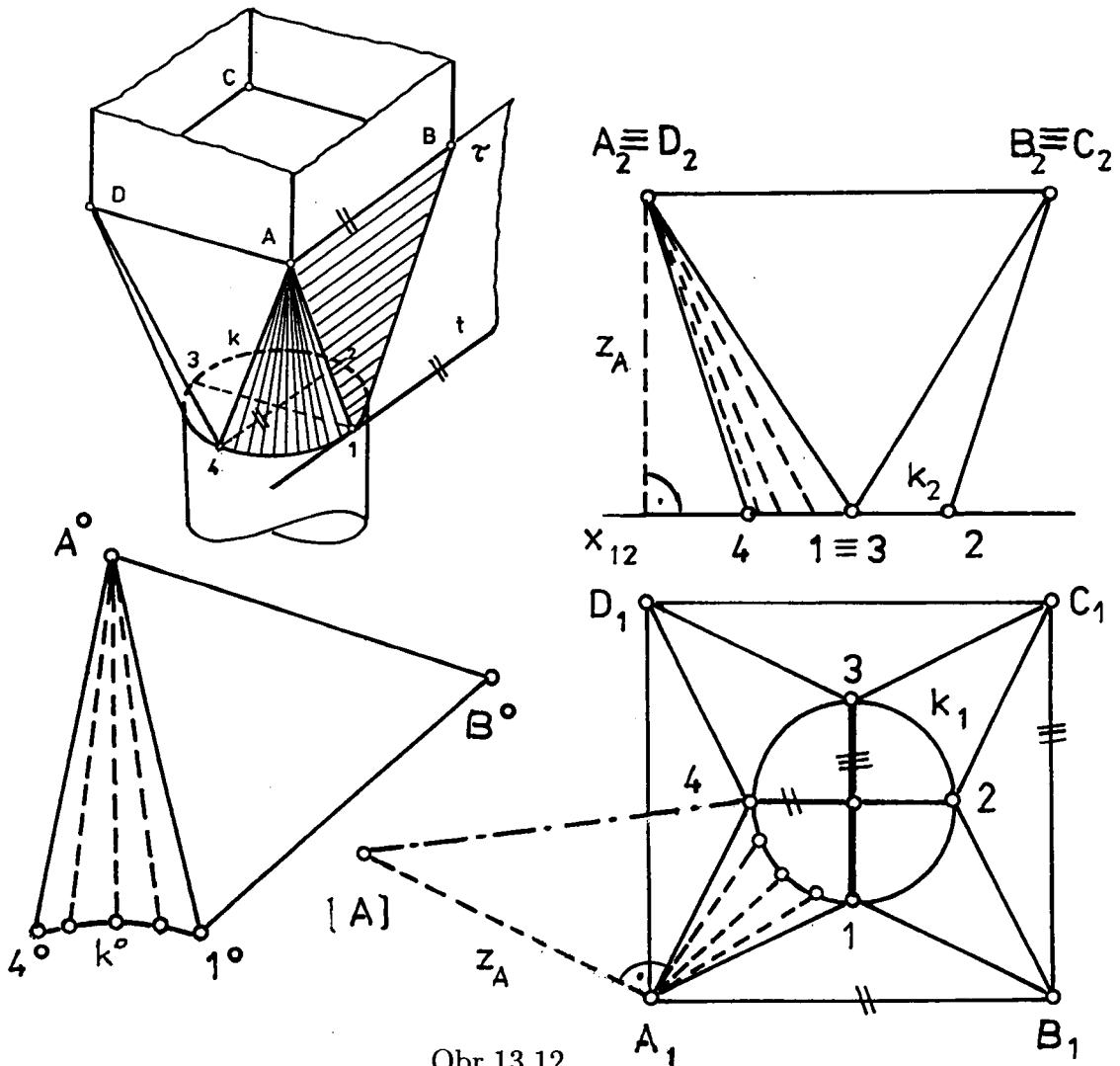
1) Sestrojíme body 1, 2, 3, 4 na kružnici k tak, že 13, 24 jsou sdružené průměry kružnice, $13 \parallel BC$, $24 \parallel AB$.

2) Rovinné části přechodové plochy jsou $\triangle 1AB$, $\triangle 2BC$, $\triangle 3CD$, $\triangle 4DA$.

3) Části kuželových ploch jsou: 1.plocha (vrchol A , oblouk 41), 2.plocha (vrchol B , oblouk 12), 3.plocha (vrchol C , oblouk 23), 4.plocha (vrchol D , oblouk 34).

4) Rozvinutí (obr. 13.12 vlevo dole) přechodové plochy se skládá ze skutečných velikostí trojúhelníků a z rozvinutí částí kosých kuželových ploch (podle 13.5.2).

5) Takto navržená rozvinutelná přechodová plocha je **hladká** vzhledem k vhodné volbě bodů 1, 2, 3, 4. Tečná rovina τ v bodě 1 kuželové plochy s vrcholem A je určena tečnou t ke kružnici (viz náčrtek 13.12 vlevo nahoře) a površkou $A1$. Jelikož $t \parallel AB$ platí $\tau = (A1, t) = (AB1)$.



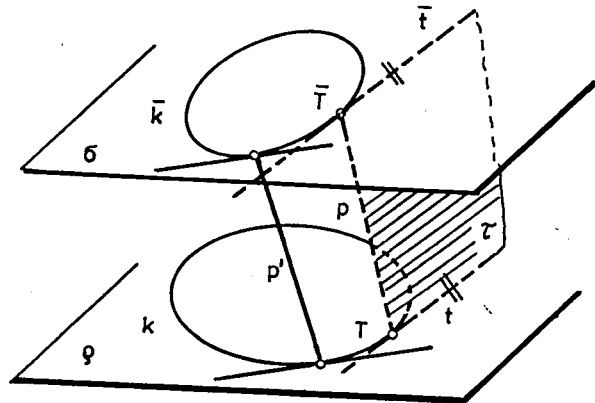
Obr.13.12

13.8 Rozvinutelné přechodové plochy mezi dvěma rovinnými křivkami $k, \bar{k}, k \subset \rho, \bar{k} \subset \sigma$. Podle vzájemné polohy rovin ρ, σ rozlišíme dva případy rozvinutelných přechodových ploch.

A) Roviny obou křivek jsou rovnoběžné, $\rho \parallel \sigma$.

Postup konstrukce površky plochy.

- 1) Zvolíme bod T na křivce k a sestrojíme tečnu t křivky k v tomto bodě, viz náčrt na obrázku 13.13.
- 2) Sestrojíme tečnu \bar{t} křivky \bar{k} rovnoběžnou s tečnou t , \bar{T} je bod dotyku na \bar{t} , viz následující poznámka.
- 3) Površka plochy je $p = T\bar{T}$.
- 4) Takto navržená přechodová plocha je rozvinutelná, neboť má podél površky $T\bar{T}$ jedinou tečnou rovinu τ ($t \parallel \bar{t}$, takže přímky t, \bar{t}, p leží v téže tečné rovině).

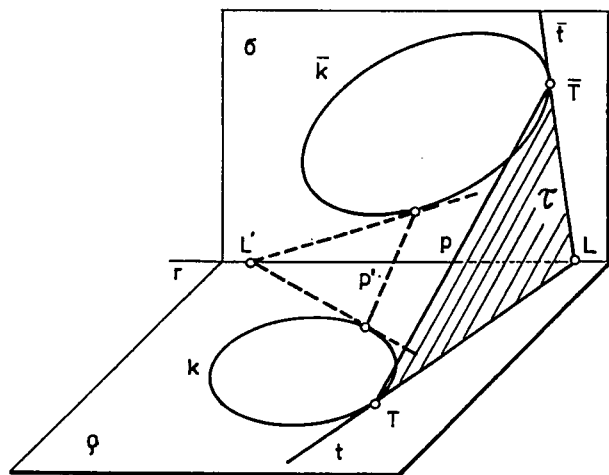


Obr.13.13

B) Roviny obou křivek jsou různoběžné, $\rho \cap \sigma \equiv r$, obr.13.14.

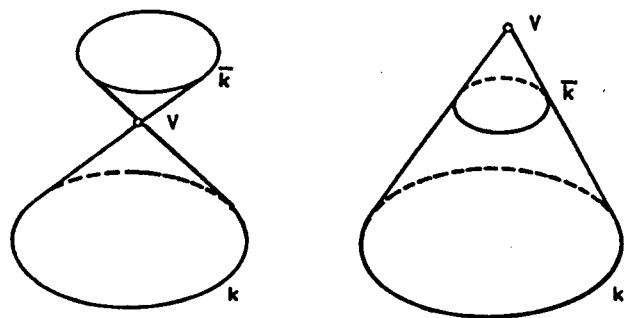
Postup konstrukce površky plochy:

- 1) Zvolíme bod L na průsečnici r obou rovin $L \in r$.
- 2) Z bodu L sestrojíme tečny t, \bar{t} ke křivkám k, \bar{k} , viz následná poznámka.
- 3) T je bod dotyku tečny t , \bar{T} je bod dotyku tečny \bar{t} .
- 4) Površka plochy je $p \equiv T\bar{T}$.
- 5) Takto navržená přechodová plocha je rozvinutelná, neboť má podél površky p jedinou tečnou rovinu $\tau = (T\bar{T}L)$.



Obr.13.14

Poznámka. Vzhledem k užití v praxi uvažujeme pouze vnější plášť rozvinutelné přechodové plochy. Existenci vnějšího a vnitřního pláště rozvinutelné přechodové plochy ukážeme na jednoduchém příkladě. Na obr.13.15 jsou zobrazeny oba pláště přechodové plochy mezi dvěma kružnicemi v rovnoběžných rovinách. Rozvinutelná přechodová plocha je v tomto případě kuželová plocha.

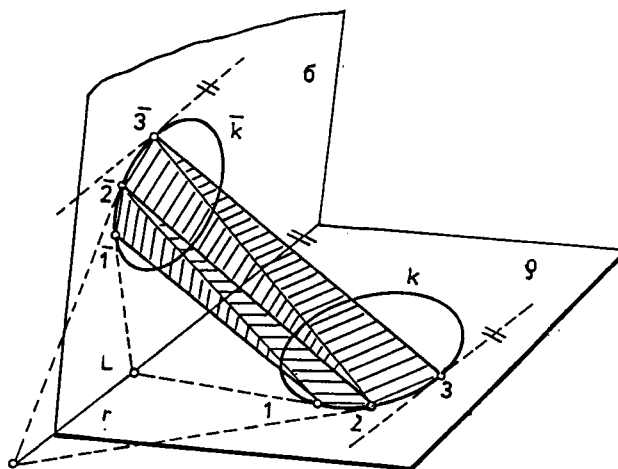


Obr.13.15

Vnitřní a vnější plášť přechodové plochy

Rozvinutí rozvinutelných přechodových ploch

Přechodové plochy nahradíme mnohostěmem s trojúhelníkovými stěnami a sestrojíme jejich skutečné velikosti, viz názorný obrázek 13.16.



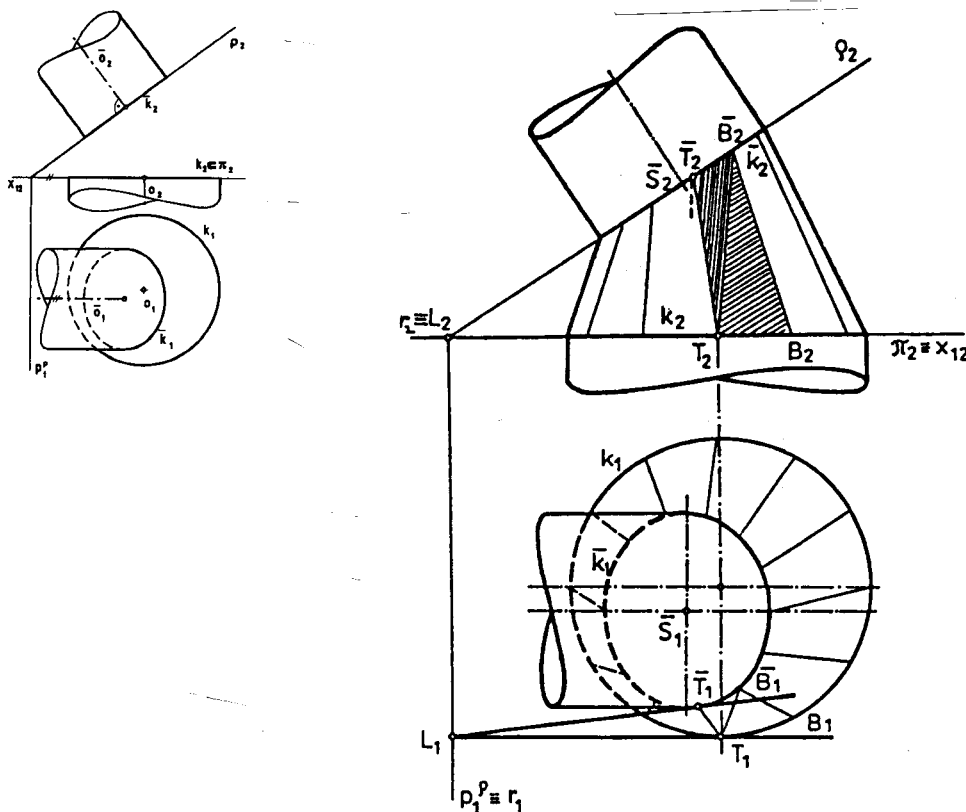
Obr.13.16

13.8.1 Úloha

Sestrojte rozvinutelnou přechodovou plochu mezi dvěma danými potrubími (rotačními válcovými plochami), řešení je na obrázku 13.17.

Řešení

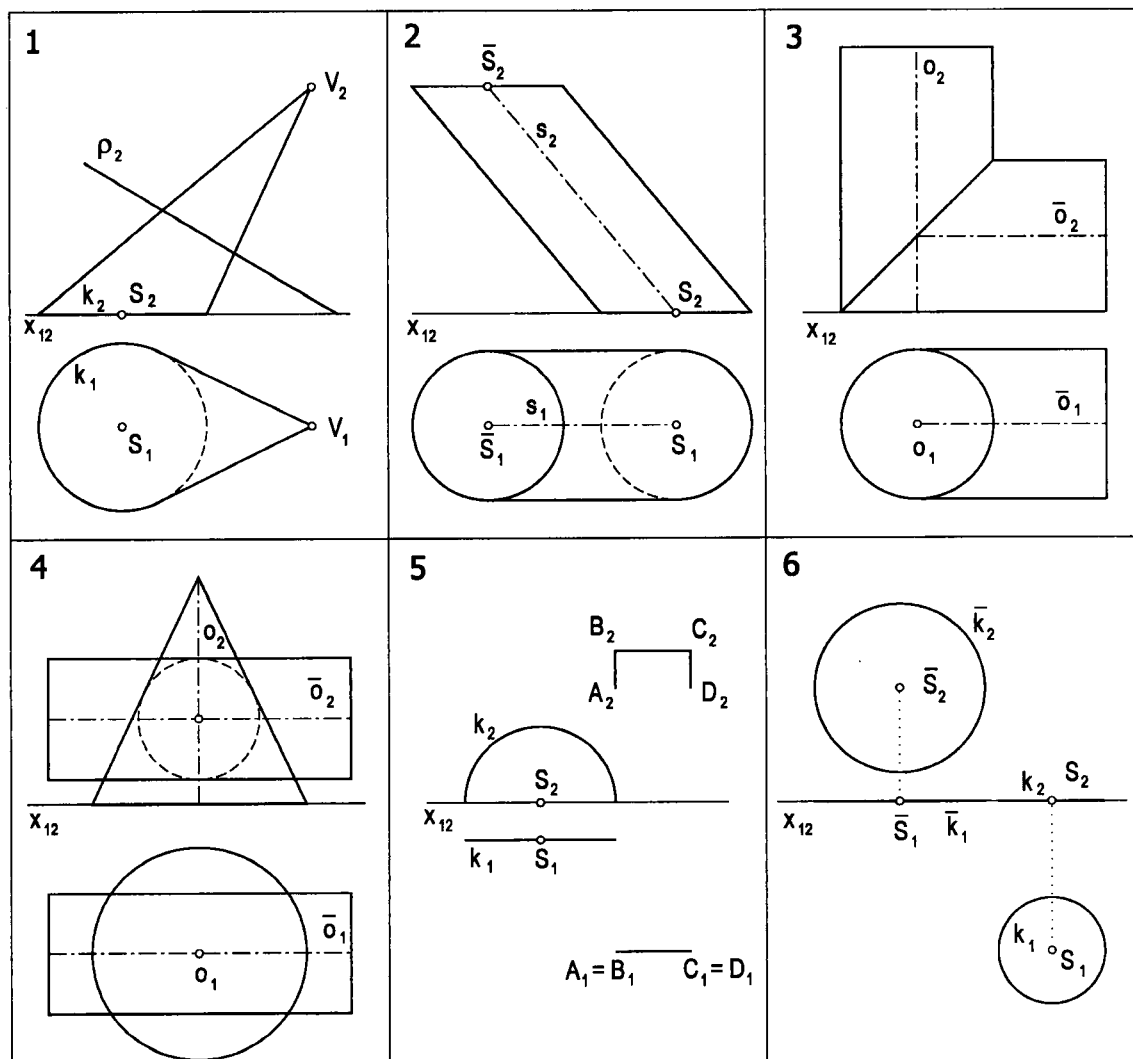
Konstruujeme rozvinutelnou přechodovou plochu mezi dvěma kružnicemi k, \bar{k} , které leží v různoběžných rovinách, $k \subset \pi, \bar{k} \subset \rho, p^\rho \equiv r \equiv \pi \cap \rho$. Ke konstrukci površek použijeme metodu 13.8 B. Body L volíme na $r \equiv p^\rho$. Přechodovou plochu nahradíme mnohostěmem a sestrojíme např. skutečné velikosti $\Delta T\bar{T}\bar{B}, \Delta T\bar{B}\bar{B}$ atd. (viz 3.6.2).



Obr.13.17

Cvičení, obrázek 13.18

- 1) - 2) Rozviňte plášť kosého kužele a válce.
- 3) - 4) Rozviňte část kuželové a válcové plochy, jejichž průnik se rozpadá.
- 5) - 6) Navrhněte přechodovou plochu mezi křivkou k a lomenou čarou, případně další křivkou \bar{k} . Část plochy rozviňte.



Obr. 13.18