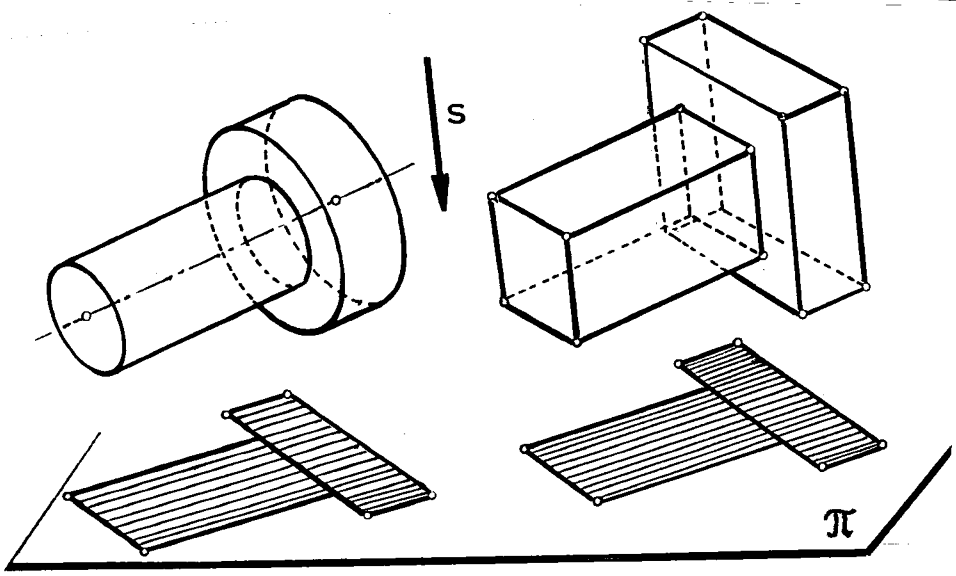
3. MONGEOVO PROMÍTÁNÍ

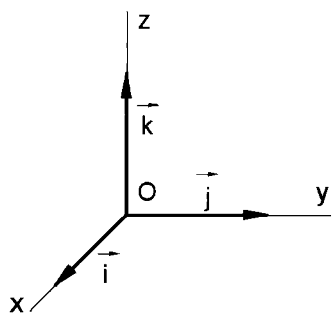
Rovnoběžné promítání na jednu průmětnu nám umožňuje zobrazit prostorový objekt na rovinu. Toto zobrazení není vzájemně jednoznačné, to znamená, že k obrazu (průmětu) objektu neumíme jednoznačně určit objekt v prostoru. Na obrázku 3.1. si všimněte dvou zcela odlišných objektů, jejichž rovnoběžné průměty (průmětna π, směr promítání s) jsou shodné a nestačí tedy k určení objektů v prostoru.

V technické praxi potřebujeme vyrobit součástku na základě technického výkresu (průmětu). **K dosažení jednoznačného přiřazení mezi body technického výkresu a body prostoru užijeme více průmětů a mluvíme pak o promítací metodě.** Nejběžnější metodou je pravoúhlé promítání na dvě navzájem kolmé průmětny - Mongeovo promítání.



Obr.3.1

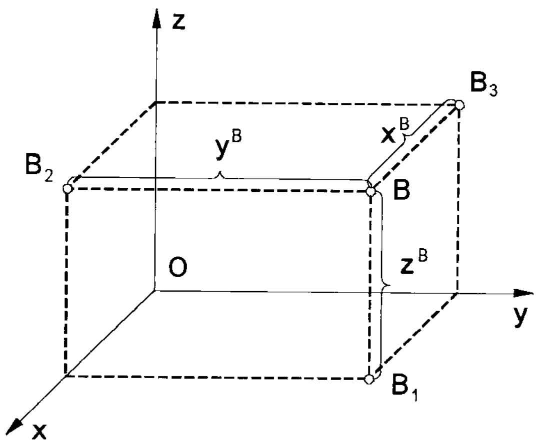
3.1 Kartézský souřadnicový systém

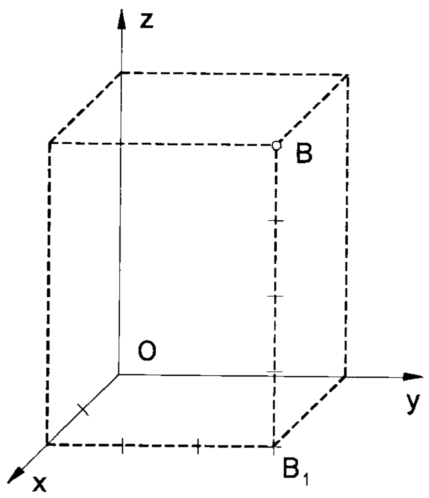


Kartézský souřadnicový systém, viz obr.3.2, je určený počátkem O a třemi ortonormálními vektory $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Souřadnicové roviny $(x,y),(y,z),(x,z)$ jsou určeny bodem O a dvojicemi vektorů $\{\vec{i},\vec{j}\},\{\vec{j},\vec{k}\},\{\vec{i},\vec{k}\}$. Souřadnicové osy x,y,z jsou průsečnice těchto rovin. Jsou to přímky určené bodem O a po řadě vektory $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Společná velikost vektorů $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ je jednotka délky, označme ji j.

Obr.3.2

Poloha bodu B v prostoru, obr. 3.3, je určena trojicí čísel x,y,z ; jsou to orientované vzdálenosti bodu B od souřadnicových rovin vyjádřené v jednotce j. Trojici (x,y,z) nazýváme kartézskými souřadnicemi bodu B. Jsou to souřadnice vektoru $(B-O)$ v ortonormální bázi $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Tři navzájem kolmé roviny tvoří **pravoúhlý trojhran**. Pravoúhlý trojhran určený rovinami $(x,y),(y,z),(x,z)$ nazýváme **souřadnicovým trojhranem.** Souřadnicový trojhran (doplněný jednotkou j) jednoznačně určuje odpovídající kartézský souřadnicový systém a obráceně.





$(B = x^B, y^B, z^B)$ Obr.3.3 $B = (2, 3, 4)$

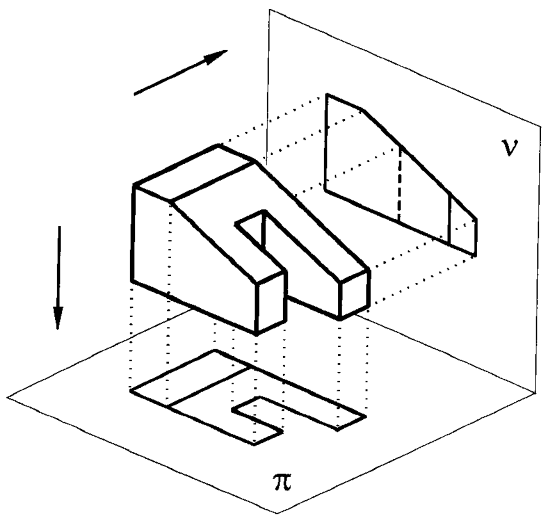
Poznámka. V následujících úvahách budeme užívat pojmy a vlastnosti zmíněné v 1. kapitole, jejíž část je věnována rovnoběžnému promítání. Je vhodné nejdříve věnovat pozornost této kapitole.

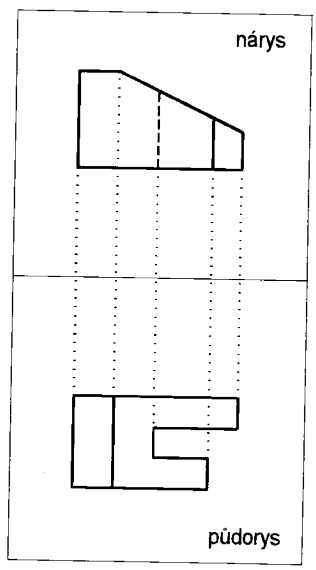
3.2 Úvod do Mongeova promítání

Představu o Mongeově promítání prostorových objektů do dvou navzájem kolmých rovin půdorysny a nárysny můžete získat, prohlédnete-li si pozorně obrázek 3.4.

Nejprve promítáme kolmo na vodorovnou rovinu π - **půdorysnu.** Promítací přímky jsou svislé a jde tedy o pohled shora tj. **půdorys objektu.**

Pak promítáme kolmo na svislou (obvykle průčelnou) rovinu ν - **nárysnu.** Promítací přímky jsou kolmé k svislé (průčelné) rovině a jde tedy o pohled zepředu tj. **nárys objektu.**

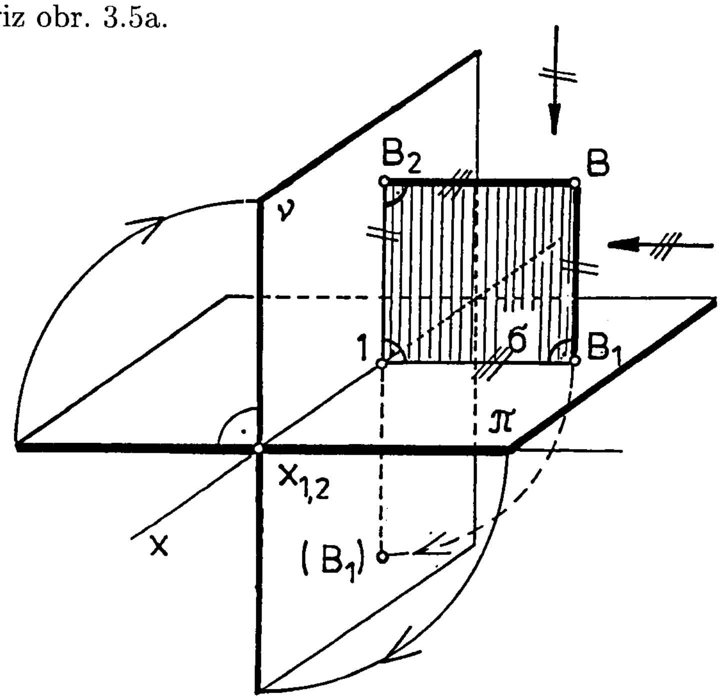




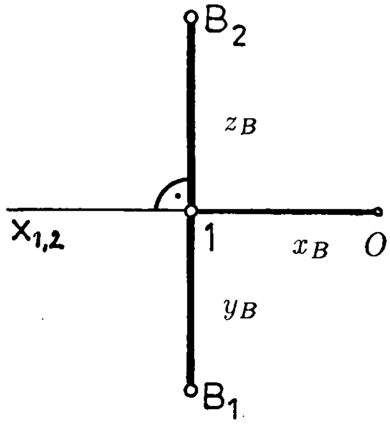
obr.3.4

3.3 Základní pojmy Mongeova promítání

Mongeovo promítání je určeno dvěma k sobě kolmými průmětnami a to půdorysnou π (ve vodorovné poloze) a nárysnou ν (ve svislé, obvykle průčelné poloze). Kartézský souřadnicový systém obvykle volíme tak, aby půdorysna π byla rovinou (x, y) a nárysna byla rovinou (x, z). Průsečnice $x \equiv \pi \cap \nu$ je osa x a jmenuje se základnice, viz obr. 3.5a.



Obr.3.5a



Obr.3.5b

Bod B v prostoru zobrazíme tak, že jej pravoúhle promítneme do nárysny, dostaneme nárys bodu B a označíme B_2. Potom pravoúhle promítneme bod B do půdorysny, dostaneme půdorys bodu B, označíme jej B_1. Půdorysnu otočíme kolem základnice x, (značíme $x_{1,2}$) do nárysny a tu ztotožníme s nákresnou (sešit). V nákresně tím získáme dvojici

(B_1), B_2, kterou nazveme sdružené průměty bodu B a dále označíme B_1, B_2, obr.3.5b. Bod B má souřadnice x_B, y_B, z_B ,kde

x_B je vzdálenost bodu B od roviny (y, z) tj. od bokorysny,

y_B je vzdálenost bodu B od roviny (x, z) tj. od nárysny,

z_B je vzdálenost bodu B od roviny (x, y) tj. od půdorysny, obr.3.5a,b.

Poznámka. Chceme-li, aby zvolený kartézský souřadnicový systém byl pravotočivý, musíme nanášet kladné souřadnice x doleva od počátku O, který můžeme zvolit libovolně na ose x.

Věta

a) Spojnice sdružených průmětů B_1 B_2, $(B_1 \not\equiv B_2)$, je kolmá k základnici.

b) Přiřazení mezi body v prostoru a sdruženými průměty je vzájemně jednoznačné:

$$\mathbf{B} \Longleftrightarrow \mathbf{B_1}\ ,\ \mathbf{B_2}.$$

Důkaz. Je zřejmé, viz obr. 3.5a, že promítací přímky bodu B určují rovinu σ , která je kolmá k základnici x , neboť $BB_1 \perp \pi$, $BB_2 \perp \nu$ a tedy $BB_1 \perp x$ a $BB_2 \perp x$. Z kolmosti $x \perp \sigma$ plyne $x \perp B_1 1$ a $x \perp B_2 1$, kde $1 \equiv \sigma \cap x$.

Snadno nahlédneme, že příslušné promítací přímky vedené půdorysem B_1 a nárysem B_2 leží v σ a jsou tedy různoběžné.

Poznámka. Spojnice sdružených průmětů B_1 B_2 se nazývá **ordinála**, viz obr.3.5b.

3.4 Průměty základních útvarů

Přímka b **v obecné poloze** : $b \not\perp x$. Sdružené průměty přímky b v obecné poloze jsou tvořeny dvojicí přímek a to jejím půdorysem b_1 a jejím nárysem b_2, viz obrázek 3.6 nahoře, bod A leží na přímce b .

Na obrázku 3.6 uprostřed si všimněte půdorysně promítací roviny α přímky b a na obr.3.6 dole její nárysně promítací roviny β. Promítací roviny jsou tvořeny promítacími přímkami jednotlivých bodů přímky b.

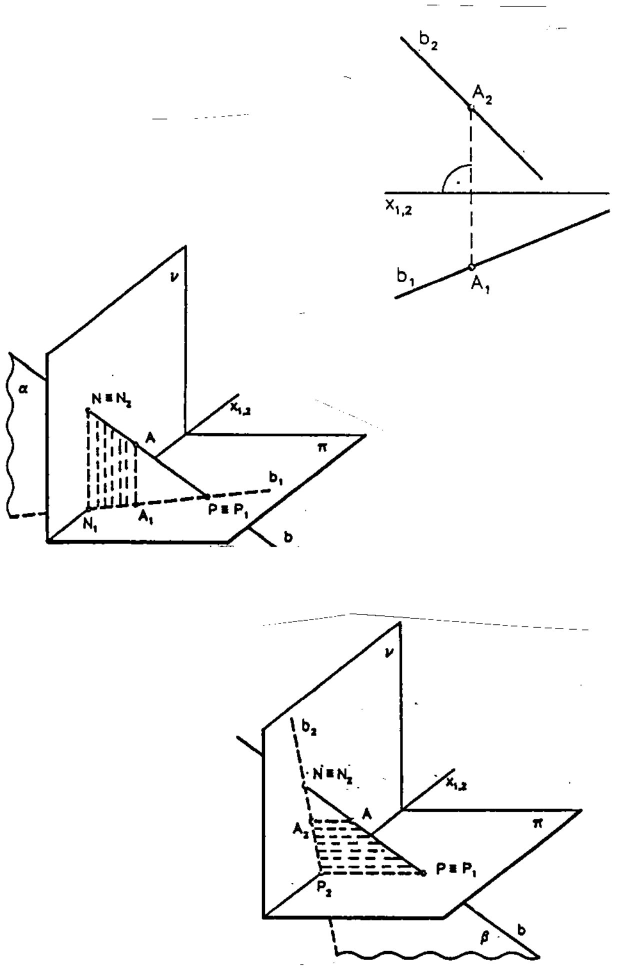
Poznámka

Sdružené průměty b_1, b_2 přímky v obecné poloze určují přímku b v prostoru jednoznačně.

Je-li dán jeden průmět bodu B této přímky, lze jednoznačně určit zbývající průmět bodu B. Pro zvláštní polohy přímky b je situace složitější.

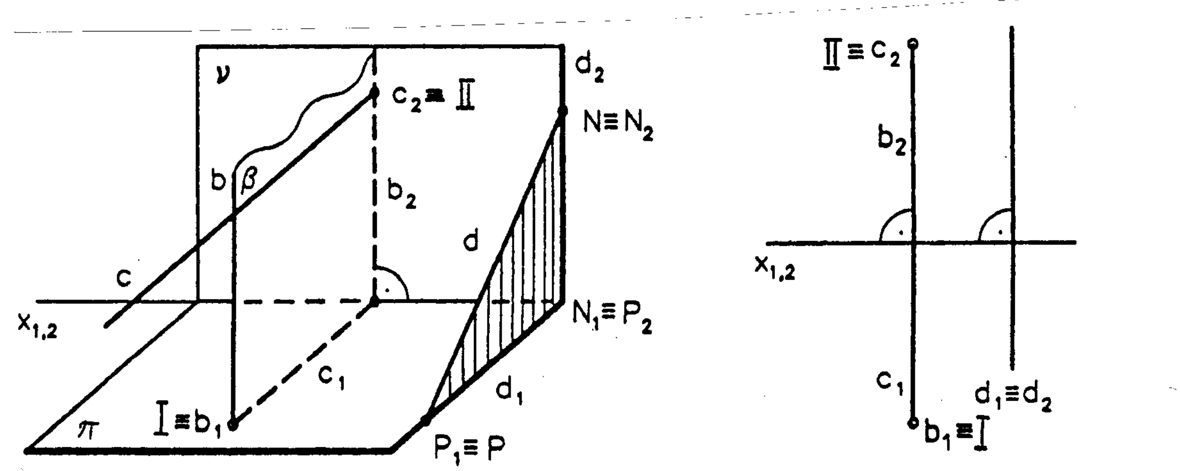
Je-li přímka d kolmá k základnici a není kolmá ani k jedné z průměten, pak pro její sdružené průměty platí $d_1 \equiv d_2$, $d_1 \perp x_{1,2}$, viz obrázek 3.7. V tomto případě není přímka sdruženými průměty určena jednoznačně.

K jejímu jednoznačnému určení je třeba zadat sdružené průměty dvou bodů přímky.



Obr.3.6

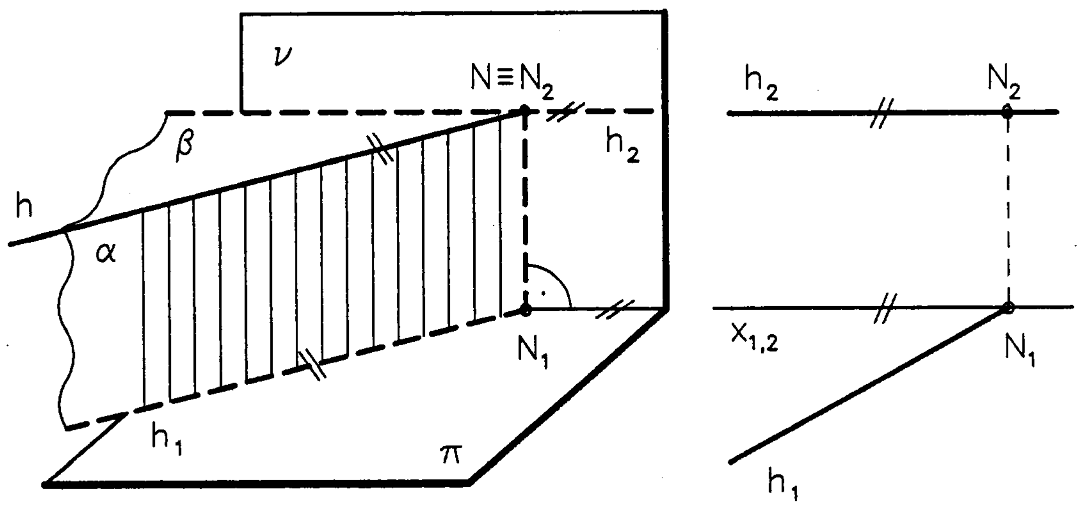
Zvláštní polohy přímky jsou znázorněny na obr. 3.7, 3.8, 3.9.
Na obrázku 3.7 se přímka $b \perp \pi$ promítá do půdorysny jako bod $I \equiv b_1$, jejím nárysem je přímka $b_2 \perp x_{1,2}$ a obdobně pro $c \perp \nu$ je $c_2 \equiv II$. Sdružené průměty přímky $d \perp x, (d \not\perp \pi, d \not\perp \nu)$ jsou popsány v předešlé poznámce.



Obr.3.7

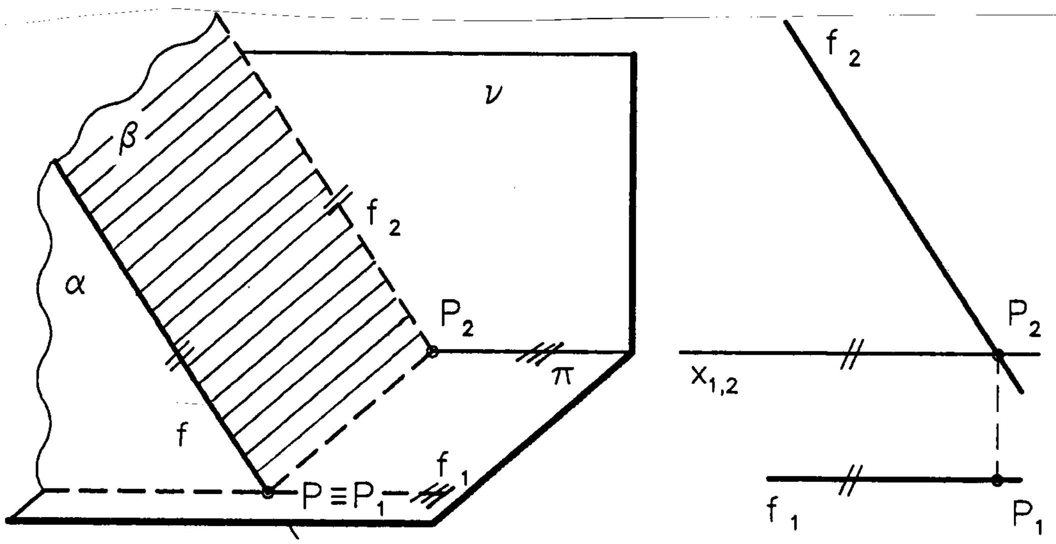
Dále budeme používat následující označení.
$P \equiv b \cap \pi$ je **půdorysný stopník** přímky b tj. průsečík přímky b s půdorysnou,
$N \equiv b \cap \nu$ je **nárysný stopník** přímky b,
α je **půdorysně promítací rovina** přímky $b, \alpha \perp \pi, b \subset \alpha$,
β je **nárysně promítací rovina** přímky b, $\beta \perp \nu, b \subset \beta$,
$p^\sigma \equiv \sigma \cap \pi$ je **půdorysná stopa** roviny σ, $n^\sigma \equiv \sigma \cap \nu$ je **nárysná stopa** roviny σ,
h je **vodorovná hlavní přímka**, $h \parallel \pi$, f je **průčelná hlavní přímka**, $f \parallel \nu$.

Na obrázku 3.8 je znázorněna vodorovná (horizontální) hlavní přímka h ($h \parallel \pi$, $h_2 \parallel x_{1,2}$), vpravo sdružené průměty, vlevo názorný obrázek (α, β jsou promítací roviny přímky h).
Nárys horizontální hlavní přímky je rovnoběžný se základnicí.



Horizontální hlavní přímka h a její sdružené průměty
Obr.3.8

Podobně přímka f ($f \parallel \nu$) je průčelná (frontální) hlavní přímka a $f_1 \parallel x_{1,2}$, viz obrázek 3.9.
Půdorys frontální hlavní přímky je rovnoběžný se základnicí.



Frontální hlavní přímka f a její sdružené průměty
Obr.3.9

Rovina

Ze stereometrie víme, že rovina σ v prostoru může být určena

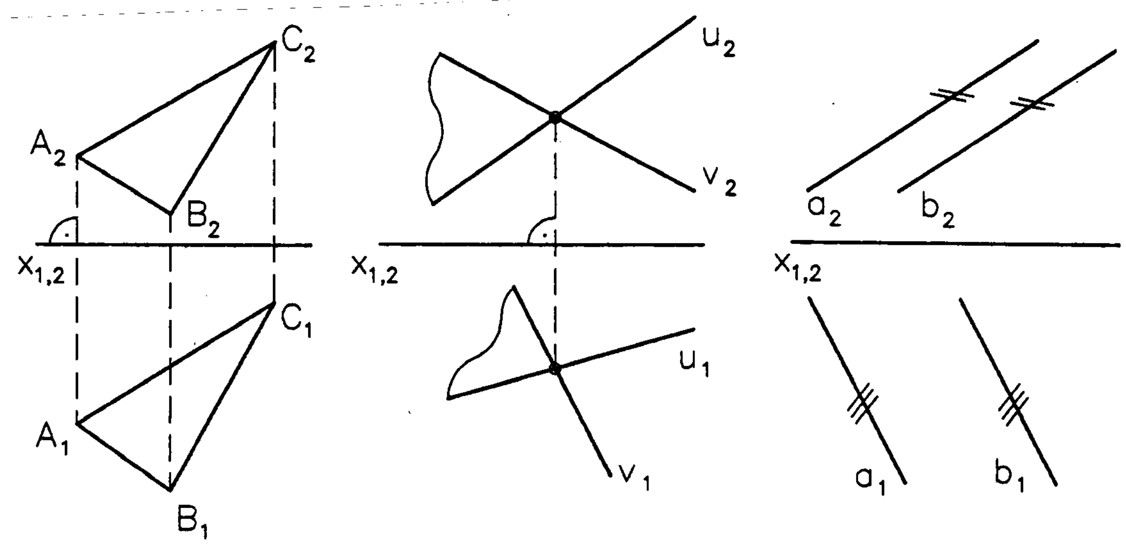
a) třemi body, které neleží v přímce, pak píšeme $\sigma = (ABC)$,

b) dvěma různoběžnými přímkami u, v, pak píšeme $\sigma = (u, v)$,

c) dvěma různými, rovnoběžnými přímkami a, b, pak píšeme $\sigma = (a, b)$,

d) přímkou b a bodem M, který na ní neleží. Píšeme $\sigma = (b\ ,\ M)$.

V Mongeově promítání budeme rovinu, která není kolmá k průmětně, zadávat pomocí sdružených průmětů určujících prvků, viz obrázek 3.10.

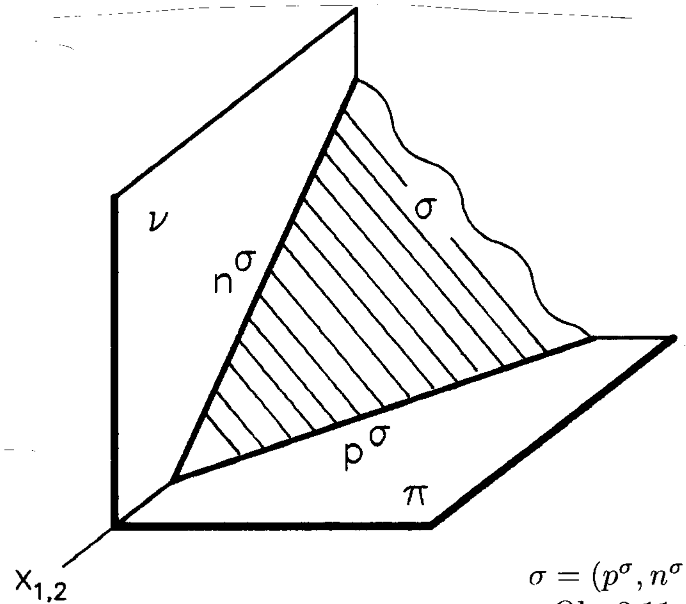


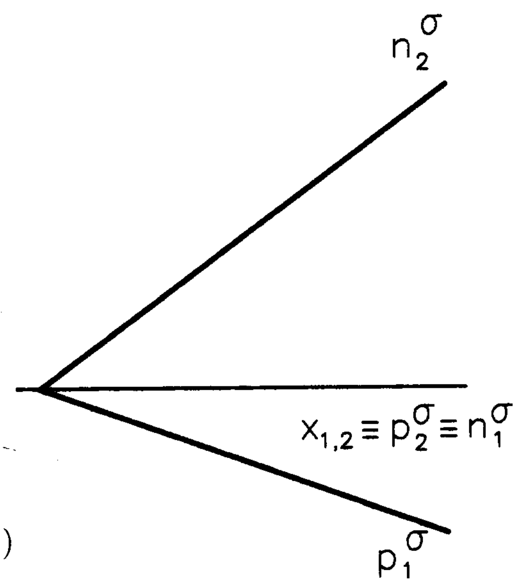
$a)\sigma = (ABC)$ $\qquad$ $b)\sigma = (u, v)$ $\qquad$ $c)\sigma = (a, b), a \parallel b$

Obr.3.10

Poznámka

Zadání roviny σ stopami $\sigma = (p^\sigma, n^\sigma)$ budeme považovat za určení roviny dvěma přímkami, které jsou buď různoběžné (na obrázku 3.11), nebo rovnoběžné.



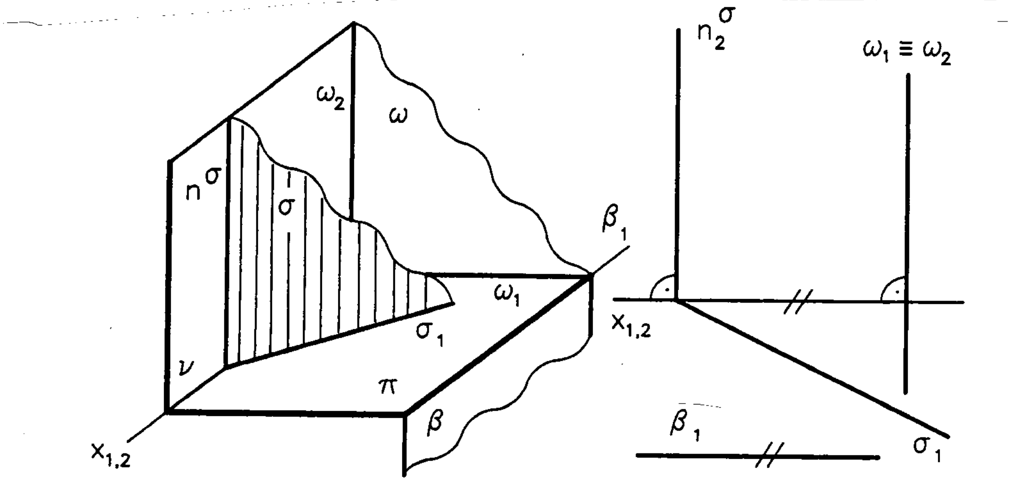


$\sigma = (p^\sigma, n^\sigma)$

Obr.3.11

Zvláštní polohy roviny

Polohu roviny považujeme za zvláštní, jestliže je kolmá k některé průmětně, případně k oběma, všechny tři možnosti jsou znázorněny na obrázku 3.12, vlevo náčrt, vpravo sdružené průměty. Půdorysem roviny σ ($\sigma \perp \pi$) je přímka, kterou označíme σ_1, nárysem roviny je celá průmětna. Analogicky ω_2 je nárysem roviny $\omega \perp \nu$. Je-li $\beta \parallel \nu$, pak $\beta \perp \pi$.



Roviny $\sigma \perp \pi$, $\omega \perp x_{1,2}$, $\beta \parallel \nu$ a jejich sdružené průměty
Obr.3.12

Poznámka
Je-li rovina v obecné poloze, můžeme z jednoho průmětu bodu roviny, podobně jako u přímky, určit zbývající průmět. U zvláštních poloh roviny tomu tak vždy není.

3.5 Polohové úlohy

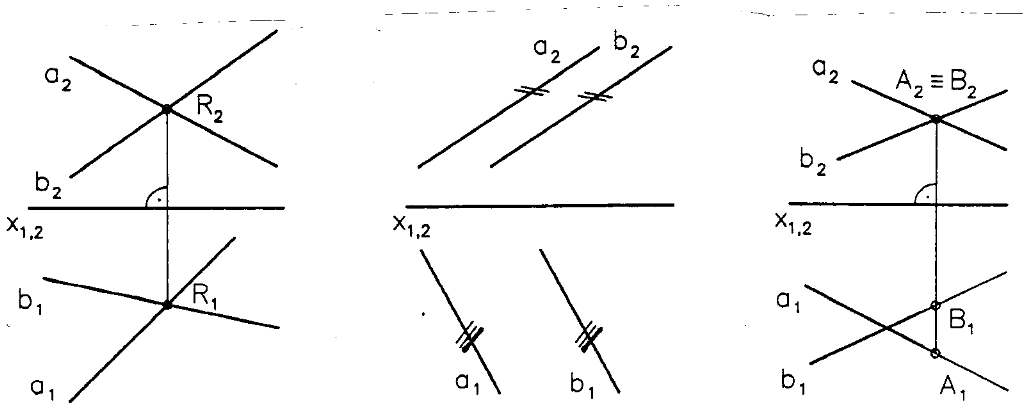
Zkoumáme-li vzájemnou polohu základních útvarů, tj. bodů, přímek a rovin, vycházíme z toho, že rovnoběžné promítání zachovává incidenci. To kupříkladu znamená, že leží-li bod na přímce, pak jeho průmět leží na průmětu této přímky. Takže platí

$A \in m \quad \Rightarrow \quad A_1 \in m_1 \quad , \quad A_2 \in m_2.$

Snadno nahlédneme, že sdružené průměty různoběžných přímek (v obecné poloze) jsou dvojice různoběžných přímek, jejichž průsečíky leží na kolmici k základnici.

$$R \equiv a \cap b \quad \Rightarrow \quad R_1 \equiv a_1 \cap b_1 \ , \quad R_1\, R_2 \perp x_{1,2} \ , \quad R_2 \equiv a_2 \cap b_2.$$

Pro sdružené průměty rovnoběžek $a \parallel b$ v obecné poloze platí: $a_1 \parallel b_1, a_2 \parallel b_2$.
Na následujícím obrázku 3.13 jsou zobrazeny sdružené průměty dvojic přímek .

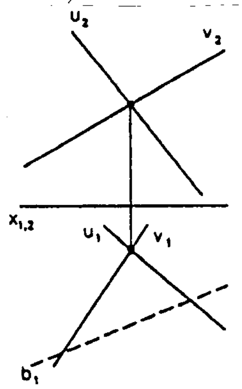


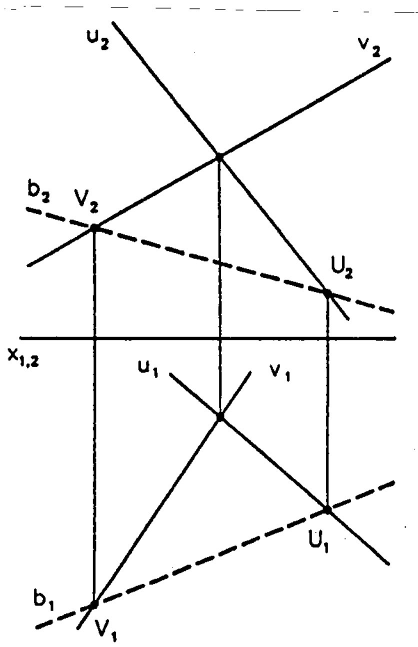
Různoběžky $a, b, a \cap b \equiv R$, *rovnoběžky $a \parallel b$,* *mimoběžky a, b.*
Obr.3.13

3.5.1 Úloha

Rovina σ je dána dvěma různoběžnými přímkami u, v . Určete nárys přímky b, která leží v rovině σ a má daný půdorys b_1 .
Dáno: u , v , b_1 , $b \subset (u, v)$.
Hledáme : b_2.

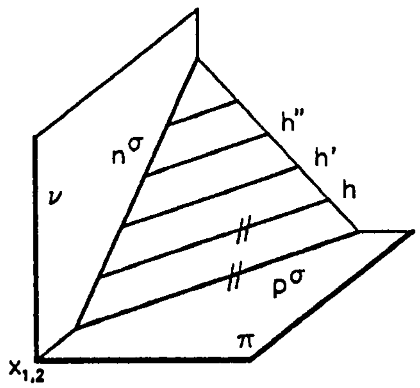
Návod. Přímka b leží v rovině σ, protíná tedy její přímky u, v v bodech $U \equiv b \cap u$, $V \equiv b \cap v$. Známe půdorysy bodů U , V ; $U_1 \equiv b_1 \cap u_1, V_1 \equiv b_1 \cap v_1$. Lehce odvodíme nárysy bodů U, V a tím určíme $b_2 \equiv U_2\ V_2$, obr. 3.14, vlevo zadání, vpravo řešení.

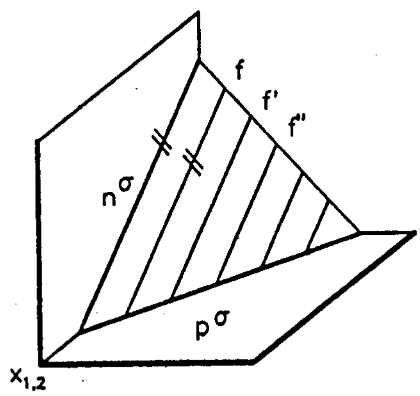




Obr.3.14

Analogicky řešíme úlohu, ve které máme určit zbývající průmět bodu ležícího v rovině, je-li dán jeden průmět bodu. Bodem proložíme přímku l roviny σ a podle (3.5.1) odvodíme zbývající průmět přímky l .





Obr.3.15

3.5.2 Úloha

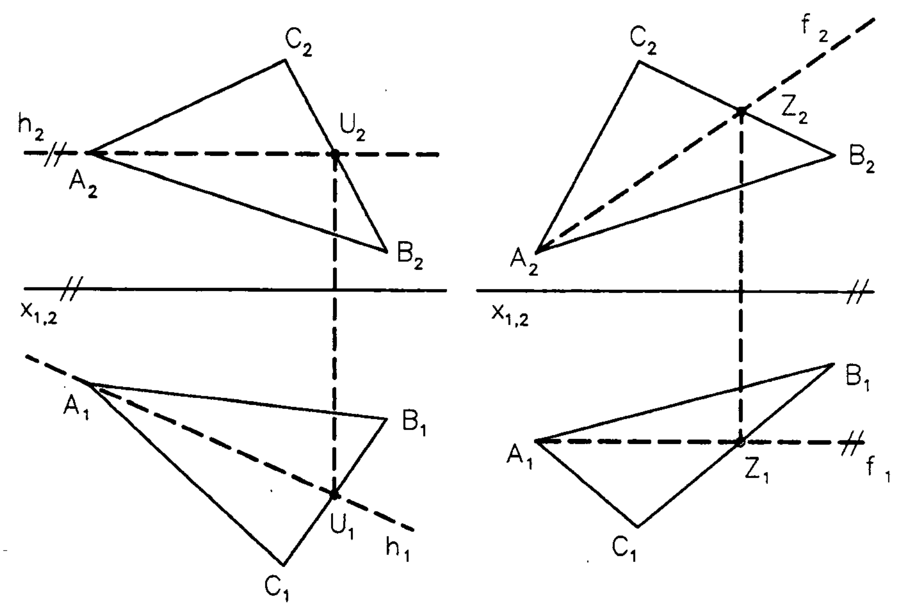
Sestrojte hlavní přímky v rovině σ , která je dána třemi body A , B , C .
Dáno: $\sigma = (ABC)$.
Hledáme: h horizontální, vodorovnou hlavní přímku $h : h \parallel \pi$, $h \subset \sigma$.
Hledáme: f frontální, průčelnou hlavní přímku $f : f \parallel \nu$, $f \subset \sigma$.
Konstrukce hlavních přímek h, f :

1)**Zvolíme** nárys $h_2 \parallel x_{1,2}$, respektive $f_1 \parallel x_{1,2}$.

2) Přímka h, resp. f leží v σ a tedy protíná přímky této roviny. Podle 3.5.1 **odvodíme** zbývající průměty hlavních přímek h_1, f_2 , viz obr.3.16.

Poznámka. Pro průměty hlavních přímek v rovině σ platí následující vztahy.

Pro **h** : $\mathbf{h_1} \parallel \mathbf{p_1^\sigma}$, $\mathbf{h_2} \parallel \mathbf{x_{1,2}}$, pro **f** : $\mathbf{f_2} \parallel \mathbf{n_2^\sigma}$, $\mathbf{f_1} \parallel \mathbf{x_{1,2}}$.
Tyto vztahy plynou z 3.4 a snadno si je uvědomíte pomocí obrázku 3.15.



Obr.3.16

3.5.3 Úloha

Sestrojte průsečík M přímky m s rovinou σ.

Dáno: $\sigma = (ABC)$, m .

Hledáme: $M \equiv m \cap \sigma$.

Návod

Přímkou m proložíme půdorysně promítací rovinu α. Průsečnici $q \equiv \alpha \cap \sigma$ nazveme **krycí přímkou** přímky m. Hledaný bod $M \equiv m \cap \sigma$ je průsečík přímky m s její krycí přímkou $M \equiv q \cap m$, viz obrázek 3.17, nahoře náčrt a dole řešení úlohy.

Rovněž můžeme použít nárysně promítací rovinu β.

Řešení

1) Půdorys krycí přímky $q_1 \equiv m_1$.

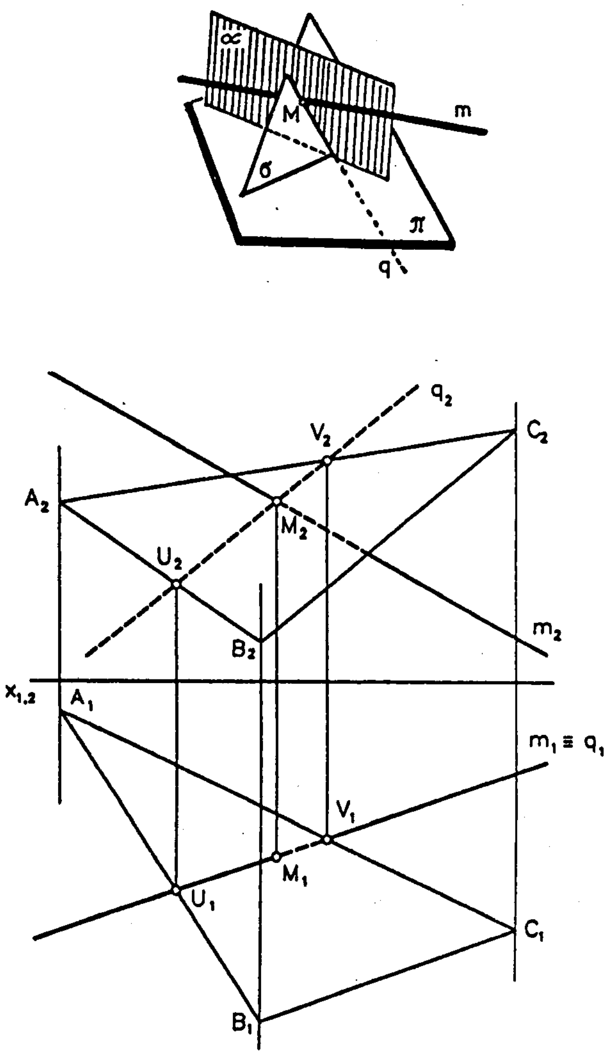
2) $U_1 \equiv q_1 \cap A_1B_1$, $V_1 \equiv q_1 \cap A_1C_1$;

$q \equiv UV$ (krycí přímka q leží v rovině σ a protíná její přímky v bodech U, V).

3) Nárys krycí přímky $q_2 \equiv U_2\, V_2$.

4) $M_2 \equiv q_2 \cap m_2$, $M_1 \in m_1$.

Poznámka. Úlohu sestrojení průsečnice dvou rovin řešíme na základě předcházející úlohy. Vybereme dvě přímky jedné roviny a sestrojíme jejich průsečíky s rovinou druhou. Hledaná průsečnice je určena dvěma body.



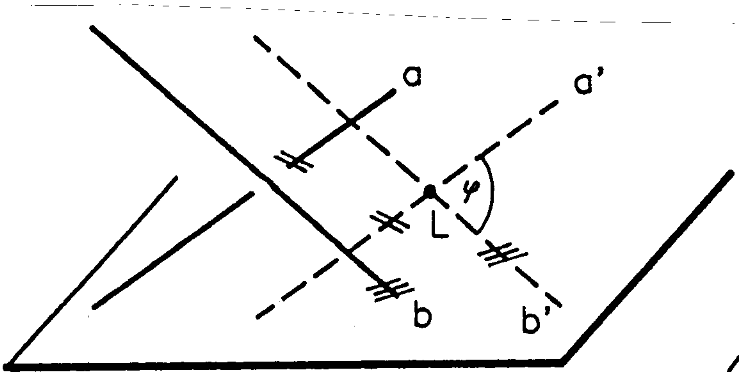
Obr.3.17

3.6 Metrické úlohy

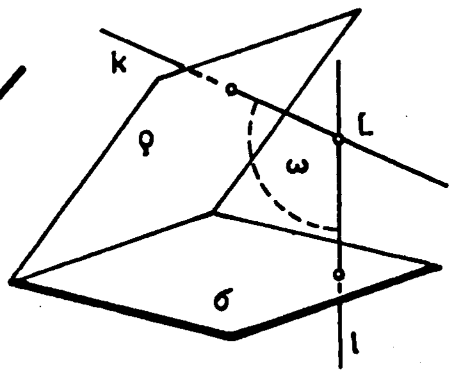
Při konstruování útvarů v prostoru nevystačíme jen s polohovými úlohami, ale setkáváme se též s úlohami, které se týkají **velikostí úseček a úhlů.**Takovým úlohám říkáme metrické. Nejdříve si jen stručně připomeneme některé poznatky ze stereometrie, které jsou východiskem při řešení metrických úloh v Mongeově promítání.

Definice. Úhel φ dvou mimoběžných přímek a, b v prostoru je definován jako úhel různoběžek a', b' , které procházejí libovolným bodem L v prostoru a pro které platí $a' \parallel a$, $b' \parallel b$, viz obr. 3.18a.

Poznámka.Úhel ω dvou rovin ρ, σ můžeme sestrojit jako úhel kolmic k, l k těmto rovinám, obr.3.18b ($k \perp \rho, l \perp \sigma, L \in k, L \in l, L$ je zvolený bod.)



Obr.3.18a

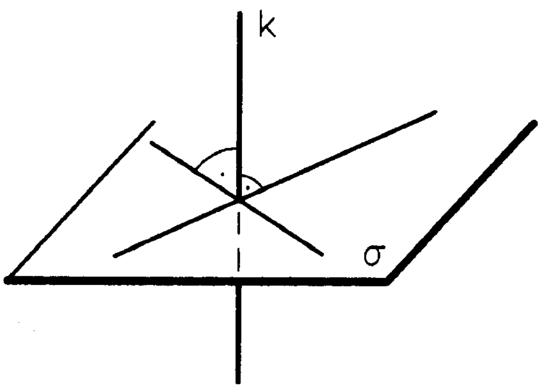


Obr.3.18b

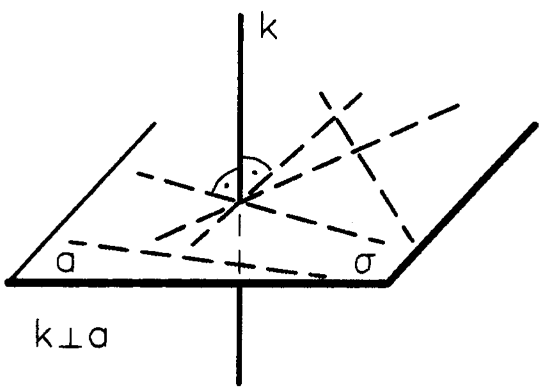
Definice. Přímka se nazývá kolmá k rovině, je-li kolmá ke všem přímkám této roviny,
obr. 3.20.

Poznámka.**Rovina σ je kolmá k rovině ρ, jestliže σ obsahuje alespoň jednu přímku kolmou k ρ.**

Věta. Přímka je kolmá k rovině, je-li kolmá alespoň ke dvěma různoběžným přímkám této roviny, viz obr. 3.19.

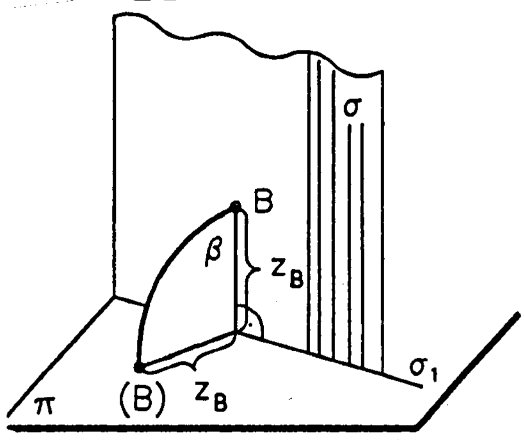


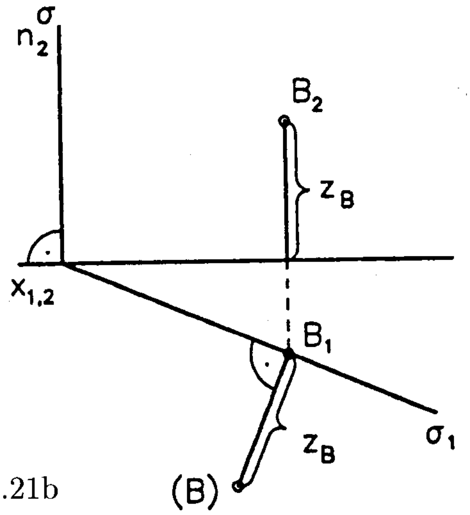
Obr.3.19



Obr.3.20

Úmluva.V následujících úvahách označíme (U) sklopený útvar U.

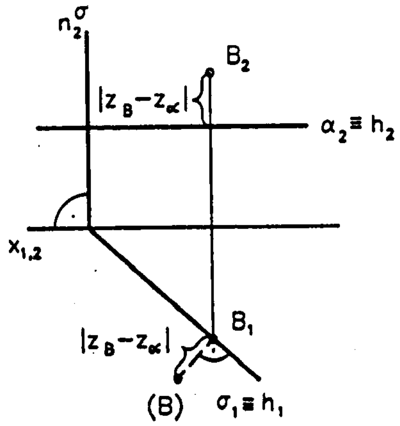


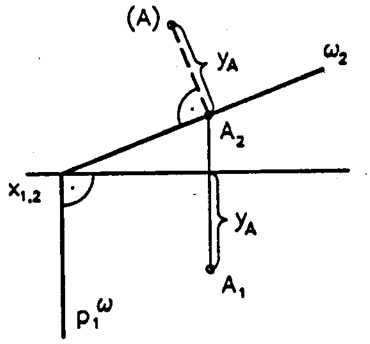


Obr.3.21a Obr.3.21b

3.6.1 Sklápění promítací roviny σ do průmětny

Budeme sklápět rovinu σ ($\sigma \perp \pi$) do půdorysny π (respektive do vodorovné roviny $\alpha \parallel \pi$). Nejprve si prohlédneme náčrt situace na obr. 3.21a, potom vlastní konstrukci, obr.3.21b (resp.obr.3.22a). Osou sklápění je σ_1 (respektive hlavní přímka $h \equiv \alpha \cap \sigma$). Dráha bodu B sklápěné roviny σ je kružnice, která leží v rovině β kolmé k ose sklápění a má poloměr $r = z_B$, obr. 3.21 (respektive $r = \mid z_B - z_\alpha \mid$, viz obr.3.22a). Sklápění nárysně promítací roviny ω, $\omega \perp \nu$, do nárysny je analogické, viz obr.3.22b.





Obr.3.22a Obr.3.22b

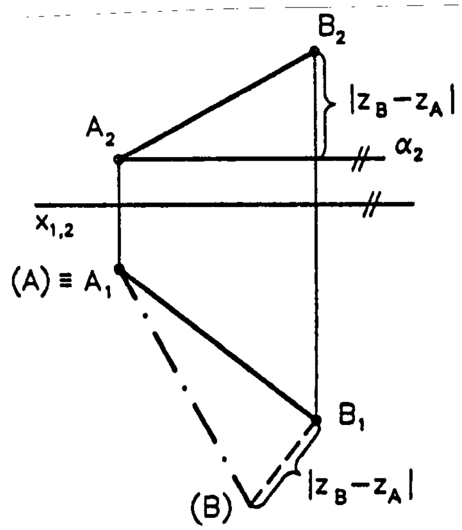
3.6.2 Úloha

Sestrojte skutečnou velikost úsečky AB.

Řešení

Přímkou AB proložíme půdorysně promítací rovinu σ, ($\sigma \perp \pi$), a sklopíme ji do vodorovné roviny $\alpha \parallel \pi$, viz obr. 3.23.

(A) (B) je skutečná velikost úsečky AB .



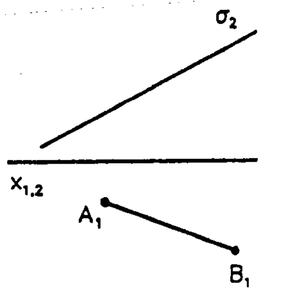
Obr.3.23

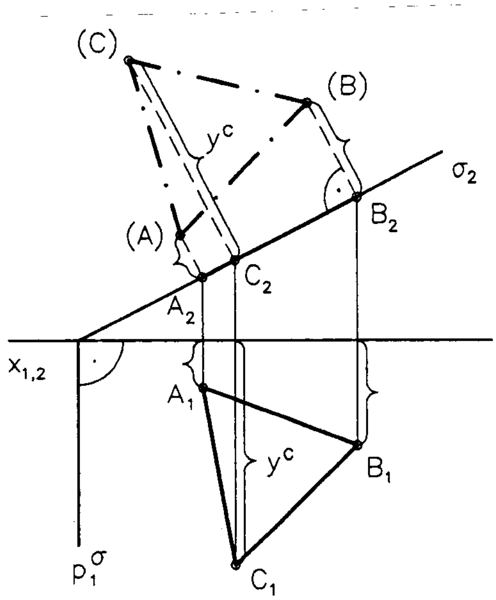
3.6.3 Úloha

Zobrazte rovnostranný $\triangle ABC$ ležící v rovině σ, $(\sigma \perp \nu)$, je-li dána jeho strana AB.

Řešení

Nárysně promítací rovinu σ sklopíme do nárysny. Sestrojíme sklopený rovnostranný $\triangle(A)(B)(C)$. Bod (C) sklopíme zpět do roviny σ, viz obr. 3.24. Zobrazíme jedno ze dvou řešení.





Obr.3.24

3.6.4 Úloha

Zobrazte kružnici $k = (S, r)$ ležící v rovině σ, $(\sigma \perp \pi)$, viz obr. 3.25.

Dáno: σ_1, S_2, r.

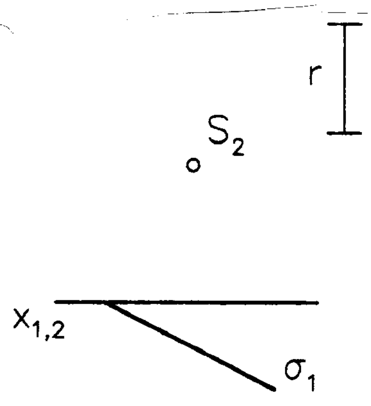
Řešení

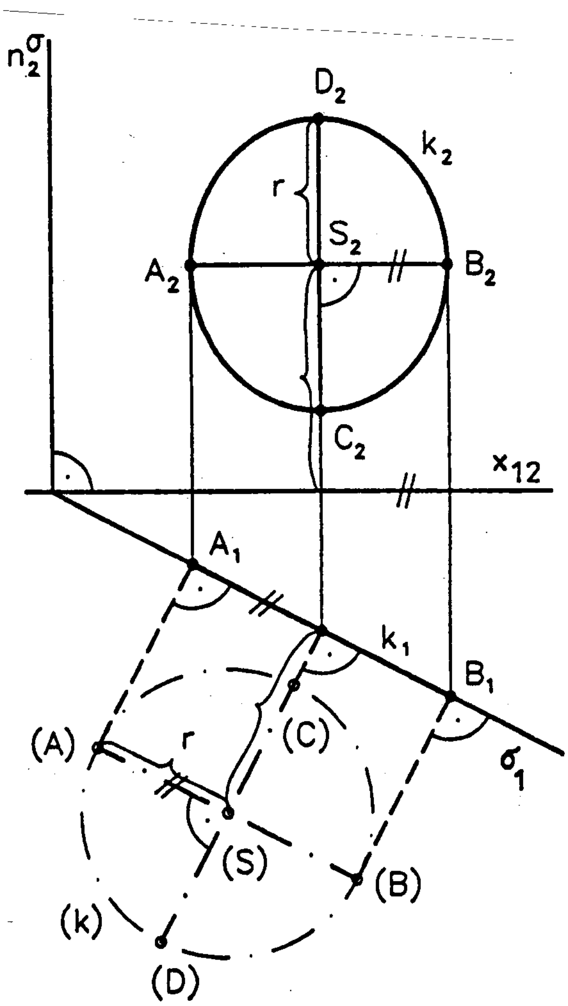
1) Půdorysně promítací rovinu σ sklopíme do půdorysny.

2)Sestrojíme sklopenou kružnici (k), $(k) = ((S), r)$.

3) Sdružené průměry $(A)(B)$, $(C)(D)$ kružnice (k) sklopíme zpět $((A)(B) \parallel \sigma_1)$. Půdorysem kružnice je úsečka $A_1B_1 = 2r$, nárysem je elipsa určená osami A_2B_2, C_2D_2, $A_2B_2 \perp C_2D_2$. Platí $A_2B_2 \perp C_2D_2$, protože $AB \parallel \pi$.

Snadno nahlédneme, že sdružené průměty kružnice, ležící v promítací rovině, můžeme sestrojit přímo bez sklopení kružnice.





Obr.3.25

3.6.5 Přímka kolmá k rovině

Ze stereometrie víme, že kolmice m k rovině σ je kolmá ke všem přímkám roviny σ a tedy i k hlavním přímkám této roviny. Použijeme-li větu (1.7.2) o pravoúhlém průmětu pravého úhlu, dostaneme pro průměty m_1, m_2 kolmice m k rovině $\sigma = (h, f)$:

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{m} \perp \mathbf{h}, & \mathbf{h} \parallel \pi & \Rightarrow & \mathbf{m_1} \perp \mathbf{h_1}, \\ \mathbf{m} \perp \mathbf{f}, & \mathbf{f} \parallel \nu & \Rightarrow & \mathbf{m_2} \perp \mathbf{f_2}. \end{array}$$

3.6.6 Úloha

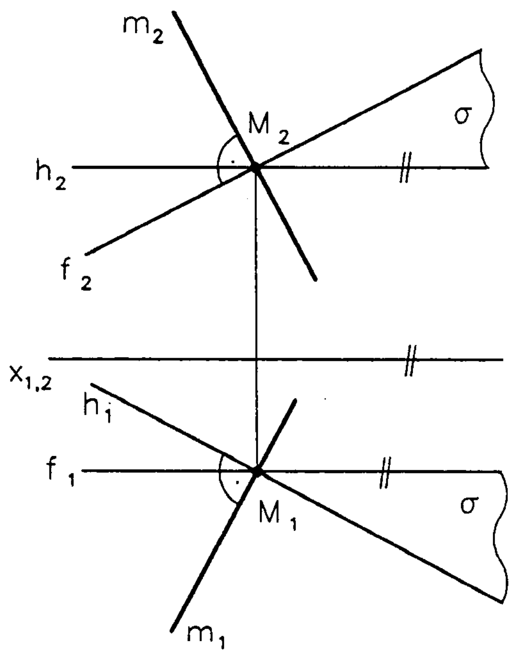
Daným bodem M sestrojte přímku m kolmou k rovině σ.
Řešení
Uvažujme různá zadání a) - d) roviny σ.

a) σ je daná hlavními přímkami $\sigma = (h, f)$, obrázek 3.26.
Návod : Podle 3.6.5 pro průměty kolmice m platí
$M_1 \in m_1, m_1 \perp h_1, M_2 \in m_2, m_2 \perp f_2$.

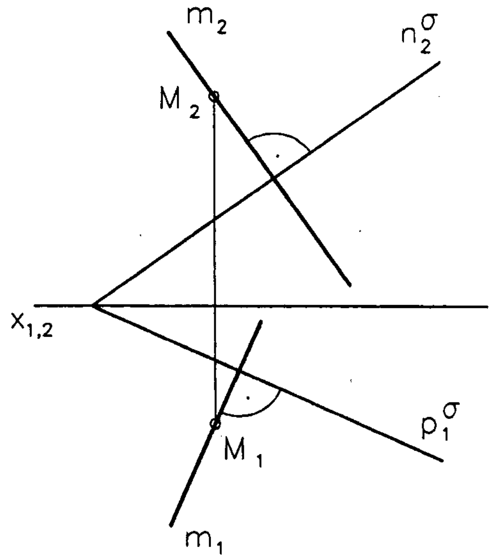
b) σ je dána stopami, $\sigma = (p^\sigma, n^\sigma)$.
Návod : Je zřejmé, že $p^\sigma \parallel h, n^\sigma \parallel f$ a tedy $\mathbf{m_1} \perp \mathbf{p^\sigma{}_1}, \mathbf{m_2} \perp \mathbf{n^\sigma{}_2}$, obr.3.27.

c) σ je dána třemi body, $\sigma = (MQR)$.
Návod : Sestrojíme hlavní přímky h, f roviny σ , viz 3.5.2 a tím úlohu převedeme na zadání a), obrázek 3.28.

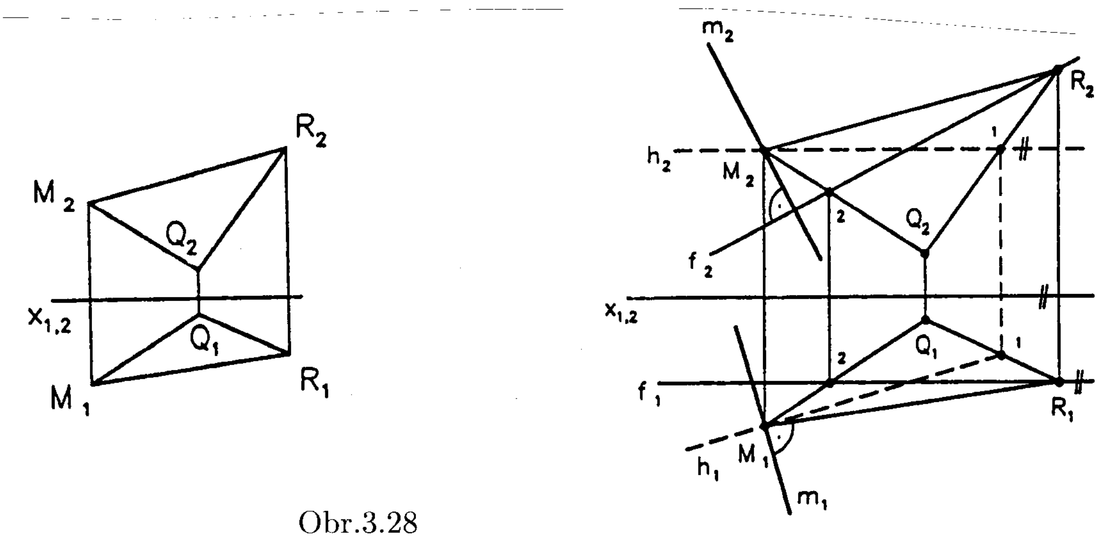
d) σ je dána nárysem σ_2 , obrázek 3.29.
Návod : Rovina σ je nárysně promítací, platí tedy $\sigma \perp \nu$, $m \perp \sigma \Rightarrow m \parallel \nu$ a pro průměty kolmice máme $\mathbf{m_2} \perp \sigma_\mathbf{2}, \mathbf{m_1} \parallel \mathbf{x_{1,2}}$.



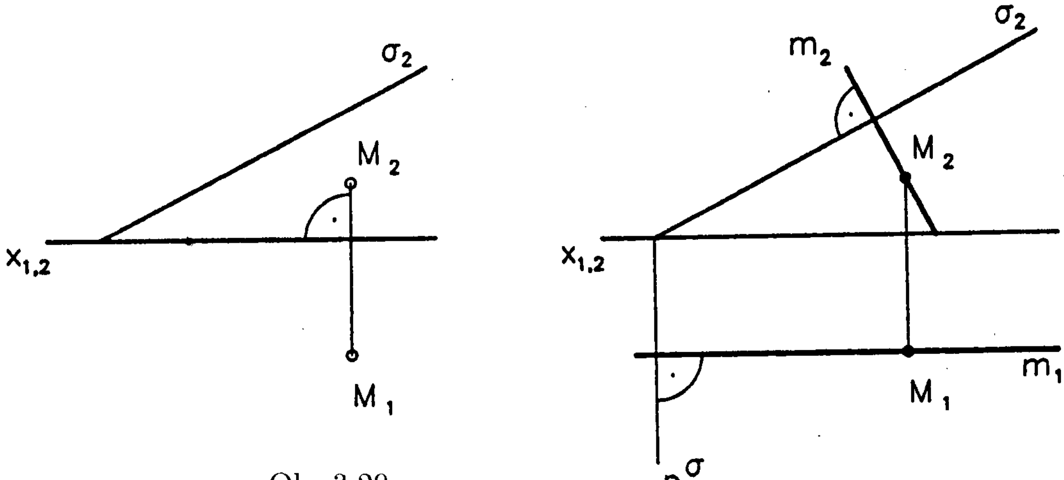
Obr.3.26



Obr.3.27



Obr.3.28



Obr.3.29

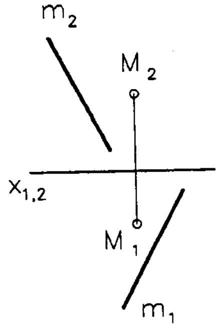
3.6.7 Úloha

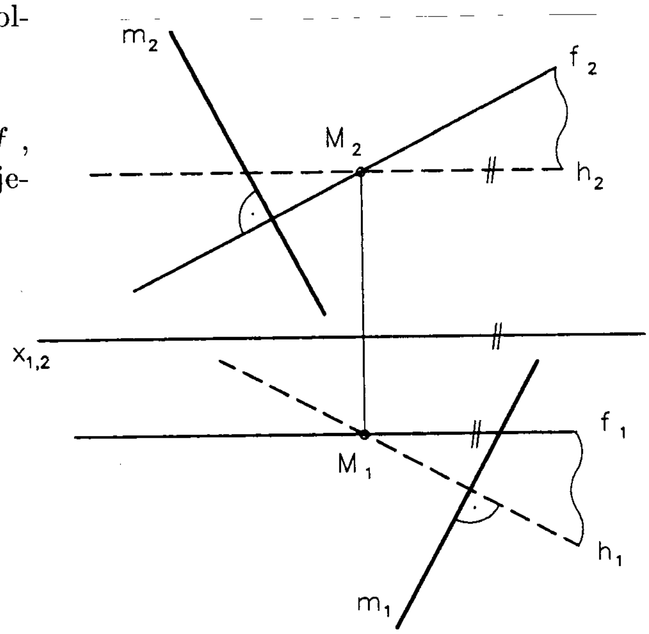
Daným bodem M sestrojte rovinu ω kolmou k dané přímce m .
Návod, obrázek 3.30.

Rovinu ω určíme hlavními přímkami h, f , které procházejí daným bodem M a pro jejichž sdružené průměty platí

$h:\quad h_1 \perp m_1,\quad h_2 \parallel x_{1,2},$
$f:\quad f_2 \perp m_2\,,\quad f_1 \parallel x_{1,2}$

a samozřejmě $M_1 \in h_1,\ M_2 \in h_2,$
$M_1 \in f_1, M_2 \in f_2$.





Obr.3.30

3.6.8 Úloha

Zobrazte kružnici $k = (S, r)$, ležící v rovině σ , která je dána hlavními přímkami h, f. $\sigma = (h, f), S \equiv h \cap f$, viz obrázek 3.31.

Řešení

Sdružené průměty kružnice k jsou elipsy k_1, k_2 (viz 1.8).

Pro půdorys $\mathbf{k_1}$

kružnice k určíme :

a) hlavní osu A_1B_1, která leží na půdorysu vodorovné hlavní

přímky h a má skutečnou velikost

$\mathbf{A_1B_1 = 2r}$, podle 1.8.6 a

$\mathbf{A_2B_2 \subset h_2}$,

b) další bod U_1 elipsy k_1,

$U \in f, U \in k$, podle a1),

c) vedlejší osu elipsy k_1 omezenou proužkovou konstrukcí (viz 2.1).

Pro nárys $\mathbf{k_2}$

kružnice k určíme analogicky

a1) hlavní osu $\mathbf{U_2V_2}$, $\mathbf{U_2V_2 = 2r}$,

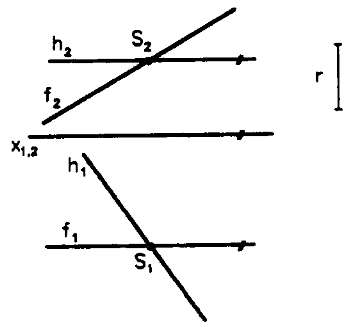
$\mathbf{U_2V_2 \subset f_2, U_1V_1 \subset f_1}$,

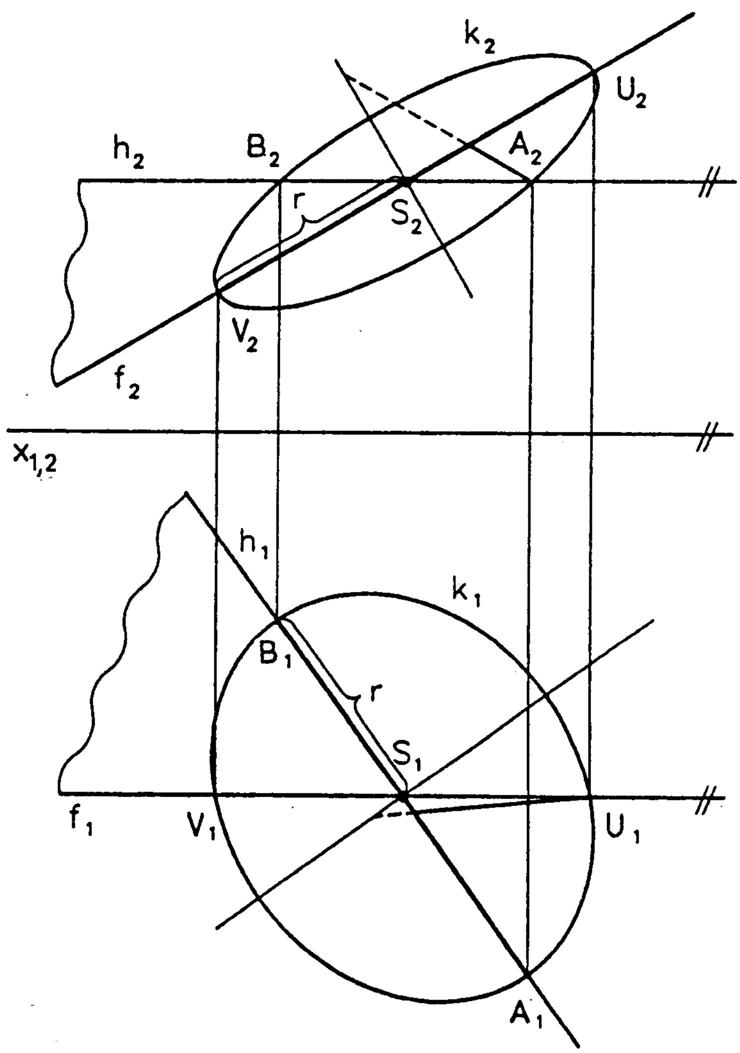
b1) další bod A_2 podle a),

c1) vedlejší osu elipsy k_2 omezenou proužkovou konstrukcí podle (2.1).

Poznámka

Dostaneme tak sdružené průměty čtyř bodů kružnice A, B, U, V, **nikoliv sdružené průměry elips - průmětů kružnice!!**





Obr.3.31

3.7 Průměty jednoduchých těles

Prostorové objekty se skládají z jednoduchých těles. Jsou to jehlan, hranol, kužel, válec a koule.

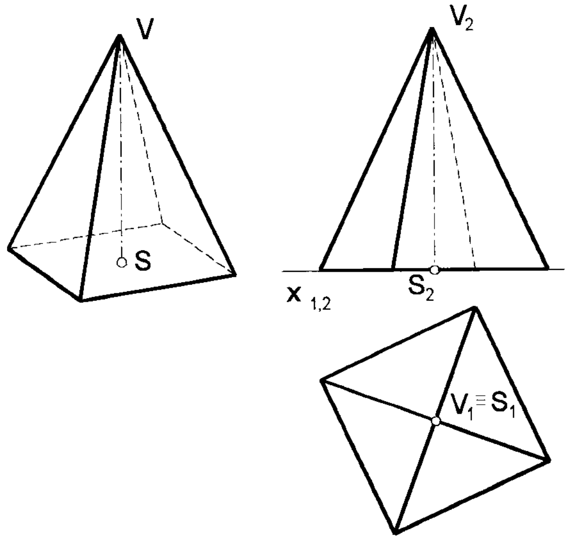
Pravidelný jehlan : podstava je pravidelný mnohoúhelník a spojnice vrcholu jehlanu se středem podstavy je kolmá k rovině podstavy, obr.3.32.

Pravidelný hranol : podstava pravidelný mnohoúhelník, spojnice středů podstav je kolmá k rovinám podstav, obr.3.33.

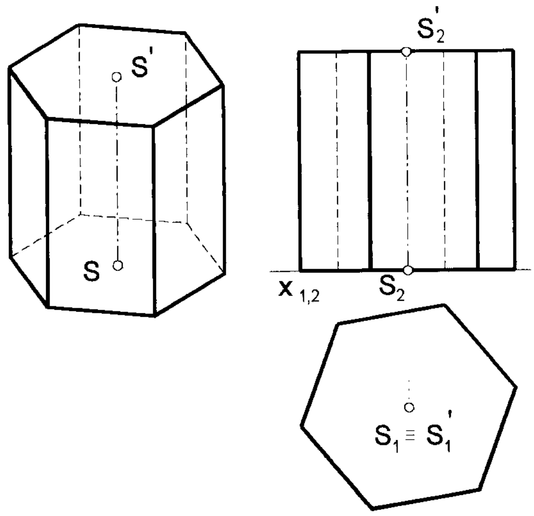
Rotační kužel : kruhová podstava, spojnice středu podstavy s vrcholem kužele je kolmá k rovině podstavy, obr.3.34.

Rotační válec : kruhová podstava, površky kolmé k rovině podstavy, obr.3.35.

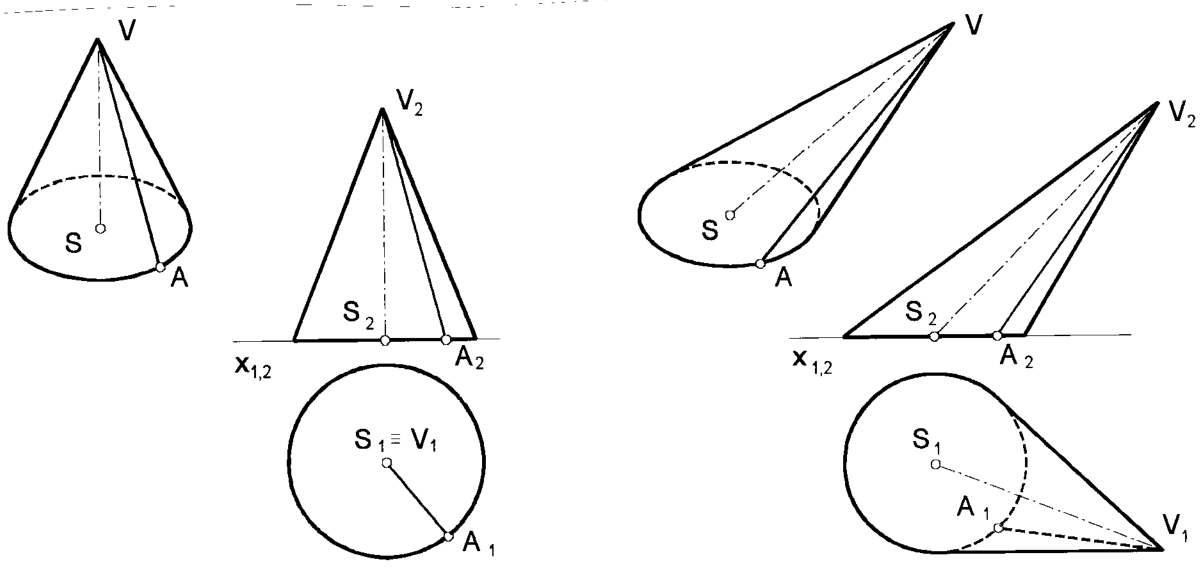
Površka kužele (válce) je přímka, jejíž část leží na uvažovaném tělese, obr.3.34 a 3.35.



Pravidelný čtyřboký jehlan- Obr.3.32



Pravidelný šestiboký hranol- Obr.3.33

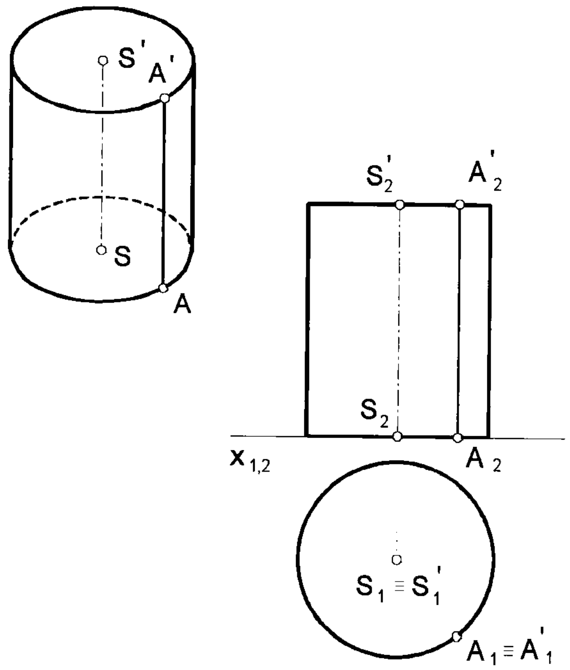


Rotační kužel s površkou VA *Obr.3.34* *Kosý kužel s površkou VA*

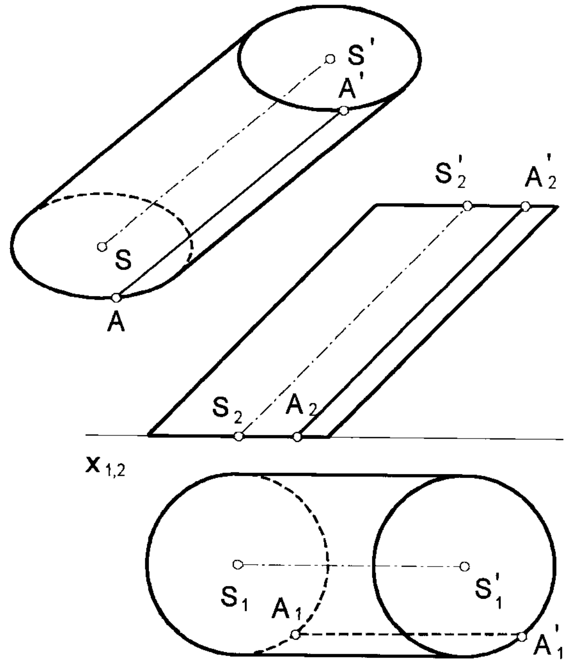
Na obrázcích 3.32-3.36 jsou zobrazena jednoduchá tělesa v Mongeově a v názorném promítání. Jde o pravoúhlou axonometrii, je jí věnována 5.kapitola. Podstavy těles jsou umístěny do půdorysny.

Poznámka

V CAD systémech se jednoduchá tělesa nazývají primitiva a složitá tělesa se z nich modelují pomocí množinových operací tj. sjednocení, rozdíl, průnik.

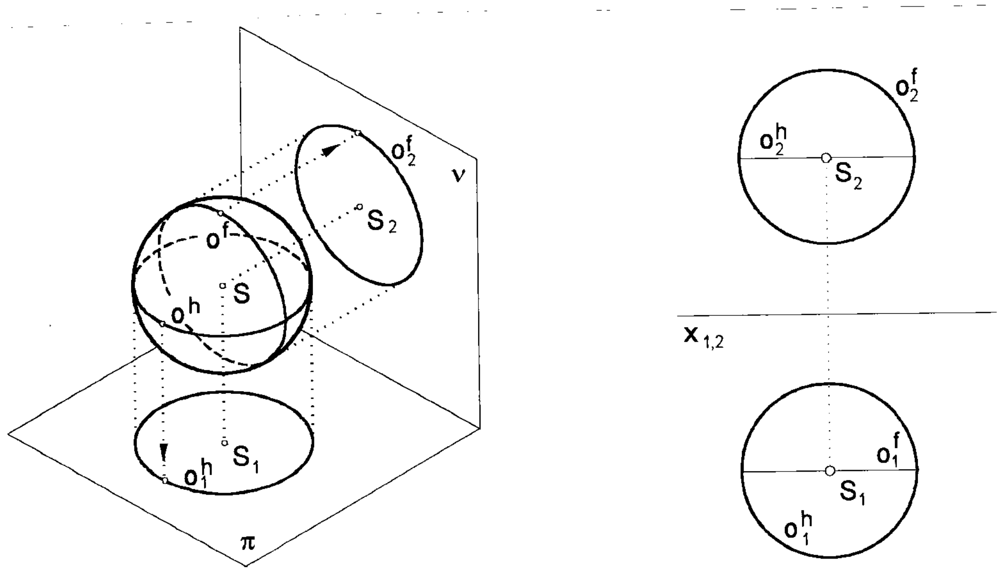


Rotační válec s površkou AA'



Kosý válec s površkou AA'

Obr.3.35



Obr.3.36 *Sdružené průměty koule - průměty jejích obrysů o^h, o^f*

3.8 Řezy těles rovinou ω

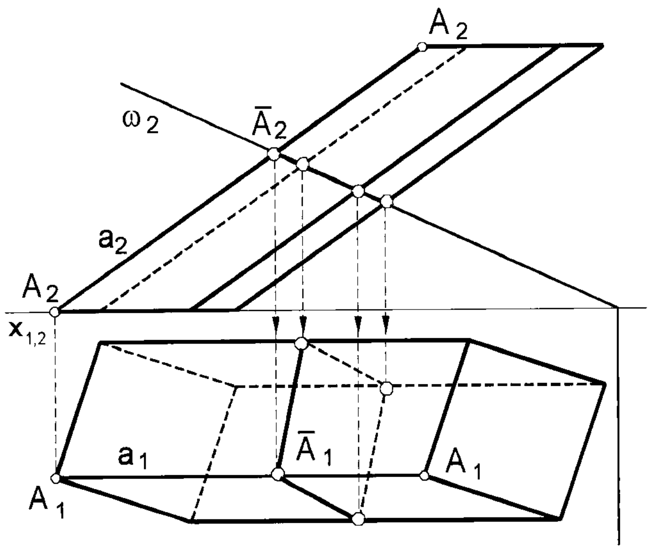
Uvažujeme tělesa stojící na půdorysně a omezíme se na řezy rovinou ω, kolmou k nárysně (nárysně promítací). Rovina $\omega, \omega \perp \nu$, se do nárysny promítá jako přímka ω_2 a to nám umožní snadno nalézt průsečík $\bar{A}$ libovolné přímky $a(a \nparallel \omega)$ s touto rovinou (obr.3.37) podle:

$\bar{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{a} \cap \omega, \omega \perp \nu \Rightarrow \bar{\mathbf{A}}_2 \equiv \mathbf{a_2} \cap \omega_2, \bar{\mathbf{A}}_1 \in \mathbf{a_1}, \bar{\mathbf{A}}_1\bar{\mathbf{A}}_2 \perp \mathbf{x_{1,2}}.$

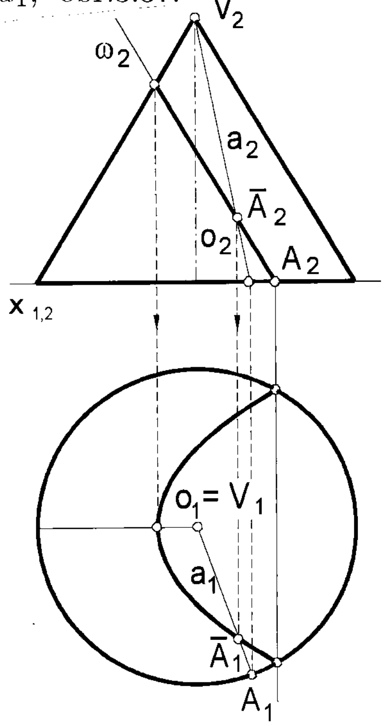
3.8.1 Řez kosého čtyřbokého hranolu $ABCDA'$... rovinou $\omega, \omega \perp \nu$

Postup, obr.3.37

Body řezu $\bar{A}$... sestrojíme jako průsečíky hran tělesa s rovinou řezu, podle výše uvedeného návodu, například $\bar{A}$: $\bar{A}_2 \equiv a_2 \cap \omega_2, a = AA', \bar{A}_1 \subset a_1$, obr.3.37.



Obr.3.37



Obr.3.38

3.8.2 Řezy kužele rovinou

3.8.2.1 Řez kužele rovinou $\omega, \omega \perp \nu$ - bodová konstrukce

Postup, obr.3.38

Nejdříve sestrojíme průměty zvolených površek kužele. Body řezu sestrojíme jako průsečíky površek kužele s rovinou řezu, podle výše uvedeného návodu, například bod řezu $\bar{A}$ na površce $a = VA$, $\bar{\mathbf{A}}$: $\bar{\mathbf{A}}_2 \equiv \mathbf{a_2} \cap \omega_2, \bar{\mathbf{A}}_1 \in \mathbf{a_1}$. Tento postup můžeme užít pro konstrukci řezu libovolného kužele promítací rovinou. Pokud rovina řezu není promítací, použijeme třetí průmětny tak, aby třetím průmětem roviny řezu byla přímka (viz 3.9.3) a dále aplikujeme výše uvedený postup.

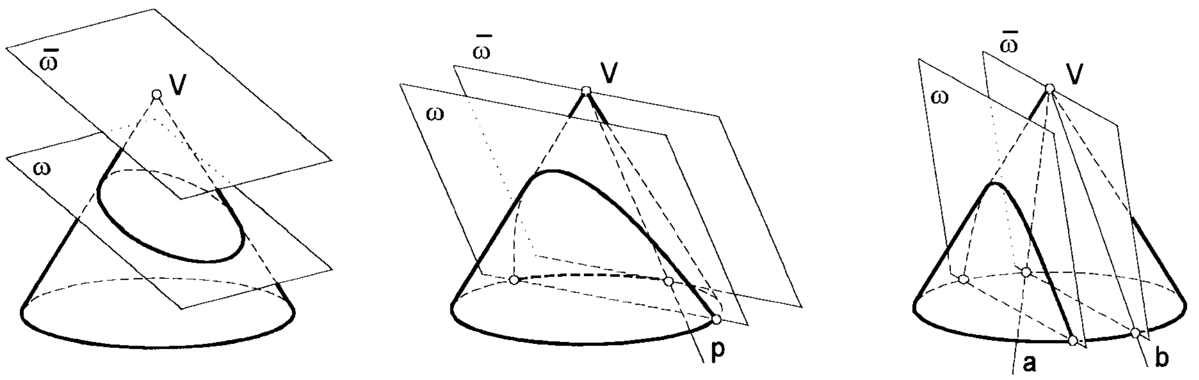
3.8.2.2 Druhy řezů kužele rovinou ω

Řezem kužele rovinou ω je kuželosečka, případně její část, viz obrázek 3.39 pro rotační kužel. O jejím druhu rozhodneme na základě polohy kužele a **vrcholové roviny** $\bar{\omega}$ **rovnoběžné s rovinou řezu,** $\bar{\omega}$: $\mathbf{V} \in \bar{\omega}, \bar{\omega} \parallel \omega$. Řezem je,

a) elipsa, pokud má vrcholová rovina s kuželem společný pouze jediný bod a to vrchol V. Rovina řezu protíná tedy všechny površky kužele ve vlastních bodech (1.9.1),

b) parabola, jestliže se vrcholová rovina $\bar{\omega}$ dotýká kužele podél površky p. Rovina řezu je rovnoběžná s touto dotykovou površkou a protíná ji v nevlastním bodě (směr osy paraboly), ostatní body řezu jsou vlastní,

c) hyperbola, jestliže vrcholová rovina obsahuje dvě površky a, b kužele. Rovina řezu je rovnoběžná s těmito površkami a protíná je v nevlastních bodech (směry asymptot hyperboly), ostatní body jsou vlastní. V a)-c) uvažujeme kuželovou plochu, jejíž částí je plášť kužele.



Eliptický řez *Parabolický řez* *Hyperbolický řez*

Obr.3.39

3.8.2.3 Řez rotačního kužele rovinou $\omega, \omega \perp \nu$ - konstrukce eliptického řezu

Rovinu řezu $\omega, \omega \perp \nu$, zadáme tak, aby příslušná vrcholová rovina $\bar{\omega}$ měla s kuželem společný pouze vrchol V, obr.3.40.

Postup

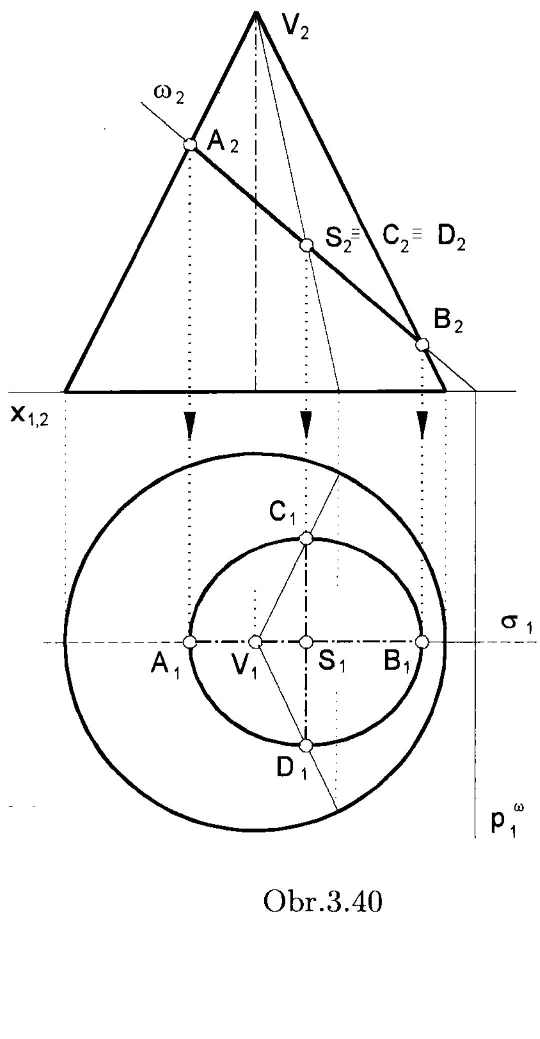
1) Řezem je elipsa s osami AB, CD, o středu S, body A, B, C, D leží na plášti kužele.

2) Nárysem roviny řezu je přímka ω_2, nárysem řezu je úsečka A_2, B_2, střed této úsečky S_2 je nárysem vedlejší osy CD elipsy, $S_2 \equiv C_2 \equiv D_2$.

3) Odvodíme půdorysy bodů A, B, C, D pomocí površek kužele, které procházejí těmito body.

4) Půdorysem řezu je elipsa, určená osami A_1B_1, C_1D_1.

Odůvodnění: Hlavní osa elipsy AB je průsečnice roviny souměrnosti σ kužele kolmé k rovině řezu s rovinou řezu. Platí $\sigma \perp \pi$, $\sigma \perp \omega \Rightarrow \sigma \perp p^{\omega} \Rightarrow AB \parallel \nu, CD \parallel \pi$. Důsledkem je zachování pravého úhlu os elipsy v půdoryse.



Obr.3.40

3.8.4 Řez rotačního válce promítací rovinou $\omega, \omega \perp \nu$

Postup, obr.3.41

1) Z věty 1.8.5 plyne, že řezem válce rovinou $\omega, \omega \not\parallel s$($s$ je směr površek válce) je elipsa, její osy označíme AB, CD. Hlavní osa AB elipsy je průsečnice roviny řezu s s rovinou souměrnosti σ válce, která je kolmá k rovině řezu. Takže platí :

$\omega \perp \nu, \sigma \perp \pi, \sigma \perp \omega \Rightarrow \sigma \parallel \nu \Rightarrow AB \parallel \nu, CD \parallel \pi \Rightarrow | CD |= 2r, A_1B_1 \perp C_1D_1$.

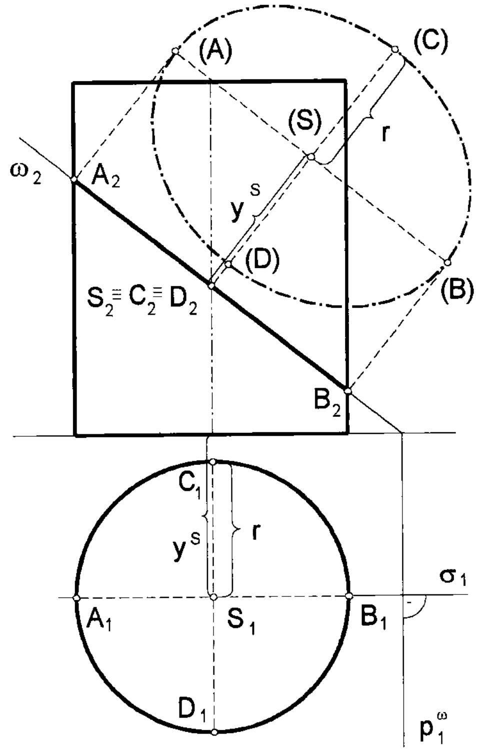
r je poloměr válce.

2) **Nárysem řezu** je úsečka A_2B_2, jelikož nárysem promítací roviny řezu je přímka ω_2. Střed S elipsy je průsečík osy válce o s rovinou řezu. Platí $C_2 \equiv D_2 \equiv S_2$.

3) **Půdorysem řezu** je kružnice.

Půdorysy bodů odvodíme pomocí površek válce. Na obrázku 3.41 jsme sestrojili skutečnou velikost řezu pomocí sklopení ω do ν, podle 3.6.1.

Poznámka. Řez kosého válce sestrojíme podobně, viz**13.** 6.2.



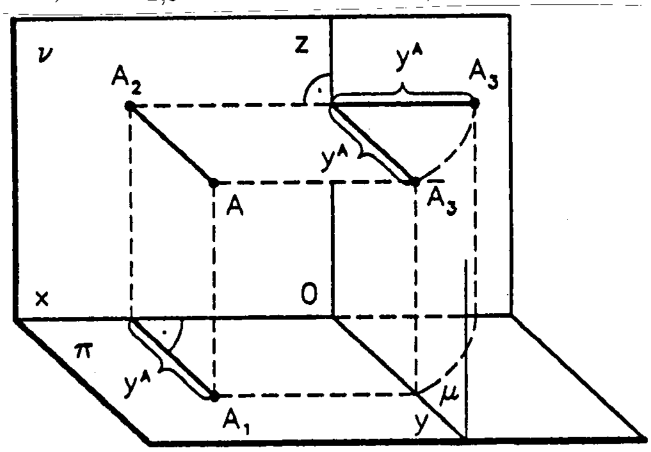
Obr.3.41

3.9 Bokorys , třetí průmět

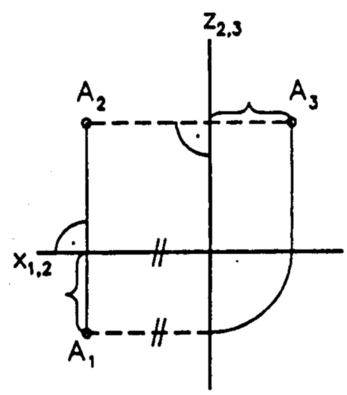
V Mongeově promítání promítáme pravoúhle na dvě roviny souřadnicového trojhranu a to na půdorysnu $\pi = (x, y)$ a nárysnu $\nu = (x, z)$. Často užíváme další pravoúhlý průmět na rovinu $\mu = (y, z)$ - bokorysnu, viz obrázek 3.42.

Bod A promítneme pravoúhle do μ , dostaneme třetí průmět $\bar{A}_3$ bodu A . Bokorysnu sdružíme s nárysnou (případně s půdorysnou), to znamená, že bokorysnu sklopíme kolem osy z do nárysny a tu ztotožníme s nákresnou. Získaný třetí průmět bodu A označíme A_3 a nazveme jej bokorysem bodu A , viz náčrt, obrázek 3.42a.

Dostaneme další pár sdružených průmětů bodu A : nárys A_2 , bokorys A_3, pro něž platí $A_2A_3 \perp z$ a y-ové souřadnice jsou stejné. Směr kolmý k ose z nazveme směrem nových ordinál, $z \equiv z_{2,3}$ novou základnicí, viz konstrukce bokorysu na obrázku 3.42b.



Obr.3.42a



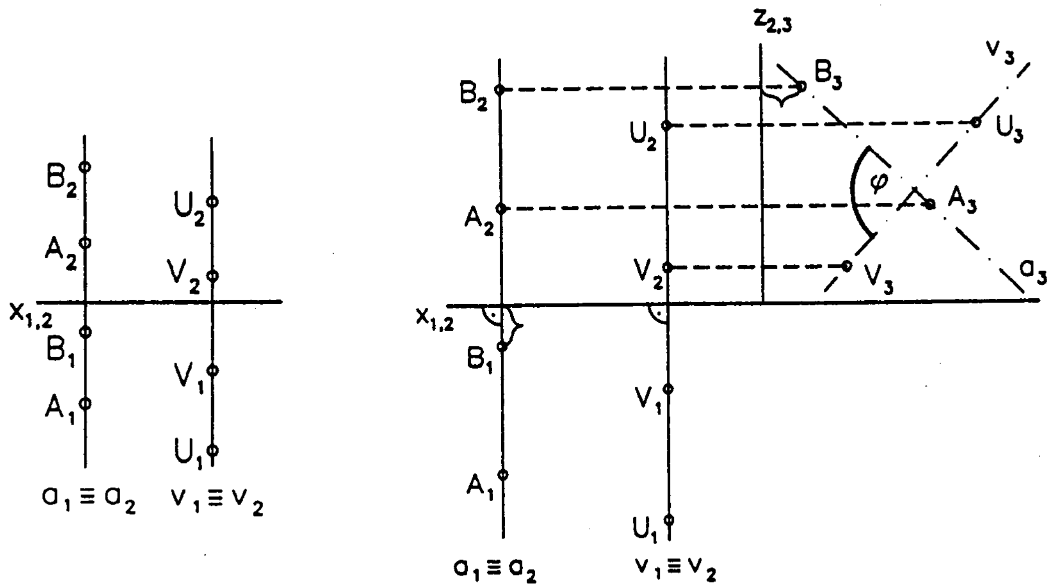
Obr.3.42b

3.9.1 Úloha

Určete vzájemnou polohu přímek a, v, které jsou kolmé k ose x.

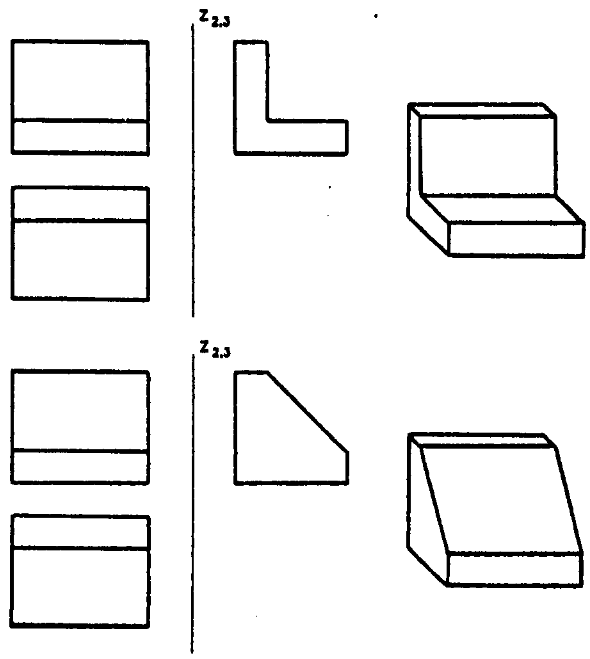
Dáno: $a = AB$, $v = UV$, viz obrázek 3.43 (vlevo zadání, vpravo řešení).

Řešení: Sestrojíme bokorysy $a_3 = A_3B_3$, $v_3 = U_3V_3$ přímek a, v a snadno určíme nejen vzájemnou polohu přímek a, v, ale i jejich úhel φ. $\varphi = \angle av = \angle a_3v_3$.



Obr.3.43

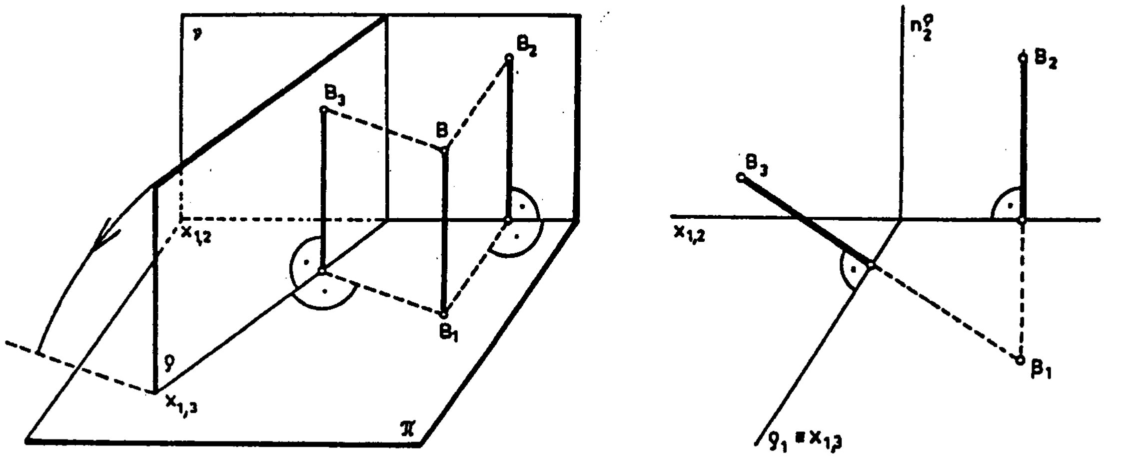
Bokorysu používáme pro zlepšení názornosti, zjednodušení konstrukce a k jednoznačnému určení objektu v prostoru. Z obrázku 3.44 je zřejmé, že půdorys a nárys objektu (s neoznačenými průměty bodů) neurčují objekt v prostoru jednoznačně a proto přidáváme bokorys.



Obr.3.44

Pro zjednodušení konstrukcí můžeme též užít **další třetí průmětnu** ρ , která je kolmá **pouze k jedné** z průměten π, ν .

Uvažujme tedy třetí průmětnu ρ : $\rho \perp \pi$, $\rho \not\perp \nu$. Průmětnu ρ sklopíme do půdorysny kolem průsečnice $x_{1,3} \equiv \rho \cap \pi$, sdružíme s půdorysnou. Konstrukce třetího průmětu B_3 bodu B je zřejmá z obr. 3.45 (vlevo náčrt situace, vpravo konstrukce 3-ho průmětu).



Obr.3.45

3.9.2 Úloha.

Sestrojte nejkratší příčku mimoběžek a, b (osu mimoběžek).

Dáno: a , b ($a \parallel \pi$), viz obrázek 3.46.

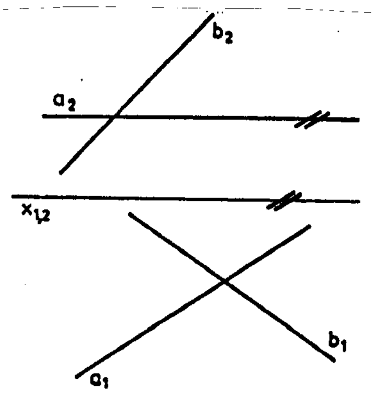
Návod. Označme A, B krajní body nejkratší příčky, $A \in a, B \in b$, pak pro ni platí $AB \perp a$, $AB \perp b$.

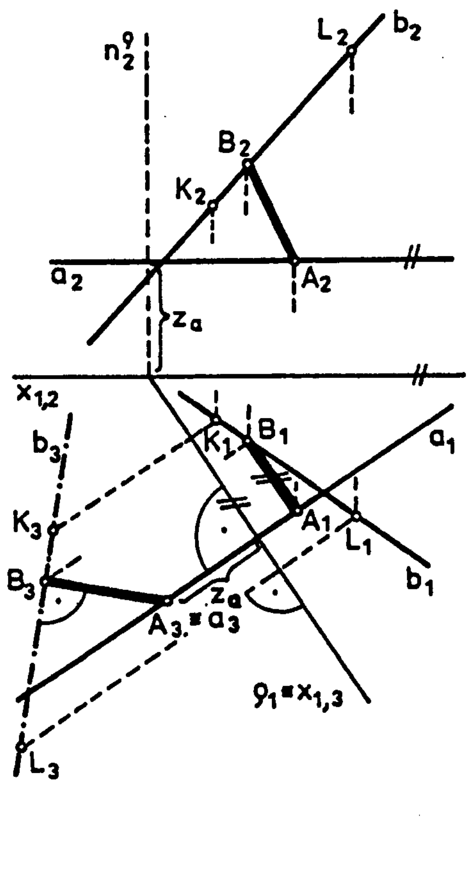
Řešení, obrázek 3.46 vpravo.

a) $a \parallel \pi$ $\Rightarrow$ můžeme zvolit třetí průmětnu ρ tak, aby $\rho \perp a$, $\rho \perp \pi$,

b) Sestrojíme třetí průměty mimoběžek a, b a příčky AB . Přímka a se promítá do ρ jako bod $a_3 \equiv A_3$ a $A_3B_3 \perp b_3$ (viz 1.7.2), neboť $AB \parallel \rho$. K, L jsou libovolné body přímky b.

Poznámka. Ve třetím průmětu dostáváme skutečnou vzdálenost mimoběžek a, b.





Obr.3.46

3.9.3 Úloha

Určete vzdálenost bodu M od roviny α.

Dáno: $\alpha = (p^\alpha, n^\alpha), M$, obr.3.47.

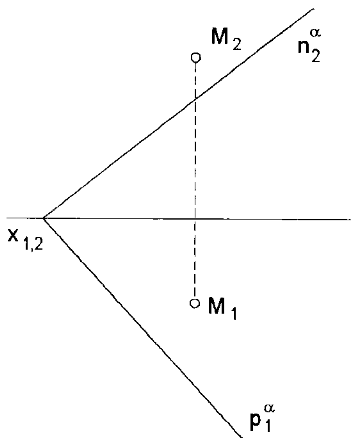
Návod

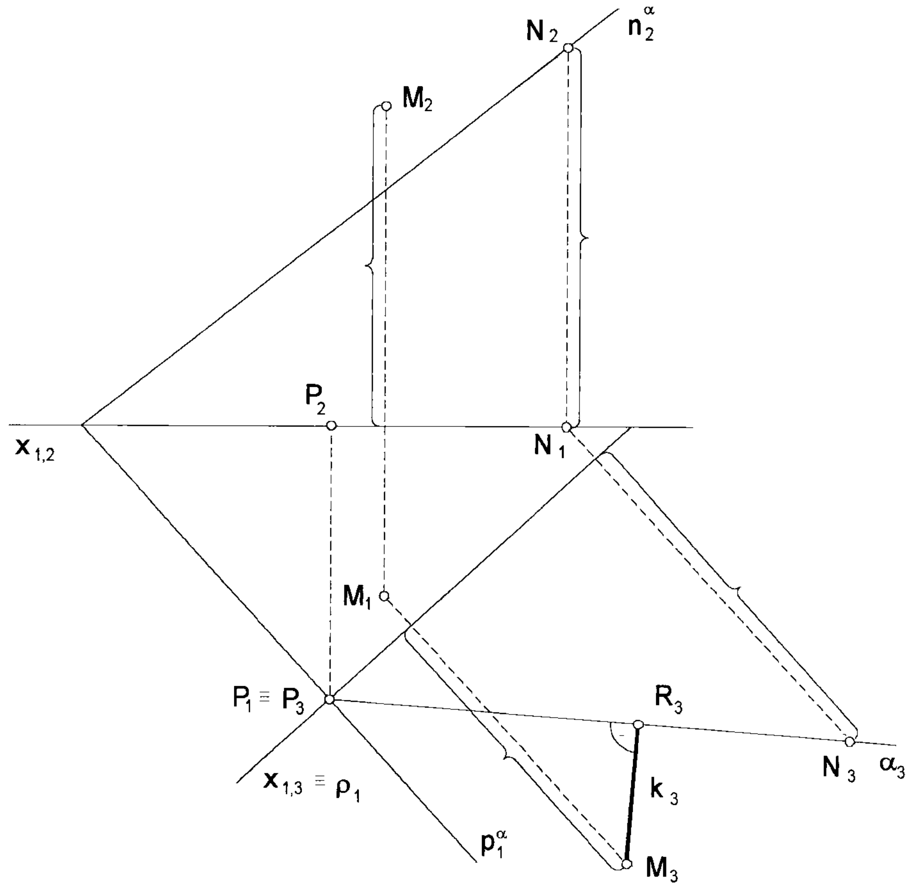
1) Užijeme třetí průmětnu ρ, kolmou k půdorysné stopě p^α roviny α. Průmětnu ρ sklopíme do půdorysny kolem $x_{1,3} \equiv \rho_1$ a sdružíme ji s půdorysnou. Třetí průmět roviny $\alpha, \alpha \perp \rho$, je přímka α_3.

2) Zvolíme dva body $N, P, N \in n^\alpha, P \in p^\alpha$ v rovině α. Sestrojíme třetí průměty M_3, N_3, P_3 bodů M, N, P podle obr.3.45, $\alpha_3 \equiv N_3P_3$.

3) Ve třetím průmětu dostaneme skutečnou vzdálenost $v(M, \alpha) = | M_3R_3 |$, kde $k = MR$ je kolmice k rovině α a $R \equiv k \cap \alpha$. Platí totiž:

$\rho \perp \alpha, k \perp \alpha \Rightarrow k \parallel \rho \Rightarrow k_3 \perp \alpha_3, | M_3R_3 | = | MR |$.





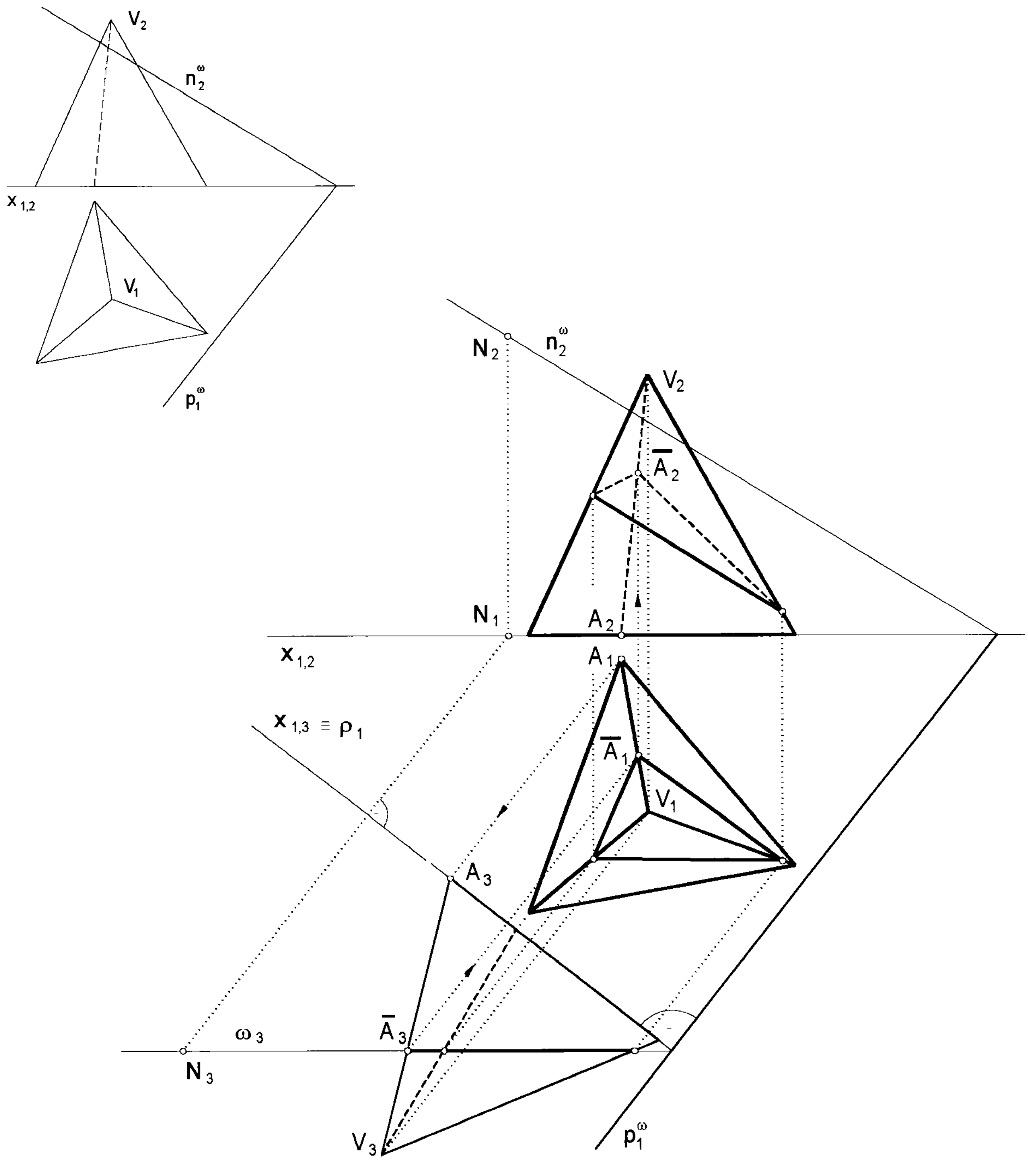
Obr.3.47

3.9.4 Úloha

Sestrojte řez trojbokého jehlanu $ABCV$ **rovinou** ω $(\omega \not\perp \pi, \omega \not\perp \nu)$.

Řešení, obr.3.48

Užijeme třetí průmětnu ρ : $\rho \perp \pi, \rho \perp \omega$ a tedy $\rho_1 \perp p^{\omega}{}_1$. Třetím průmětem roviny řezu ω je tedy přímka ω_3, viz 3.9.3. Snadno sestrojíme průsečíky hran s rovinou řezu, kupříkladu bod řezu $\bar{A} \equiv \omega \cap VA$, $\mathbf{\bar{A}} : \mathbf{\bar{A}_3} \equiv \boldsymbol{\omega_3} \cap \mathbf{V_3A_3}, \mathbf{\bar{A}_3\bar{A}_1} \perp \mathbf{x_{1,3}}, \mathbf{\bar{A}_1} \in \mathbf{A_1V_1}$ a podobně pro nárys řezu, jak je vidět z obrázku 3.48.



Obr.3.48

3.10 Řešené úlohy

3.10.1 Úloha

Zobrazte kružnici $k = (S, r)$ ležící v rovině α, viz obr. 3.49 a, b, c, d, e.
Dáno: Střed S, poloměr r, rovina α.
Touto úlohou jsme se již zabývali v 3.6.4 (rovina kružnice je kolmá k půdorysně) a 3.6.8 (kružnice leží v obecné rovině). Na obrázku 3.49 jsou zobrazeny kružnice, jejichž roviny mají zvláštní polohu vzhledem k průmětnám.

a) Dáno: $S_1, r, \alpha_2(\alpha_2 \parallel x_{1,2})$.
Kružnice leží ve vodorovné rovině α.

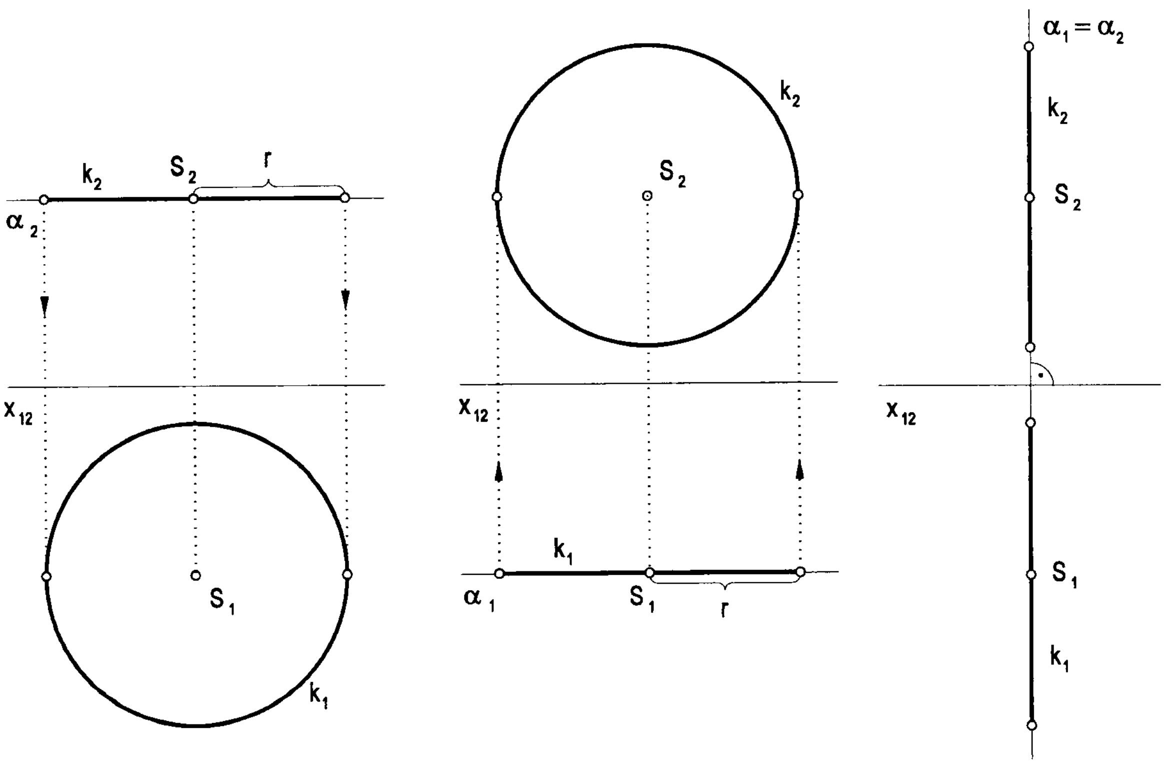
b) Dáno: $S_2, r, \alpha_1(\alpha_1 \parallel x_{1,2})$.
Kružnice leží v průčelné rovině α.

c) Dáno: $\alpha_1 \equiv \alpha_2, \alpha_1 \perp x_{1,2}, S_1, S_2, r$.
Kružnice leží v rovině kolmé k základnici x a tedy kolmé k oběma průmětnám.

d)Dáno: $\alpha_2, S_1, r(\alpha \perp \nu)$.
Kružnice leží v rovině kolmé k nárysně.

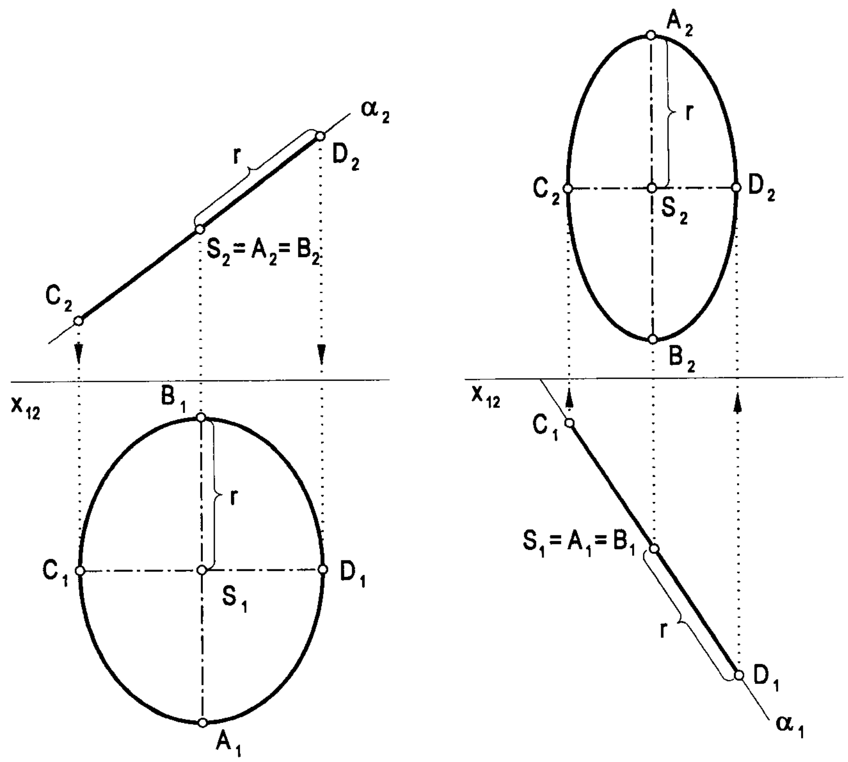
e)Dáno: $\alpha_1, S_2, r(\alpha \perp \pi)$.
Kružnice leží v rovině kolmé k půdorysně.

Zobrazení kružnic v případech a - e je zřejmé z obr.3.49 a případně z řešení úlohy 3.6.4.



a)$\alpha \parallel \pi$ b)$\alpha \parallel \nu$ c)$\alpha \perp x$

Obr.3.49



d)$\alpha \perp \nu$ e)$\alpha \perp \pi$

Obr. 3.49

3.10.2 Úloha

Sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ daný vrcholem podstavy A , výškou v a přímkou o, na níž leží střed podstavy S a vrchol jehlanu V, viz obr.3.50.

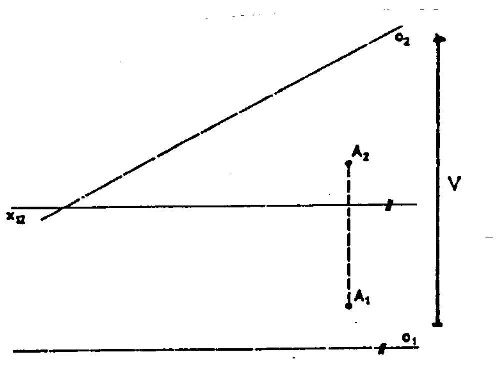
Řešení

1)Podstava jehlanu leží v rovině $\sigma, A \in \sigma, \sigma \perp o$. Platí $o \parallel \nu$ $(o_1 \parallel x_{1,2})$, rovina podstavy je tedy kolmá k ν a jejím nárysem je přímka $\sigma_2 : \sigma_2 \perp o_2, A_2 \in \sigma_2$.

2) Střed podstavy $S \equiv o \cap \sigma$, snadno najdeme jeho nárys $S_2 \equiv \sigma_2 \cap o_2$.

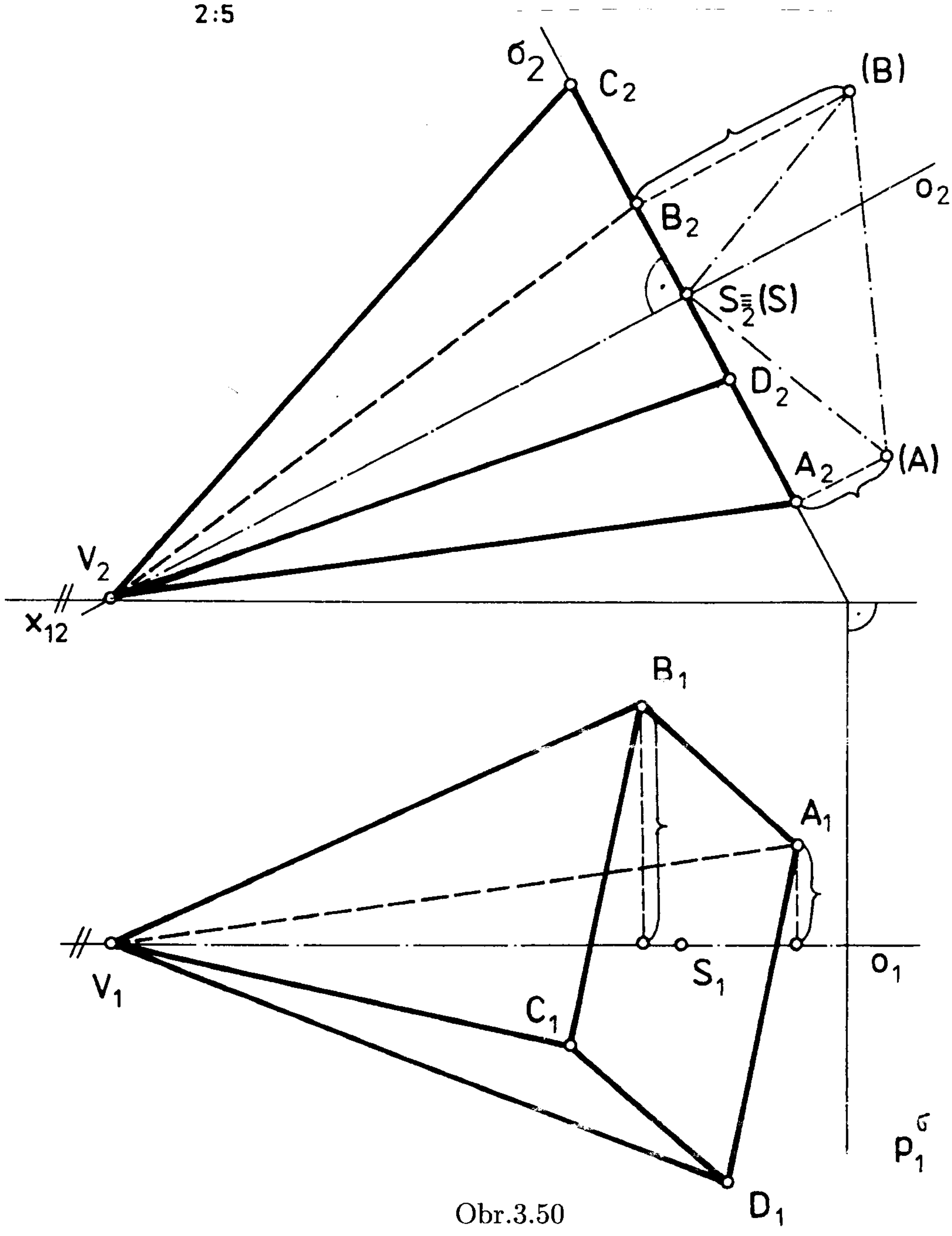
3) Nárysně promítací rovinu podstavy sklopíme do průčelné roviny $\overline{\nu}, S \in \overline{\nu}$ a sestrojíme ve sklopení čtvrtinu $(A)(B)(S)$ čtverce $ABCD$, viz 3.6.3, dále užijeme středové souměrnosti čtverce.

4) Výška jehlanu se v náryse zachová ve skutečné velikosti, protože $o \parallel \nu$.



o_2
A_2
x_{12}
V
A_1
o_1

2:5



σ_2
C_2
(B)
o_2
B_2
$S_{\equiv 2}(S)$
D_2
A_2
(A)
V_2
x_{12}
B_1
A_1
V_1
S_1
o_1
C_1
p_1^σ
D_1

Obr.3.50

3.10.3 Úloha

Zobrazte těleso vzniklé rotací osového řezu m kolem vodorovné osy o. Je dána osa rotace a osový řez v měřítku 2:3, viz obr.3.51, vpravo dole.

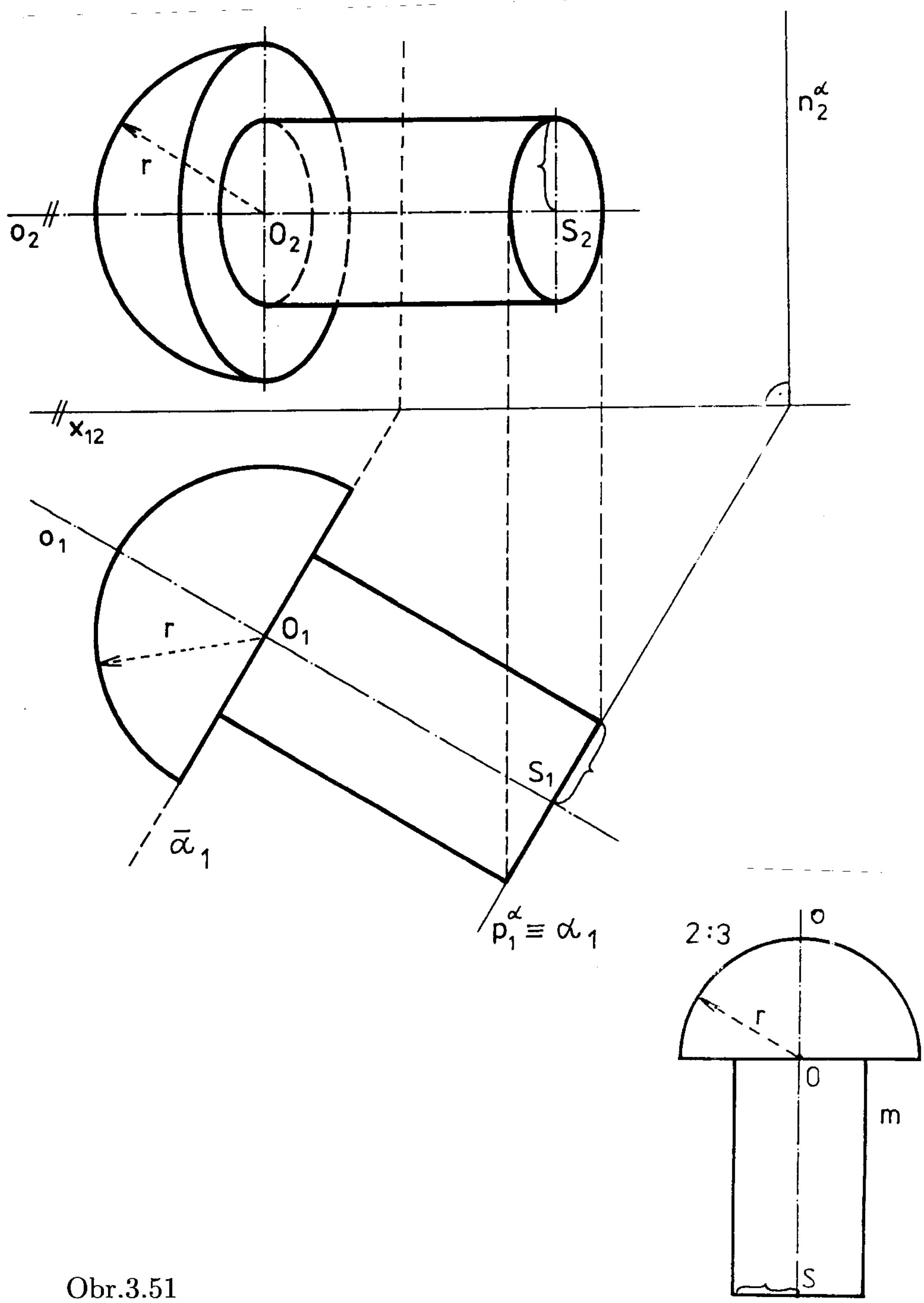
Řešení

1) Těleso se skládá z rotačního válce (středy podstav O, S) a polokoule se středem O.

2) Roviny podstav $\alpha, \bar{\alpha}$ jsou kolmé k vodorovné ose rotace, jsou tedy kolmé k půdorysně a jejich půdorysem jsou přímky.

3) Zobrazíme podstavy válce podle 3.6.4 a 3.10.1 , obr.3.49 e.

4) Půdorysem koule (střed O, poloměr r) je kruh (střed O_1, poloměr r), analogicky pro nárys, viz obr.3.36. Pro zobrazení řezu koule rovinou rovinou $\bar{\alpha}$ užijeme postup z bodu 3).



Obr.3.51

Cvičení

Zadání k úlohám 1 - 15 najdete na následujících obrázcích 1 až 15, viz obr.3.52, obr.3.53, obr.3.54.

1)-3) Sestrojte skutečnou velikost úsečky AB.

4) Sestrojte skutečnou velikost trojúhelníka ABC.

5) V rovině α sestrojte čtverec $ABCD$ daný středem S a vrcholem A.

6) V rovině α sestrojte rovnostranný $\triangle ABC$.

7)-8) Bodem M sestrojte kolmici k rovině σ.

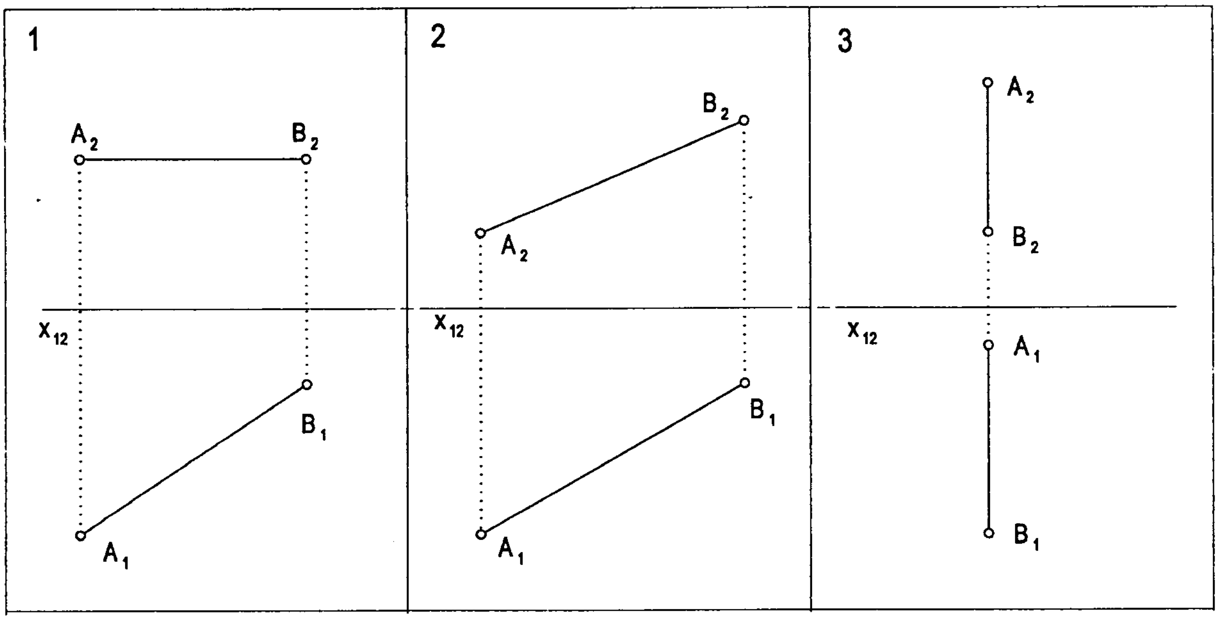
9) Bodem K sestrojte rovinu kolmou k přímce h.

10)-12) V rovině ρ sestrojte kružnici o středu S procházející bodem A.

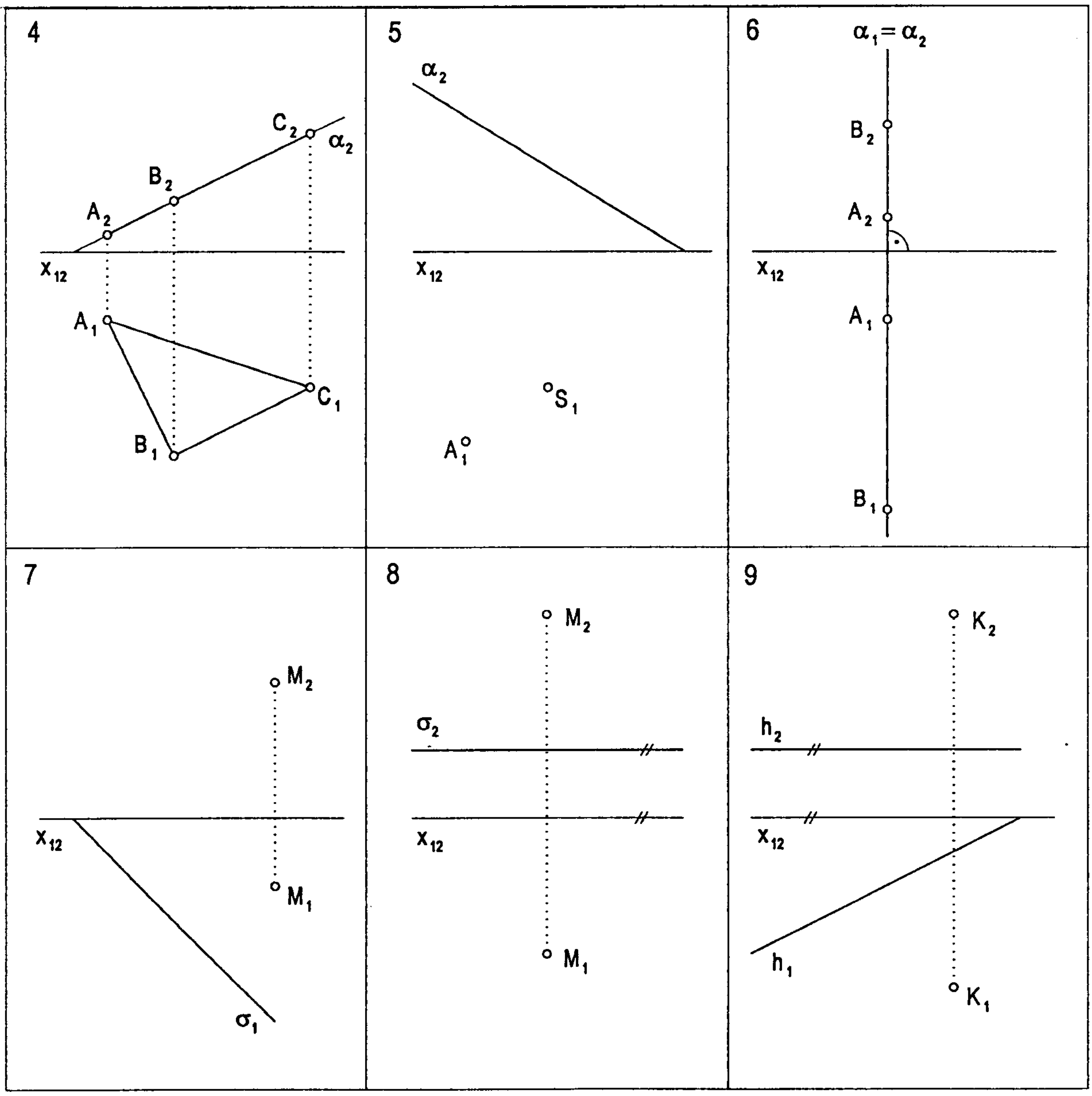
13) Zobrazte krychli $ABCD\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, jejíž stěna $ABCD$ leží v rovině β.

14) Zobrazte rotační válec o výšce v , jehož podstava leží v rovině β, má střed S a poloměr r.

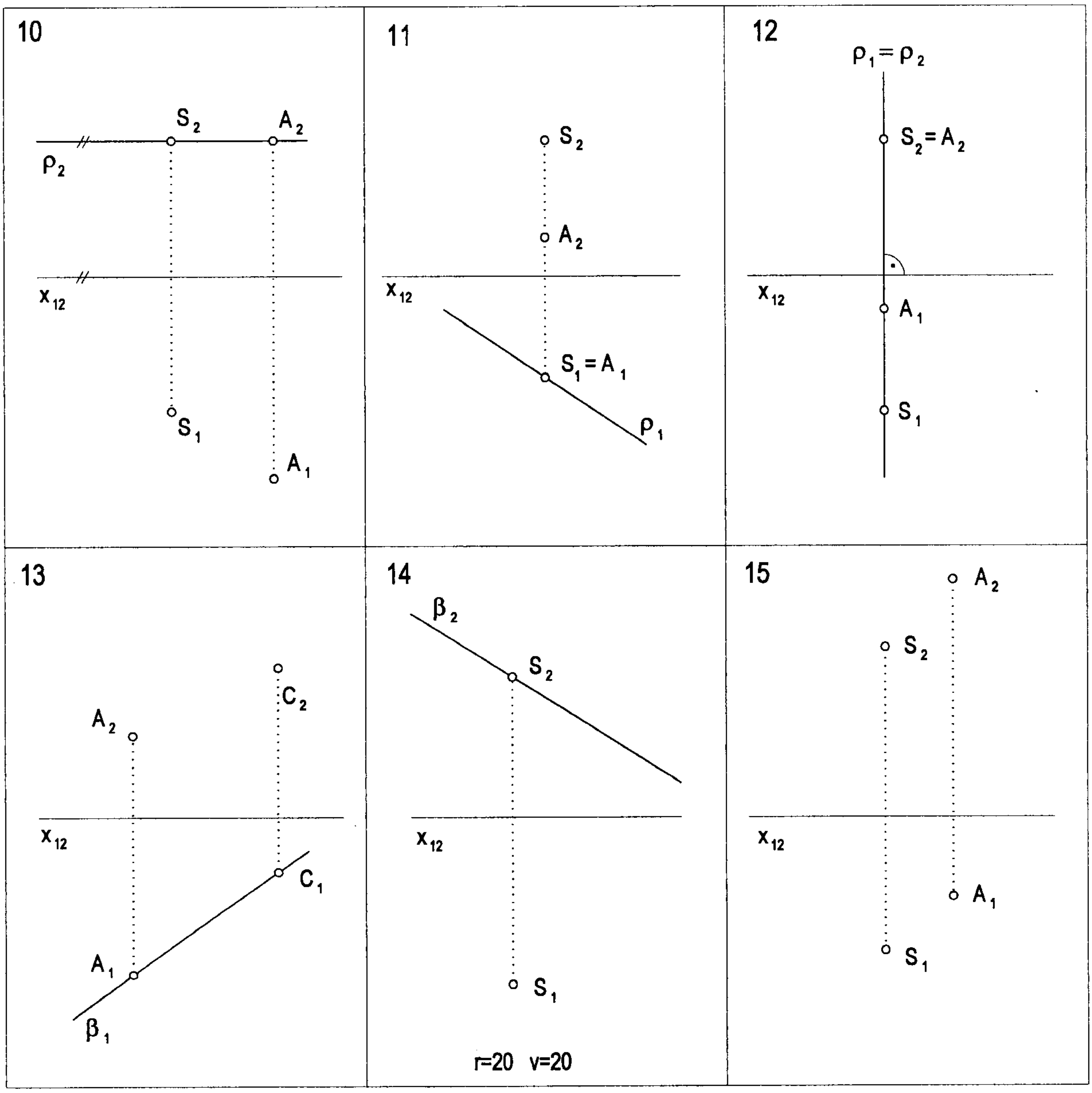
15) Zobrazte kulovou plochu, která má střed v bodě S a prochází bodem A.



Obr.3.52


4
C2
α2
B2
A2
x12
A1
C1
B1
5
α2
x12
S1
A1
6
α1=α2
B2
A2
x12
A1
B1
7
M2
x12
M1
σ1
8
M2
σ2
x12
M1
9
K2
h2
x12
h1
K1

Obr.3.53


10
S2 A2
ρ2
x12
S1
A1
11
S2
A2
x12
S1=A1
ρ1
12
ρ1=ρ2
S2=A2
x12
A1
S1
13
C2
A2
x12
C1
A1
β1
14
β2
S2
x12
S1
r=20 v=20
15
A2
S2
x12
A1
S1

Obr.3.54