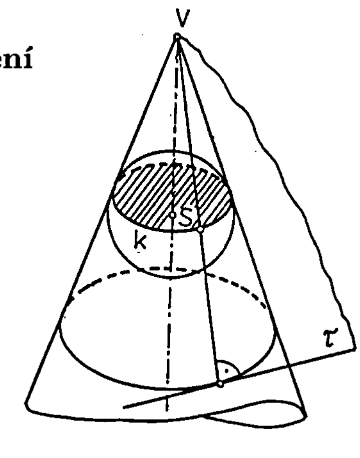
# 12. OBALOVÉ PLOCHY




Obr.12.1

### 12.1 Elementární pohyby v prostoru a jejich určení

Posunutí, neboli translace, je určeno směrem $p$.
Rotace je určena osou $o$.
Šroubový pohyb je určen osou $o$, parametrem $v_o$ a smyslem.

### 12.2 Dotyk dvou ploch podél křivky

Dvě plochy se dotýkají podél společné křivky $k$ , jestliže mají ve všech bodech křivky $k$ společné tečné roviny a tedy i normály. Na obrázku 12.1, jsou znázorněny kulová a kuželová plocha, které se dotýkají podél společné kružnice $k$.

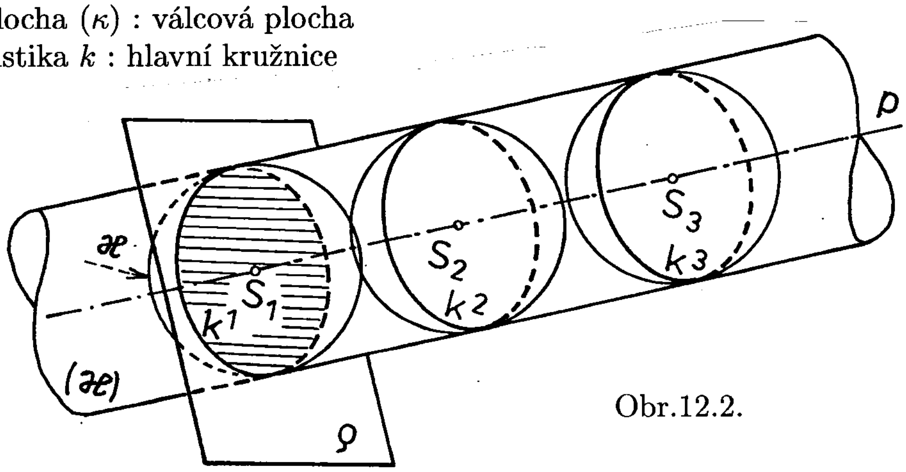
### 12.3 Definice a základní vlastnosti obalových ploch

Mějme jednoparametrickou soustavu ploch $\kappa(t)$. **Obalová plocha** $(\kappa)$ tohoto systému je plocha, která se každé plochy $\kappa(t)$ dotýká podél křivky $k(t)$. Tato dotyková křivka $k(t)$ se nazývá **charakteristika** .
Omezíme se na jednoparametrickou soustavu vzniklou pohybem dané plochy $\kappa$ . Tuto plochu $\kappa$ nazveme **tvořicí plochou.** Definici obalové plochy objasníme na jednoduchém příkladě.

#### 12.3.1 Příklad

Uvažujme kulovou plochu $\kappa$ , jejíž střed se posouvá po dané přímce $p$ a tím vzniká jednoparametrická soustava kulových ploch $\kappa(t)$. Jako parametr $t$ uvažujeme velikost posunutí středu $S$. Obalová plocha je rotační válcová plocha s osou $p$ . Charakteristika $k$ je hlavní kružnice na kulové ploše a leží v rovině $\rho$ kolmé k přímce p, na obrázku 12.2 je znázorněno několik poloh kulové plochy spolu s příslušnými charakteristikami. Celý proces vytvoření obalové plochy popíšeme schematicky takto:

Pohyb : translace
Tvořicí plocha $\kappa$ : kulová plocha
Obalová plocha $(\kappa)$ : válcová plocha
Charakteristika $k$ : hlavní kružnice



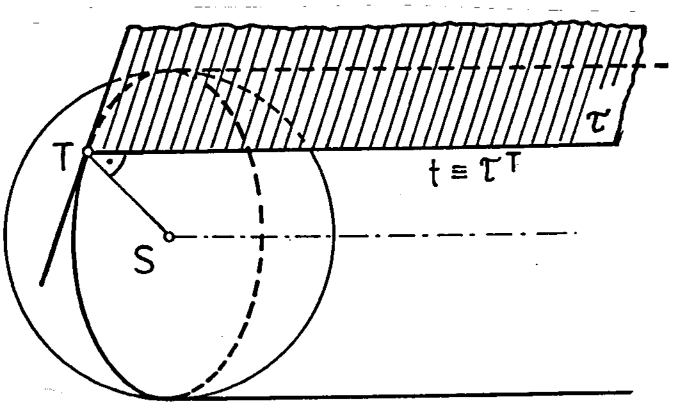

Obr.12.2.

Poznámka
Všimněte si, že obalová plocha vzniká translací charakteristiky $k$. **Hlavní kružnice** je kružnice na kulové ploše, jejíž rovina prochází středem kulové plochy.

**12.3.2 Věta**
**Obalová plocha při elementárním pohybu vznikne týmž pohybem a její tvořicí křivkou je kterákoliv charakteristika.**
Důkaz provádět nebudeme, nemáme k dispozici potřebné matematické prostředky.
Důsledkem věty 12.3.2 je následující tvrzení, které je podstatou konstrukce charakteristiky.

**12.3.3 Tvrzení**
**Bod T je bodem charakteristiky právě tehdy, když tečná rovina $\tau$ tvořicí plochy v tomto bodě obsahuje tečnu t trajektorie $\tau^T$ bodu T.**

Obrázek 12.3 demonstruje toto tvrzení pro translaci kulové plochy z příkladu 12.3.1.
Poznámka
Podmínku z tvrzení 12.3.3 lze též formulovat tak, že **normály tvořicí a obalové plochy splývají v každém bodě charakteristiky.**

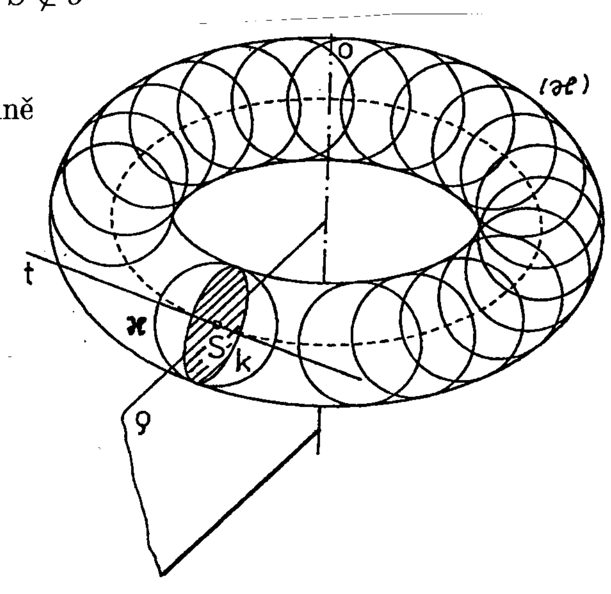



Obr.12.3

**12.4 Obalové plochy vzniklé elementárním pohybem kulové plochy $\kappa = (S, r)$**

**12.4.1 Obalová plocha vzniklá translací (směr $p$ ) kulové plochy** $\kappa = (S, r)$
Pohyb : **translace**
Tvořicí plocha $\kappa$ : **kulová plocha**
Obalová plocha $(\kappa)$ : **rotační válcová plocha**
**Charakteristika** $k$ : hlavní kružnice na $\kappa$ v rovině kolmé na směr translace, viz 12.3.1.

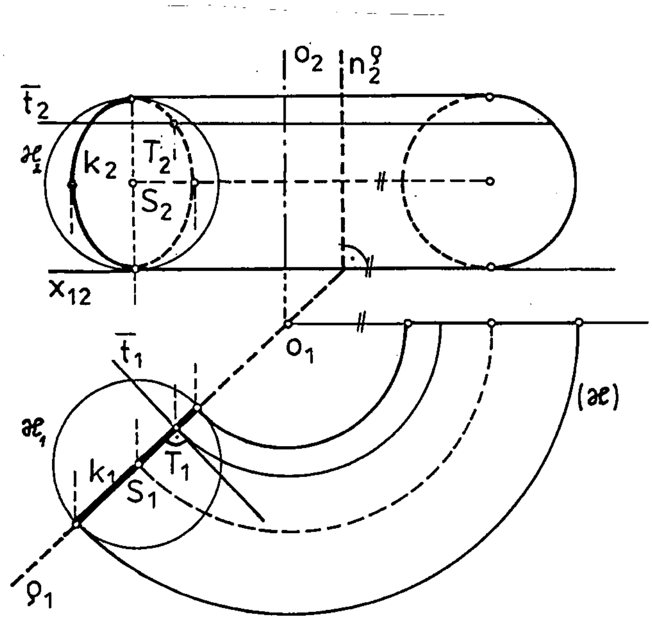
**12.4.2 Obalová plocha vzniklá rotací (osa $o$ ) kulové plochy** $\kappa = (S, r), S \notin o$
Pohyb : **rotace**
Tvořicí plocha $\kappa$ : **kulová plocha**, $S \notin o$
Obalová plocha $(\kappa)$ : **anuloid**
**Charakteristika** $k$ : meridiánová kružnice $k$ na kulové ploše $\kappa$ v rovině $\rho, \rho = (S, o)$.
Na obrázku 12.4a vidíme náčrt a na 12.4b zobrazení obalové plochy $(\kappa)$ a charakteristiky $k$ v Mongeově promítání, postup je zřejmý z obrázku.




Obr.12.4a

Ověření charakteristiky :

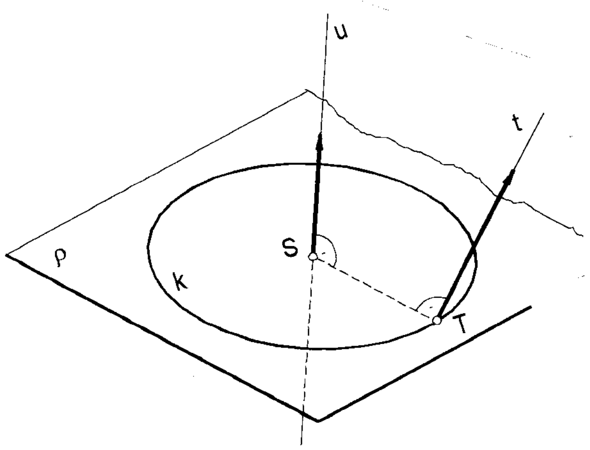
Ukážeme, že tečna $t$ trajektorie libovolného bodu $T$ meridiánové kružnice $k$ kulové plochy $\kappa$ leží v její tečné rovině. Tečna $t$ trajektorie v bodě $T$ meridiánové kružnice je tečnou rovnoběžkové kružnice bodu $T$ a je tedy kolmá k meridiánové rovině $\rho$.
Platí $t \perp \rho \Rightarrow t \perp ST \Rightarrow t$ leží v tečné rovině kulové plochy v bodě $T$ a bod $T$ je tedy bodem charakteristiky podle tvrzení z 12.3.3.
Je zřejmé, že charakteristika $k$ leží v rovině $\rho$, kolmé k tečně trajektorie středu kulové plochy.



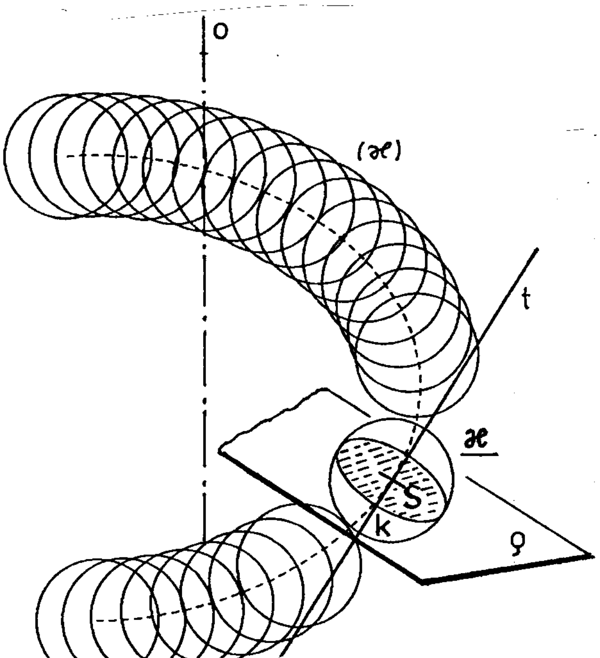

Obr.12.4b

### 12.4.3 Obalová plocha vzniklá šroubovým pohybem kulové plochy $\kappa$

Pohyb : **šroubový**
Tvořicí plocha $\kappa$ : **kulová plocha**, $S \notin o$
Obalová plocha $(\kappa)$ : **Archimedova serpentina**, (11.3)
**Charakteristika** $k$ : hlavní kružnice $k$ na kulové ploše v rovině $\rho$ kolmé k tečně $t$ šroubovice středu $S$ kulové plochy, viz náčrt na obrázku 12.5a.




Obr.12.5b



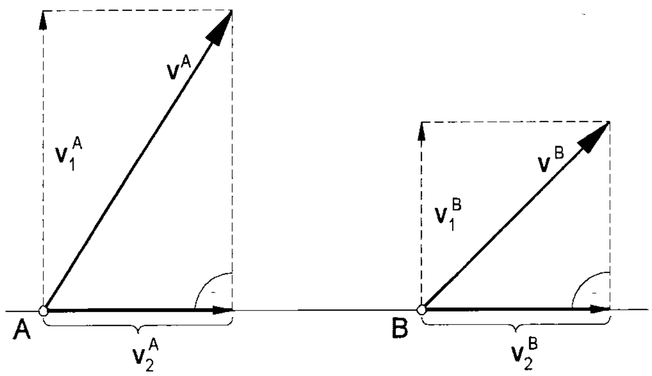

Obr.12.5a

**Ověření charakteristiky:**

Pro lepší porozumnění užijeme náčrtu na obr.12.5b.

Ukážeme, že hlavní kružnice $k$ (kulové plochy $\kappa$), ležící v rovině $\rho$, je charakteristikou. Tzn., že tečna $t$ trajektorie (šroubovice) libovolného bodu $T \in k$ leží v tečné rovině kulové plochy $\kappa$. Označme $u$ tečnu šroubovice středu $S$ kulové plochy. Podle principu tuhosti úsečky (viz následná poznámka ) jsou velikosti průmětů tečných vektorů v koncových bodech úsečky $ST$ na tuto úsečku stejné. Jelikož $u \perp ST$ , $(u \perp \rho \wedge ST \subset \rho)$ je $t$ rovněž kolmá k $ST$ (průměty tečných vektorů jsou nulové) a $t$ leží v tečné rovině kulové plochy. Bod $T$ je bodem charakteristiky $k$, viz 12.3.3.

Poznámka-**princip tuhosti úsečky**
Uvažujme úsečku $AB$, pohybující se v prostoru , označme $v^A, v^B$ vektory okamžitých rychlostí bodů $A, B$, obr.12.5c. Rozložíme-li vektory $v^A, v^B$ na složky $v_1^A$, $v_1^B$, kolmé k $AB$ a $v_2^A, v_2^B$ ve směru $AB$, pak $v_2^A = v_2^B$. Je zřejmé, že vektor $B - A$ má konstantní velikost a tedy platí $(B(t) - A(t))^2 = konst.$ a derivováním $2(v^B - v^A)(B - A) = 0$, po úpravě $v_2^A = v_2^B$.




Obr.12.5c

### 12.4.4 Úloha

V Mongeově promítání zobrazte charakteristiku $k$ obalové plochy, která vznikne šroubovým pohybem $(o, v_o, \text{prav.})$ kulové plochy $\kappa = (S, r)$.
Řešení je provedeno na obrázku 12.6 pro případ, kdy je tečna $t$ šroubovice středu $S$ kulové plochy $\kappa$ v průčelné poloze, $t \parallel \nu$.

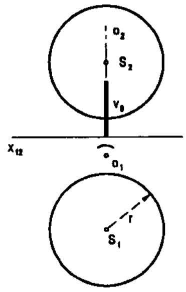
Řešení
Podle 12.4.3 zobrazíme charakteristiku $k$ na Archimedově serpentině a to je hlavní kružnice $k$ na kulové ploše $\kappa$, ležící v rovině $\rho$ kolmé k tečně $t$ šroubovice středu kulové plochy $\kappa$. Tuto úlohu jsme již řešili v 11.3.2.

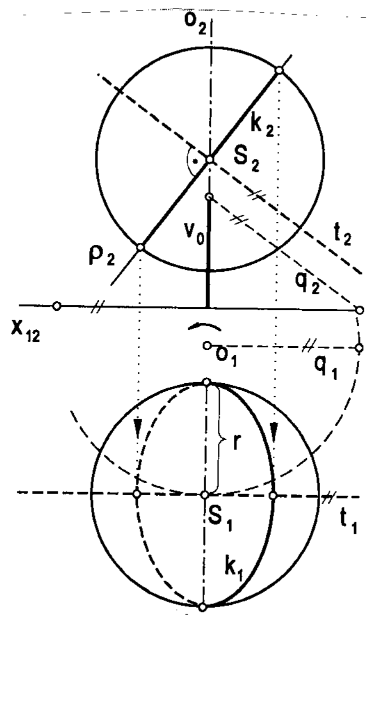
1) $t$ je tečna šroubovice v bodě $S$, viz 8.7,
v našem případě $t \parallel \nu, t_1 \parallel x_{1,2}$.

2) Rovina $\rho$ : $S \in \rho$ , $\rho \perp t$ je tedy kolmá k nárysně, jejím nárysem je přímka $\rho_2, \rho_2 \perp t_2$.

3) $k = (S, r)$, $k \subset \rho, \rho \perp \nu$.
Nárysem kružnice $k$ ležící v promítací rovině $\rho$ je úsečka, půdorysem elipsa, viz **3.6.4.**

Poznámka. Pokud je tečna šroubovice středu S kulové plochy v obecné poloze, pak ji snadno "přešroubujeme" do průčelné polohy a užijeme výše uvedeného postupu.




Obr.12.6

### 12.4.5 Závěr

**Charakteristika obalové plochy, která vznikne elementárním pohybem kulové plochy $\kappa = (S, r)$ je hlavní kružnice na této kulové ploše a leží v rovině kolmé k tečně trajektorie středu kulové plochy.**

## 12.5 Obalové plochy vzniklé elementárním pohybem roviny $\rho$

### 12.5.1 Obalová plocha vzniklá rotací roviny $\rho$,

která není kolmá k ose pohybu, ani s ní není rovnoběžná

Pohyb: **rotace**

Tvořicí plocha $\kappa$ : **rovina** $\rho$, $o \not\perp \rho$, $o \not\parallel \rho$

Obalová plocha $(\kappa)$ : **rotační kuželová plocha**

**Charakteristika** $k$ : dotyková površka rotační kuželové plochy a tvořicí roviny $\rho$ , která je tečnou rovinou kuželové plochy.

Na na obr.12.7 je náčrt situace, na obr.12.8 je konstrukce v Mongeově promítání.

Konstrukce charakteristiky $k$ :

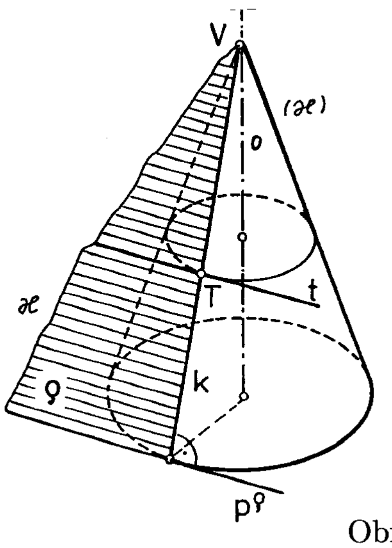
1)Pro půdorys $k_1$ charakteristiky máme $(k \perp p^\rho \wedge p^\rho \subset \pi) \Rightarrow k_1 \perp p_1^\rho$,

2) $k \subset \rho, k = PN$,

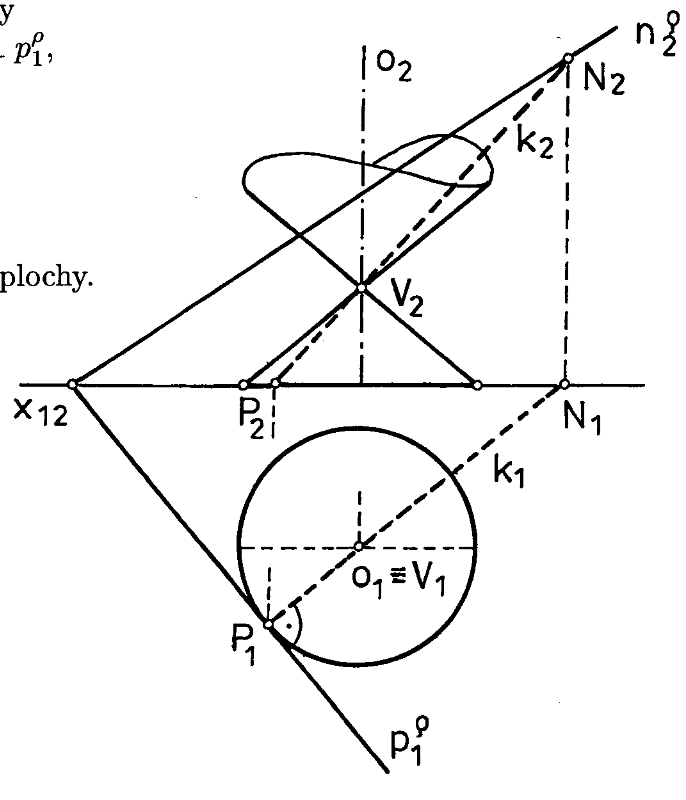
odvodíme nárys $k_2$ na základě toho, že $k$ leží v rovině $\rho$.

Charakteristika $k = PN$ je površka kuželové plochy.

3) $V \equiv k \cap o$ je vrchol kuželové plochy.




Obr.12.7




Obr.12.8

Ověření charakteristiky provedeme současně pro 12.5.1 a 12.5.2 :

Tečna $t$ trajektorie libovolného bodu $T$ charakteristiky $k$ leží v tvořicí rovině $\rho$ a ta je zároveň svojí tečnou rovinou.Takže površka $k$ kuželové (resp.válcové) obalové plochy je podle 12.3.3 je její charakteristikou.

### 12.5.2 Obalová plocha vzniklá rotací roviny $\rho$ , jenž je rovnoběžná s osou rotace

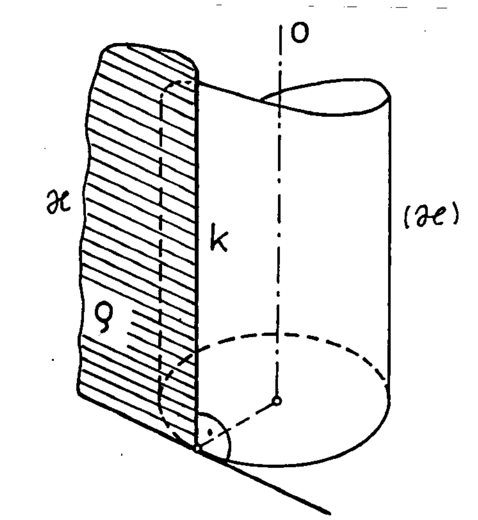
Pohyb: **rotace**

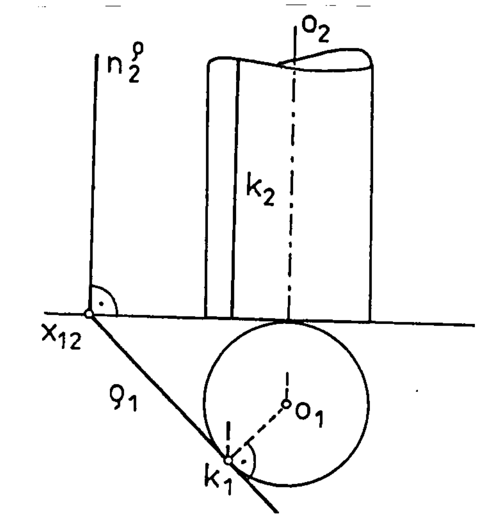
Tvořicí plocha $\kappa$ : **rovina** $\rho$, $o \parallel \rho$

Obalová plocha $(\kappa)$ : **rotační válcová plocha**

**Charakteristika** $k$ : dotyková površka rotační válcové plochy a tvořicí roviny $\rho$

Náčrt charakteristiky je na obr.12.9a, konstrukce v Mongeově promítání na obr.12.9b.




Obr.12.9a Obr.12.9b

**12.5.3 Obalová plocha vzniklá šroubovým pohybem roviny** $\rho$, která není kolmá k ose pohybu,ani s ní není rovnoběžná

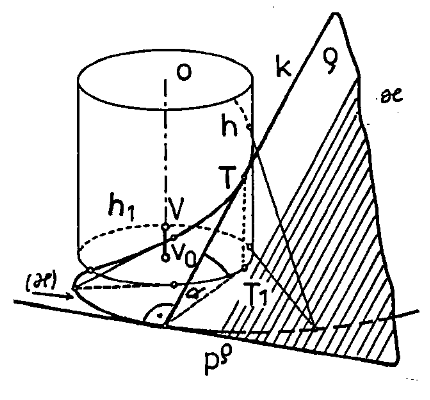
Pohyb: **šroubový** , je dáno $o \perp \pi$, $v_0$ a smysl

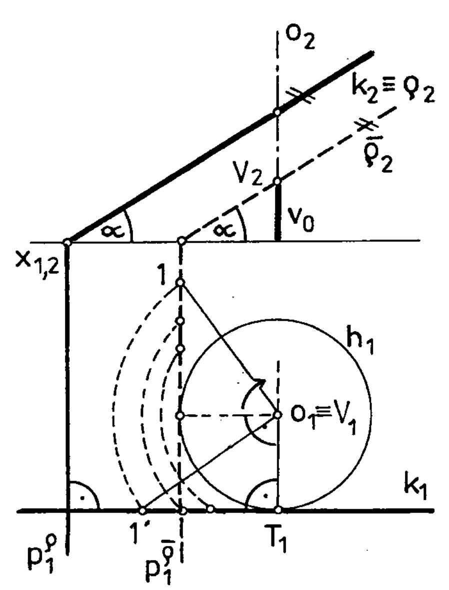
Tvořicí plocha $\kappa$ : **rovina** $\rho$ , $\rho \not\perp o$, $\rho \nparallel o$

Obalová plocha $(\kappa)$ :

**plocha tečen šroubovice** $h$ .

**Charakteristika** $k$: tečna $k$ šroubovice $h$ , která leží v rovině $\rho$ a svírá úhel $\alpha$ s půdorysnou, $\alpha = \angle \rho \pi$, viz obr. 12.10a.




Obr.12.10a Obr.12.10b

Ověření charakteristiky $k$, viz obr. 12.10.

Tvořicí plocha je rovina $\rho$ a její tečná rovina s ní splývá. Charakteristika roviny $\rho$ je tvořena všemi jejími body , ve kterých tečna trajektorie (šroubovice $h$ ) leží v rovině $\rho$ (viz 12.3.3). Površky řídicího kužele příslušné k těmto tečnám leží v rovině $\bar{\rho}$, $V \in \bar{\rho}$, $\bar{\rho} \parallel \rho$, půdorysné stopníky površek vytvoří $p^{\bar{\rho}}$ . Obrácením známé konstrukce tečny šroubovice $h$ získáme půdorys $k_1$ charakteristiky $k$ . Charakteristika je tedy tečna šroubovice $h$ v bodě $T$. Obalová plocha je tedy plocha tečen šroubovice $h$. Rovina $\rho$ je tečnou rovinou plochy podél celé charakteristiky. Obrázek 12.10b je pomocný a pomůže pochopení předcházejících úvah. Rovina $\rho$ je zde v poloze kolmé k nárysně.

### 12.5.4 Úloha

Zobrazte charakteristiku obalové plochy, která vznikne šroubovým pohybem $(o, v_o,$ prav.) roviny $\rho$, $\rho \not\parallel o$ , $\rho \not\perp o$ .

Řešení, obr.12.11.

Sestrojíme šroubovici $h$ , jejíž tečny vytvoří obalovou plochu roviny $\rho$ a tečna $t$ této šroubovice je charakteristikou obalové plochy,podle 12.5.3. Při řešení v Mongeově promítání si všimněte, že daná rovina $\rho$ je nárysně promítací a tím je konstrukce jednodušší.

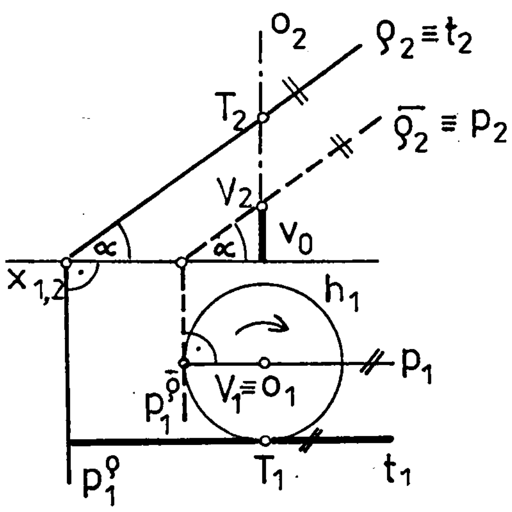
1) $\alpha = \angle\rho\pi$, úhel stoupání šroubovice $h$.

2) $\bar{\rho}$ : $V \in \bar{\rho}$, $\bar{\rho} \parallel \rho$.

3) $\bar{\rho}$ je tečná rovina řídicí kuželové plochy $\Rightarrow$ můžeme sestrojit půdorys $h_1$ šroubovice $h$.

4) $p$ je površka řídicí kužel.plochy, $p \in \bar{\rho}$.

5)Charakteristika $t$ : $t \parallel p$, $t_1$ je tečna kružnice $h_1, t_2 \equiv \rho_2$, $T \in t$ , $t$ je tečna šroubovice $h$.




Obr.12.11

Poznámka

Plocha tečen šroubovice z 12.5.3 a 12.5.4 se nazývá **rozvinutelná šroubová plocha**, setkáme se s ní ve 13. kapitole.

### 12.5.5 Obalová plocha vzniklá šroubovým pohybem roviny rovnoběžné s osou pohybu

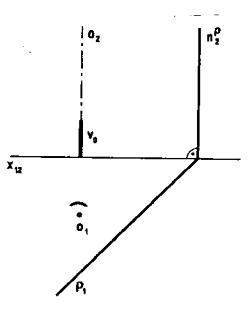
Pohyb : **šroubový,** $o \perp \pi$

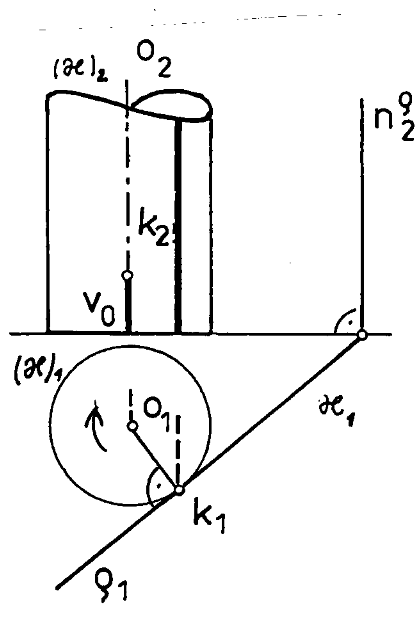
Tvořicí plocha $\kappa$ : **rovina** $\rho$, $\rho \parallel o$

Obalová plocha $(\kappa)$ : **rotační válcová plocha**

**Charakteristika** $k$ : dotyková površka rotační válcové plochy a tvořicí roviny $\rho$,

řešení v Mongeově promítání je na obr. 12.12.






Obr.12.12

## 12.6 Obalové plochy vzniklé elementárním pohybem rotačních ploch

Z předcházejících úvah je zřejmé, že obalová plocha je určena pohybem tvořicí křivky tj. charakteristiky. Problematika obalových ploch je tím omezena na nalezení charakteristiky, neboť další úlohy na plochách jsme již vyřešili dříve u rotačních a šroubových ploch.

**12.6.1 Konstrukce bodů charakteristiky obalové plochy vzniklé elementárním pohybem rotační plochy** $\kappa$ , viz náčrt na obrázku 12.13a.

Konstrukci můžeme stručně zdůvodnit takto: Na rovnoběžkové kružnici $p$ tvořicí rotační plochy hledáme body $X$, ve kterých tečná rovina tvořicí plochy obsahuje tečnu trajektorie tohoto bodu. K tomu účelu sestrojíme pomocnou kulovou plochu $\kappa^p$, která se dotýká tvořicí rotační plochy $\kappa$ podél rovnoběžky $p$, viz obrázek 12.1. Na kulové ploše $\kappa^p$ snadno sestrojíme body, ve kterých tečna trajektorie leží v její tečné rovině podle 12.4. Tyto body leží na charakteristice $m$ kulové plochy. Průsečíky kružnic $p$ a $m$ jsou hledané body $X$.

Zdůvodnění zapíšeme symbolicky takto :

a) $p \equiv \kappa \cap \kappa^p$, $m \equiv \kappa^p \cap (\kappa^p)$, $k \equiv \kappa \cap (\kappa) =?$

b)Pro bod $X$ charakteristiky platí $X \in m \;\Rightarrow$ tečna trajektorie bodu $X$ leží v tečné rovině $\kappa^p$.

c) $X \in p \;\Rightarrow$ totožnost tečných rovin pomocné kulové plochy $\kappa^p$ a tvořicí plochy $\kappa$ v bodě $X$.

d) z b) c) $\Rightarrow$ tečna trajektorie v bodě $X$ leží v tečné rovině tvořicí plochy $\kappa$ a bod $X$ je bodem charakteristiky $k$.

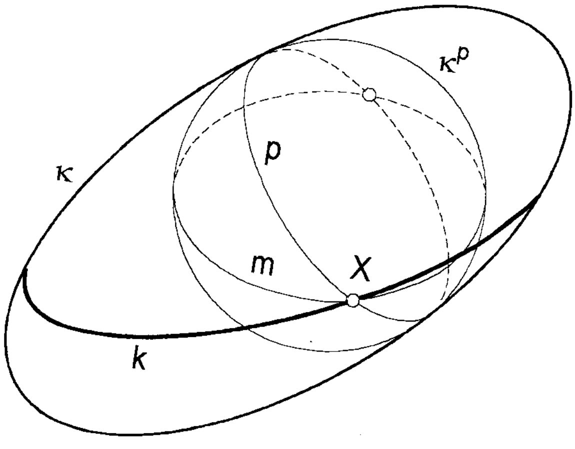
**Postup konstrukce :**

1)Zvolíme rovnoběžkovou kružnici $p$ na tvořicí ploše $\kappa$ .

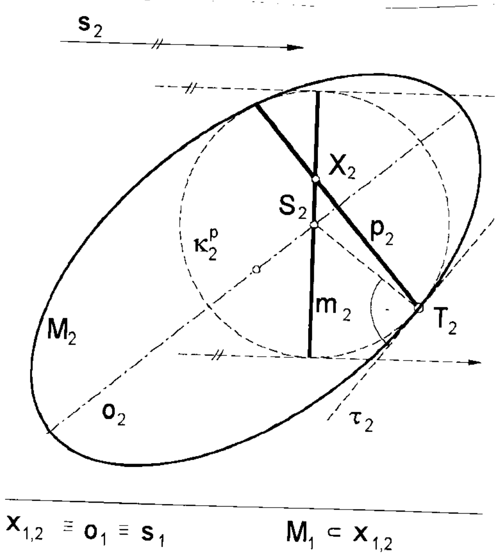
2)Sestrojíme pomocnou kulovou plochu $\kappa^p$ , dotýkající se $\kappa$ podél rovnoběžky $p$ .

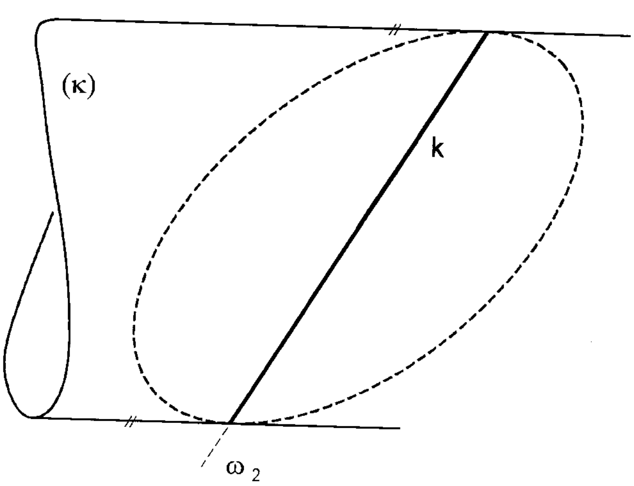
3)Sestrojíme charakteristiku $m$ obalové plochy $(\kappa^P)$ vzniklé pohybem kulové plochy $\kappa^p$.

4) Pokud existují průsečíky $X$ rovnoběžky $p$ s charakteristikou $m$, $\{X\} = m \cap p$, pak jsou to body hledané charakteristiky $k$.




Obr.12.13a




Obr.12.13b Obr 12.13c

**Příklad**

Výše uvedený postup konstrukce bodu $X$ charakteristiky $k$ demonstrujeme na jednoduchém příkladě obalové plochy vzniklé translací (směr $s$ ) rotačního elipsoidu (osa $o$, meridián $M$ ). Z obrázku 12.13b je zřejmé, že osa $o$ i hlavní meridián $M$ leží v nárysně, můžeme se omezit na konstrukci nárysu $X_2$ bodu $X$ charakteristiky $k$ :

1) Volba rovnoběžkové kružnice $p$ na elipsoidu, jejím nárysem je úsečka $p_2$.

2) $\kappa^p$ se dotýká elipsoidu podél rovnoběžky $p$, její střed $S$ leží na normále elipsoidu (tečná rovina $\tau$ v bodě $T$ meridiánu $M$ je nárysně promítací, $\tau_2$ je tečnou elipsy $M$ v $T, ST \perp \tau_2$ ).

3) Charakteristika $m$ obalové plochy vzniklé translací pomocné kulové plochy $\kappa^p$ je její hlavní kružnice $m$ v rovině kolmé ke směru $s$. $s \parallel \nu \Rightarrow$ nárysem $m$ je úsečka $m_2$.

4) Bod $X_2 \equiv m_2 \cap p_2$ je nárysem bodu $X$ hledané charakteristiky $k$.

5) Volba další rovnoběžkové kružnice $p$ na elipsoidu.

Poznámka. Výslednou obalovou plochou je válcová plocha, vzniklá translací charakteristiky $k$ (elipsa v rovině $\omega, \omega \perp \nu$), viz obr.12.13c .

### 12.6.2 Úloha

**Sestrojte charakteristiku $k$ obalové plochy, která vznikne rotací pláště rotačního komolého kuželе kolem osy o.** Sestrojte hlavní meridián této obalové plochy.

Řešení podle 12.6.1, v Mongeově promítání na obr.12.14:

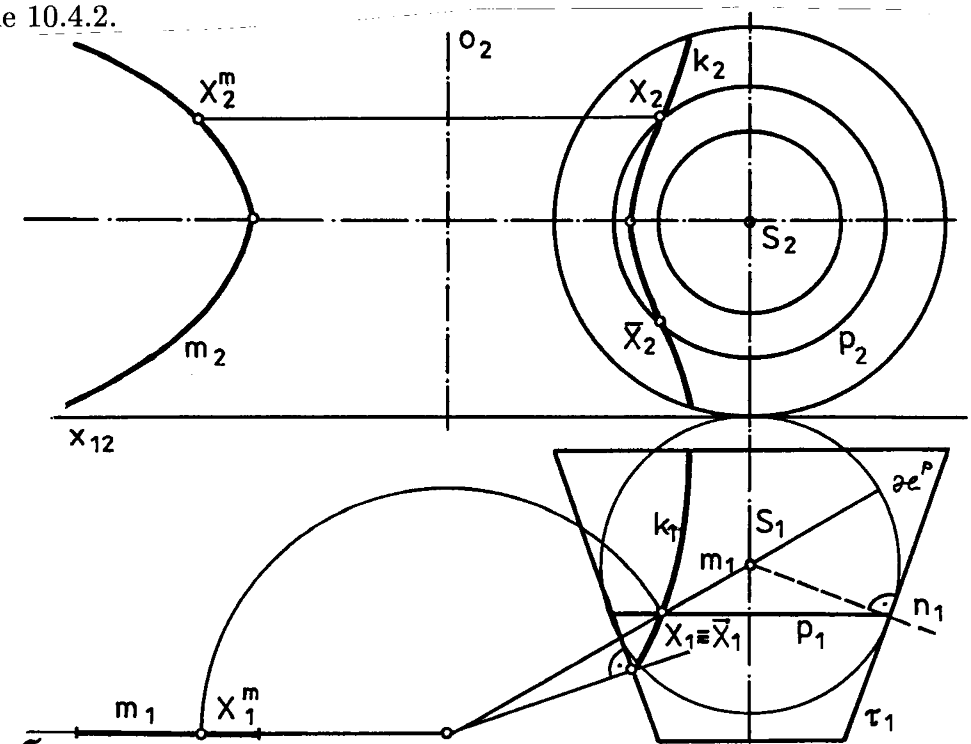
1) $p$ je zvolená rovnoběžka na kuželi.

2) Sestrojíme pomocnou kulovou plochu $\kappa^p = (S, r)$, vepsanou kuželi podél rovnoběžky $p$. Střed S leží na společné normále $n$ obou ploch a na ose kužele. Sestrojíme normálu ke vhodné společné tečné rovině $\tau$ ploch, v našem zadání je $\tau \perp \pi$.

3) $m$ je charakteristika na anuloidu (viz 12.4.2).

4) Průsečíky $\{X\} \equiv m \cap p$ jsou body hledané charakteristiky $k$ .

5) Charakteristika $k$ je tvořící křivkou obalové plochy, konstrukce meridiánu je zřejmá podle 10.4.2.




Obr.12.14

### 12.6.3 Úloha

**Sestrojte charakteristiku obalové plochy, která vznikne rotací části rotační válcové plochy kolem osy $o$.**

Řešení podle 12.6.1 v Mongeově promítání na obr.12.15.

1) $p$ je zvolená rovnoběžka na válcové ploše.

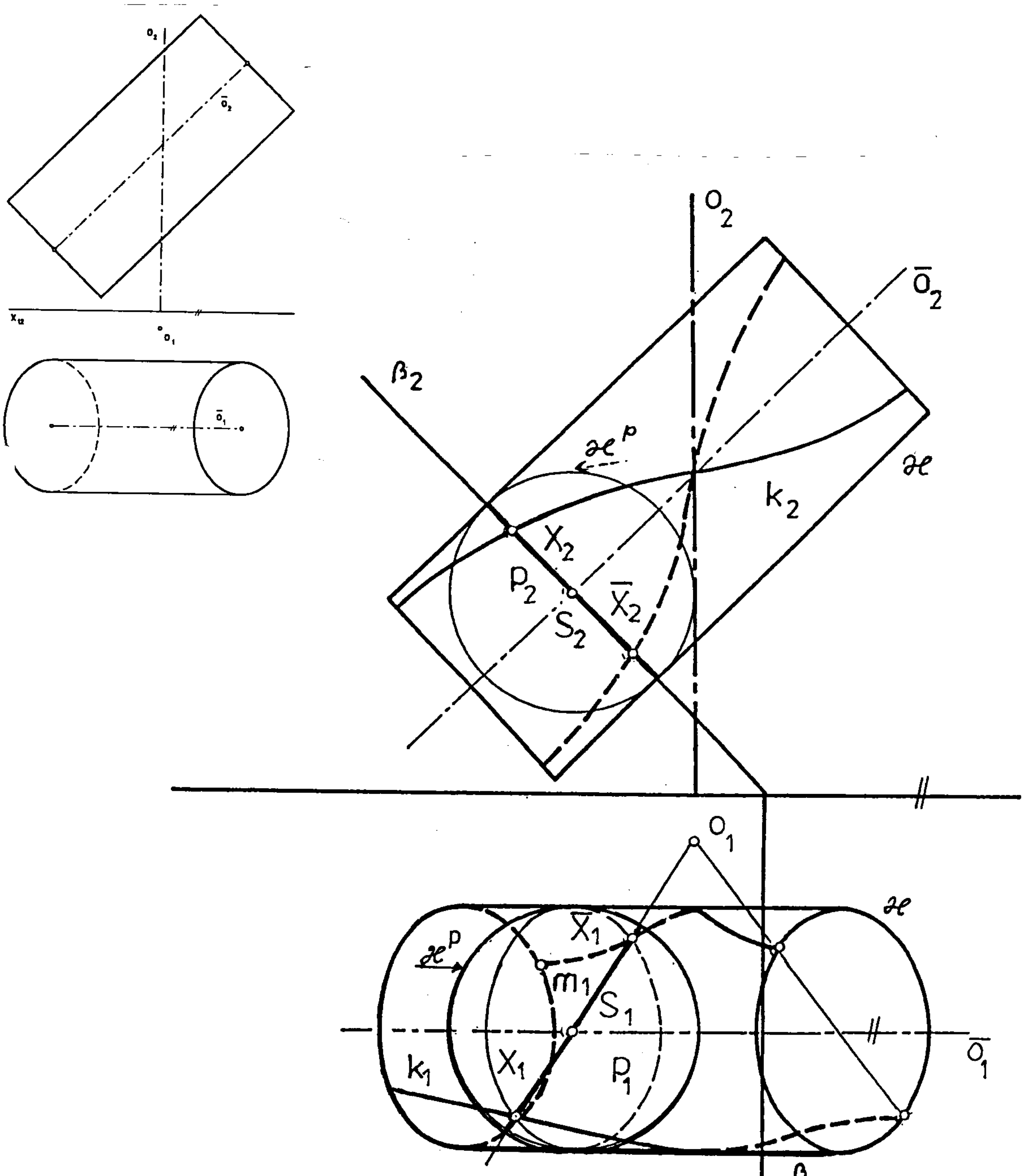
2) $\kappa^p$ je pomocná vepsaná kulová plocha, $\kappa^p = (S, r)$

3) $m$ je charakteristika na $(\kappa^p)$ (viz 12.4.2)

4)Průsečíky $\{X\} \equiv m \cap p$ jsou body charakteristiky $k$.

Poznámka

V našem případě osa válcové plochy $\bar{o} \parallel \nu$ , rovnoběžková kružnice leží v rovině $\beta \perp \bar{o}, \beta \perp \nu$ . Střed $S$ pomocné vepsané kulové plochy leží na normále ke vhodné společné tečné rovině $\tau$ obou ploch, v našem případě je $\tau \perp \nu$.




Obr.12.15

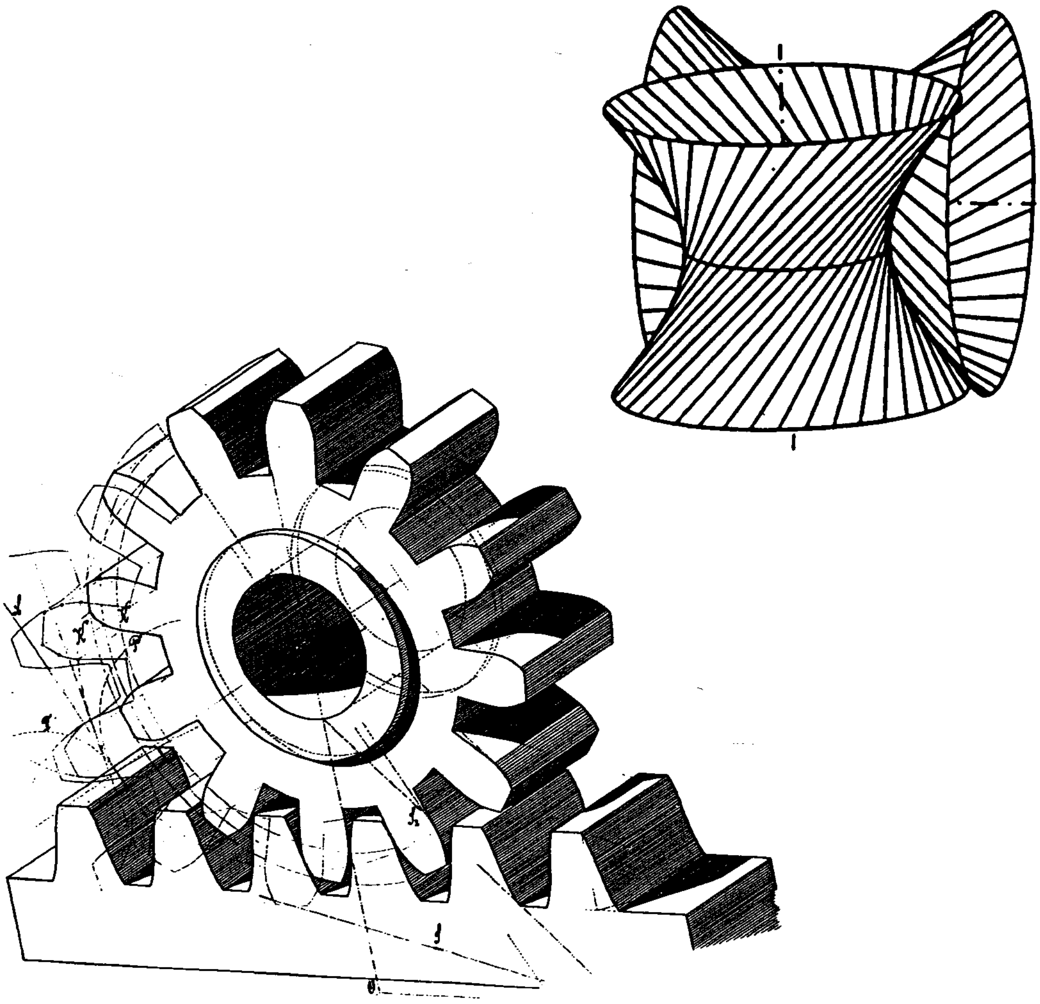
**12.6.4** Charakteristika obalové plochy vzniklé **šroubovým pohybem** rotační plochy se sestrojí analogicky, jako v předcházejících úlohách s tím rozdílem, že pomocná vepsaná kulová plocha vytvoří Archimedovu serpentinu (viz 12.4.3).

V předcházejících úvahách jsme užívali jako pomocnou plochu ke konstrukci charakteristiky pouze vepsanou kulovou plochu a tím jsme se omezili pouze na obalové plochy, vznikající pohybem rotačních ploch, kterým lze kulové plochy vepsat.

Charakteristiky obalových ploch, vznikajících elementárním pohybem kuželových a válcových ploch (nemusí být rotační), lze konstruovat analogicky k výše popsané metodě, jestliže jako pomocnou plochu volíme tečnou rovinu kuželové příp. válcové plochy.

S užitím obalových ploch se setkáváme ve strojnické praxi u řady obráběcích nástrojů, u brusných kotoučů, fréz i při konstrukci sdružených ploch (sdružené plochy jsou plocha a její obalová plocha) ozubených kol (obrázek 12.16), vřeten kompresorů apod.

Studium geometrických vlastností obalových ploch tvoří základ k dobré představě o funkci těchto ploch v praxi.



Obr.12.16

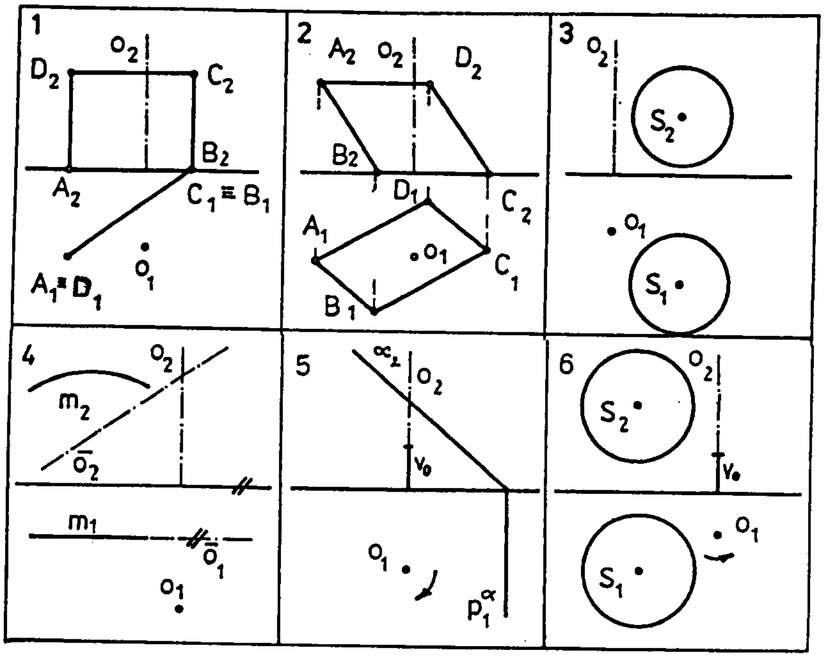
**Cvičení**

1) - 2) Sestrojte obalovou plochu, která vznikne rotací rovnoběžníka ABCD kolem osy $o$ .

3) Sestrojte charakteristiku obalové plochy při rotaci kulové plochy $\kappa = (S, r)$ kolem osy $o$ a hlavní meridián vzniklé plochy.

4) Sestrojte charakteristiku obalové plochy při rotací dané rotační plochy (osa $\bar{o}$, meridián $m$) kolem osy $o$ a hlavní meridián vzniklé plochy.

5-6) Sestrojte a) charakteristiku, b) hlavní meridián, c) čelní řez půdorysnou $\pi$ obalové plochy, která vznikne šroubovým pohybem kulové plochy $\kappa = (S, r)$ (případně roviny $\omega$).




Obr.12.17