# 4. KOSOÚHLÉ PROMÍTÁNÍ

Mongeovo promítání nám umožňuje řešit konstruktivní úlohy v prostoru, ale jeho nevýhodou je malá názornost, zvláště při zobrazování složitějších objektů. Chceme-li názorně zobrazovat prostorové útvary, užíváme názorné promítací metody a to axonometrii (5. a 6. kapitola), lineární perspektivu (14. kapitola) a kosoúhlé promítání. Nejdříve se budeme zabývat kosoúhlým promítáním, se kterým jste se jistě mnohokrát setkali. Toto promítání je základem tzv. volné projekce, jež se užívá hlavně k náčrtům prostorových objektů. Doporučujeme čtenáři k prostudování 1. kapitolu, je věnována vlastnostem rovnoběžného promítání.

## 4.1 Základní pojmy

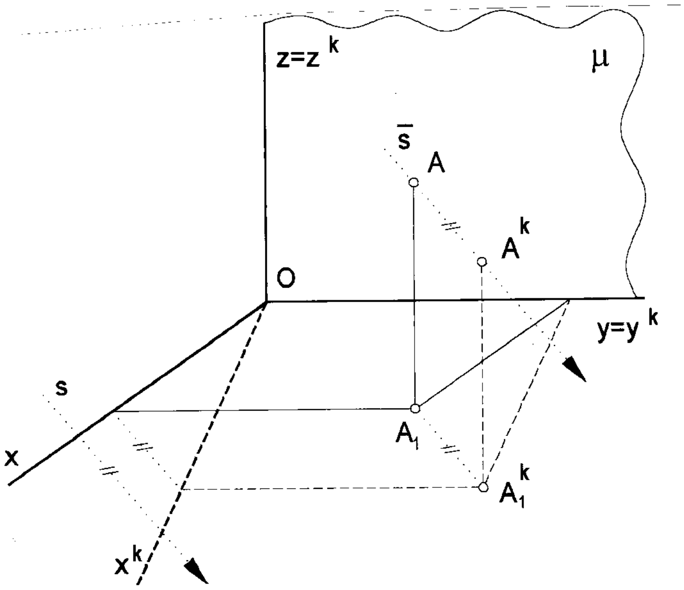
**Kosoúhlé promítání je rovnoběžné promítání směrem s na rovinu** $\mu$ v průčelné poloze, $s \nparallel \mu, s \not\perp \mu$.

Uvažujeme-li kartézský souřadnicový systém $(O, x, y, z$, jednotka $j)$ (3.1 ), pak průmětnu $\mu$ umístíme do souřadnicové roviny $(y, z)$, obr.4.1. Bod $A$ promítneme ve směru $s$ do průmětny $\mu = (y, z)$ pomocí promítací přímky $\bar{s}$ $(A \in \bar{s}, \bar{s} \parallel s)$ a dostaneme **kosoúhlý průmět $\mathbf{A^k}$** bodu $A$ : $A^k \equiv \bar{s} \cap (y, z)$. Spolu s bodem $A$ promítneme ve směru $s$ do $(y, z)$ ještě jeho půdorys $A_1$ a získáme tak **kosoúhlý průmět $\mathbf{A_1{}^k}$ půdorysu.** Jak víme z kapitol 1. a 3., jeden průmět bodu nestačí pro jednoznačné určení bodu v prostoru.

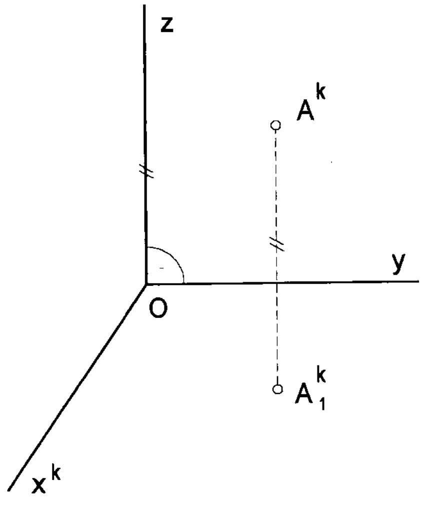
Průmětnu $\mu = (y, z)$ ztotožníme s nákresnou, (tabule, sešit) a dostaneme situaci znázorněnou na obrázku 4.2, kde podle 1.3 platí: $A^k\ A_1^k \parallel z$.

**Kosoúhlé promítání je vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru** $E_3$ **na množinu dvojic bodů** $A^k$, $A_1^k$ $(A_1^k\ A^k \parallel z)$ **v rovině** $(y, z)$, symbolicky zapíšeme

$$\mathbf{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A_1^k},\ \mathbf{A^k}$$




Obr.4.1

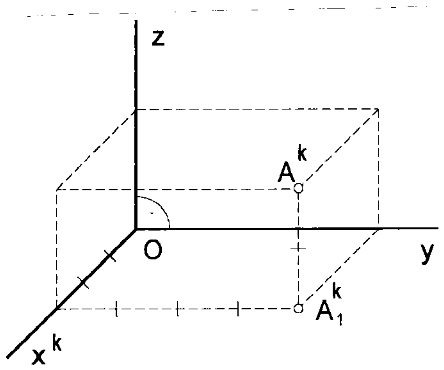



Obr.4.2

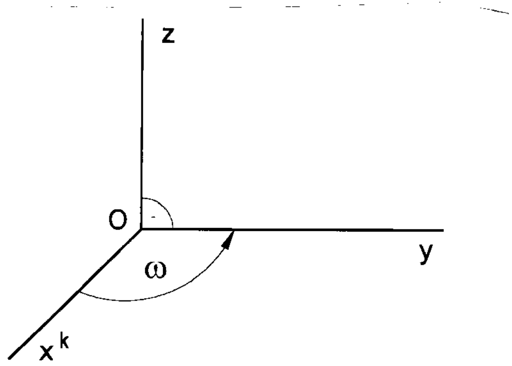
Bod v kosoúhlém promítání je dán dvojicí $A_1^k$ , $A^k$ tj. kosoúhlým průmětem půdorysu a kosoúhlým průmětem bodu $A$. Analogicky přímka $b$ v obecné poloze $(b \nparallel s, b \not\perp (y, z))$ je dána dvojicí $a_1^k$ , $a^k$ tj. kosoúhlými průměty půdorysu a přímky $a$.

Poznámka. Někdy vynecháváme indexy pro označení kosoúhlých průmětů. Takže kosoúhlý průmět $B^k$ bodu označíme jen $B$.

Promítneme-li bod $A$ pravoúhle do souřadnicových rovin $(x, y), (x, z), (y, z)$, dostaneme jeho půdorys $A_1$, nárys $A_2$, bokorys $A_3$ a v kosoúhlém průmětu do roviny (y, z) jejich kosoúhlé průměty $A_1^k, A_2^k, A_3^k$. Na obrázku 4.3 je kosoúhlý průmět **souřadnicového kvádru, viz 3.1.**




$A = (3, 4, 2), q = 2/3$ Obr.4.3




Obr.4.4

**Osový kříž (O; $\mathbf{x^k}$, y, z)** je tvořen kosoúhlými průměty sořadnicových os, $\mathbf{y^k \equiv y, z^k \equiv z, y \perp z}$. Označíme $\omega$ orientovaný úhel, $\omega = \angle x^k y$, viz obrázek 4.4.
**Souřadnice y a z se v kosoúhlém promítání nezkreslují!**
**Souřadnice x se zkreslují v poměru q, nazývá se kvocient.**
**q** je poměr zkreslené $x$–ové souřadnice ku skutečné $x$–ové souřadnici.

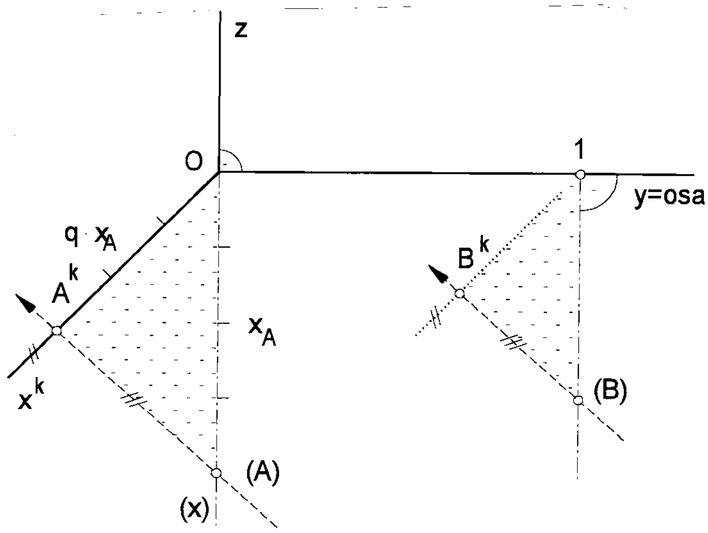
**Kosoúhlé promítání je dáno : úhel $\omega$, kvocient q.**

V kosoúhlém promítání budeme zobrazovat tělesa, jejichž podstavy jsou umístěny do souřadnicových, nebo hlavních rovin. Při řešení konstruktivních úloh budeme vycházet ze zvláštních poloh uvažovaných geometrických objektů. Jedná se tedy o kosoúhlé průměty útvarů ležících v souřadnicové nebo hlavní rovině. Konstrukce v těchto rovinách realizujeme pomocí sklopení (=otočení o 90° ) uvažované roviny do nákresny, kde konstrukci provedeme a výsledek sklopíme zpět.

**4.2 Konstrukce v souřadnicové rovině** $(x, y)$

Sklopíme rovinu $(x, y)$ do nákresny $(y, z)$, sklopené útvary označíme ( ), (obr.4.5, kde $q = 3/4$).

1) Osa sklápění je $o \equiv y$.
2) Osu $x$ sklopíme do přímky $(x)$, $(x) \equiv z$.
3) Bod $A \in x$ sklopíme do $(A)$ : $(A) \in (x), | OA^k |:| O(A) |= q$.
4) Bod $B \in (x, y)$ sklopíme do bodu $(B)$ užitím souřadnic, $y_B$ nezkreslena, $x_B$ zkreslena v poměru $q$.
5) Sklopili jsme libovolný bod $B$ v rovině $(x, y)$ do bodu $(B)$ v nákresně, $A$ je libovolný bod na ose $x, (A) \in (x)$ .




$q = 3/4$ Obr.4.5

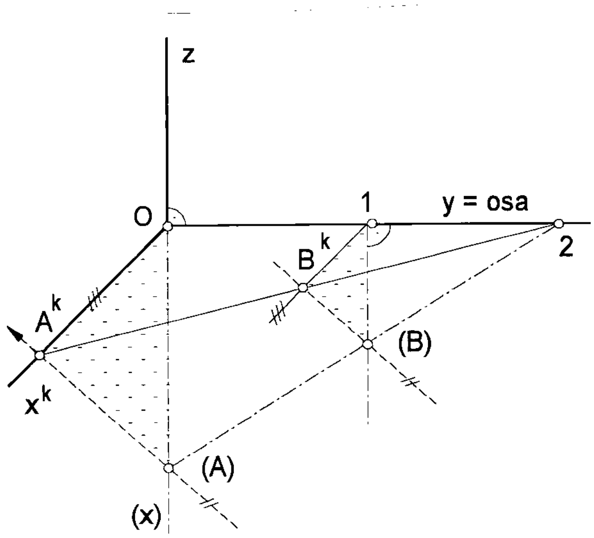
Při sklápění souřadnicové roviny můžeme užít **vlastností sklápěných útvarů** :

**V1)** Přímky spojující kosoúhlé průměty bodů a body sklopené jsou navzájem rovnoběžné, takže v našem případě platí $\mathbf{A^k(A)} \parallel \mathbf{B^k(B)}$, směr $\mathbf{A^k(A)}$ nazveme **směrem zkreslení** $x$–ových souřadnic a označíme jej šipkou, obr.4.6.

Tato vlastnost plyne z podobnosti trojúhelníků $\triangle A^kO(A)$, $\triangle B^k1(B)$.

**V2)** Dvojice přímek $m^k$, $(m)$ se buď protínají na ose sklápění $y$, pokud $m \nparallel y$, nebo jsou s osou $y$ rovnoběžné, takže v našem případě pro $m = AB$ platí

$\mathbf{A^kB^k} \cap \mathbf{(A)(B)} \equiv \mathbf{2}$; $\mathbf{2} \in \mathbf{y}$.



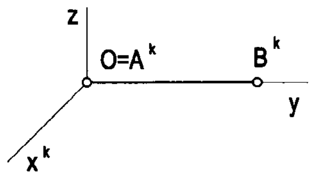

Obr.4.6

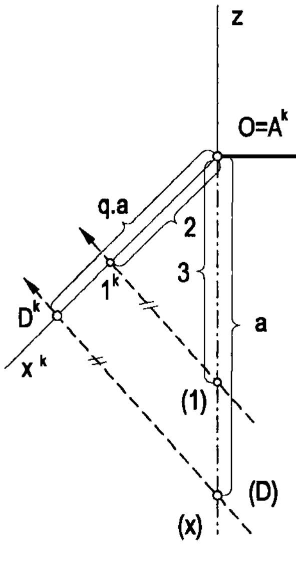
Tato vlastnost je zřejmá, neboť body na ose otáčení jsou při pohybu pevné.
Poznámka. Analogicky k 4.10.1 sklopíme souřadnicovou rovinu $(x, z)$ do nákresny $(y, z)$ a rovněž tak hlavní roviny $\bar{\nu}, \bar{\pi}$ $(\bar{\nu} \parallel \nu, \bar{\pi} \parallel \pi)$ .

## 4.3 Úloha

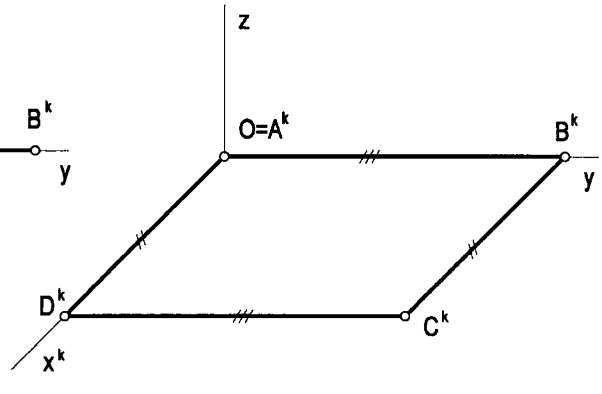
V kosoúhlém promítání $(\omega,\ q = 2/3)$ zobrazte čtverec $ABCD$ v rovině $(x, y)$, znáte-li jeho stranu $AB$ a $x_D > 0$. Je dán kosoúhlý průmět $A^kB^k$ strany $AB$.
Řešení, viz obrázky 4.7a, 4.7b.

1) Strana čtverce $a = \mid A^kB^k \mid$, jelikož $AB \subset y$.
2) Strana $AD$ leží na ose $x$, pro její kosoúhlý průmět máme $A_kD_k = \frac{2}{3}$ a, užijeme směru zkreslení $(1)1_k$, viz obr.4,7a.
3) Pomocí rovnoběžnosti stran sestrojíme kosoúhlý průmět čtverce $A^kB^kC^kD^k$.



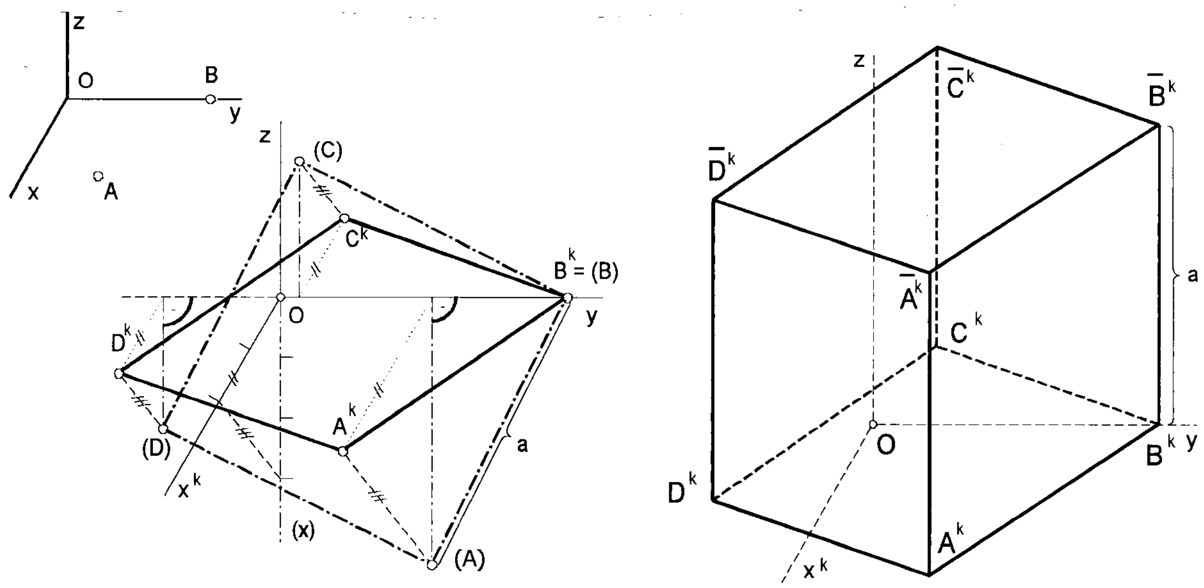

Obr.4.7a




Obr.4.7b.

## 4.4 Úloha

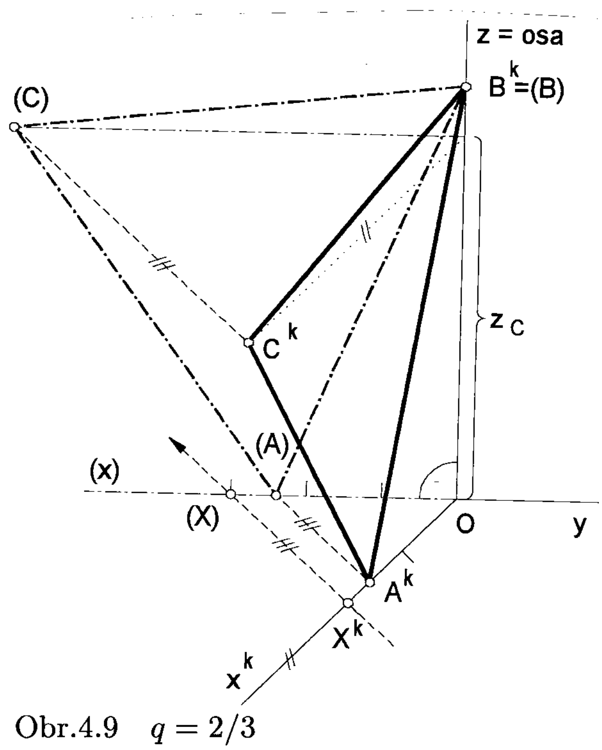
V kosoúhlém promítání ($\omega$, $q = 2/3$) zobrazte krychli $ABCD\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ s podstavou $ABCD$ v rovině $(x, y)$ znáte-li hranu $AB$.
Je dán kosoúhlý průmět $A^kB^k$ hrany $AB$, $(z_{\bar{A}} > 0, x_C < 0)$.
Řešení, viz obr. 4.8 (jednotlivé kroky řešení).
1) Sestrojíme čtverec $ABCD$ v rovině $(x, y)$ podle 4.2.
2) Ve sklopení $(x, y)$ do nákresny určíme skutečnou velikost hrany $a = |\,(A)(B)\,|$ .
3) Hrany krychle $A\bar{A}, B\bar{B}, C\bar{C}, D\bar{D}$ jsou rovnoběžné s osou $z$ , totéž platí pro jejich kosoúhlé průměty. Hrany se zobrazují ve skutečné velikosti.
4) Vyznačíme viditelnost hran v nadhledu tzn. horní podstava krychle je viditelná, spodní nikoliv.




Obr.4.8

## 4.5 Úloha

V kosoúhlém promítání ($\omega$, $q = 2/3$) zobrazte rovnostranný trojúhelník $ABC$ v rovině $(x, z)$, znáte-li jeho stranu $AB$. Je dán kosoúhlý průmět $A^kB^k$ strany $AB$.
Řešení, viz obrázek 4.9.
1) Rovinu $(x, z)$ sklopíme kolem osy $z$ do nákresny podle 4.10.1.
2) Směr zkreslení $x$–ových souřadnic je dán přímkou $X^k(X)$,
kde $OX^k = 2cm, O(X) = 3cm$ .
3) Bod $A$ sklopíme do $(A)$ tak, že
$A^k(A) \parallel X^k(X),\ A \in x \Rightarrow (A) \in (x)$.
Sklopený bod $(B)$ : $B \in z \Rightarrow B^k \equiv (B)$.
4) V nákresně sestrojíme rovnostranný $\triangle(A)(B)(C)$ o straně $(A)(B)$. Ze dvou řešení zobrazíme jen jedno.
5) Bod $(C)$ sklopíme zpět do $C^k$, užijeme směru zkreslení $C^k(C) \parallel X^k(X)$ a nezkreslené souřadnice $z_C$.




Obr.4.9 $q = 2/3$

## 4.6 Kosoúhlý průmět kružnice k v souřadnicové nebo hlavní rovině

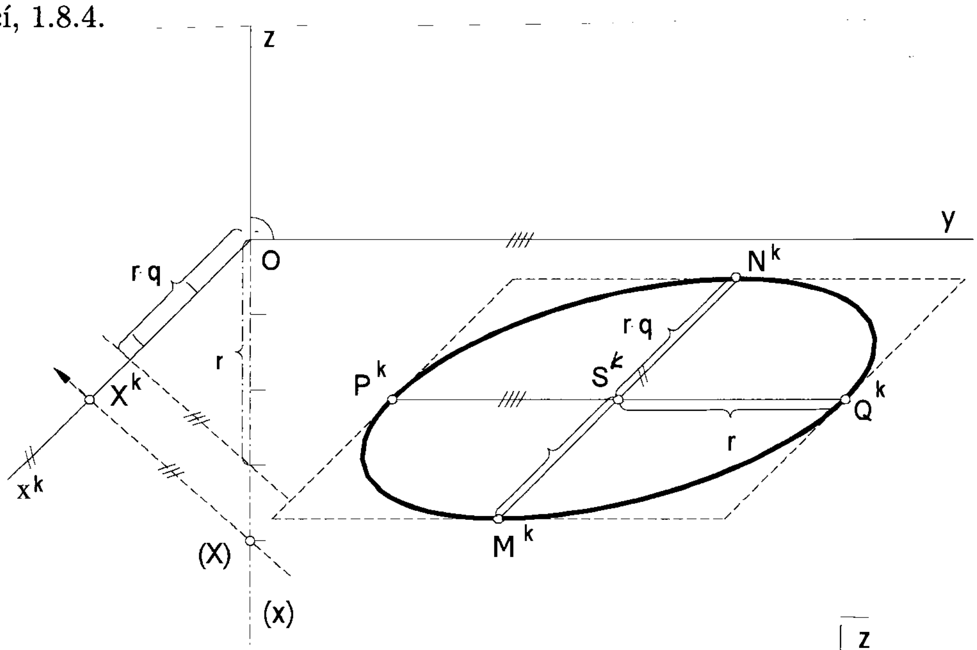
Je dáno : $(\omega,\ q), k = (S, r), \bar{k} = (\bar{S}, \bar{r}), k \subset (x, y), \bar{k} \subset (x, z)$.

Řešení, viz obrázky 4.10, 4.11.

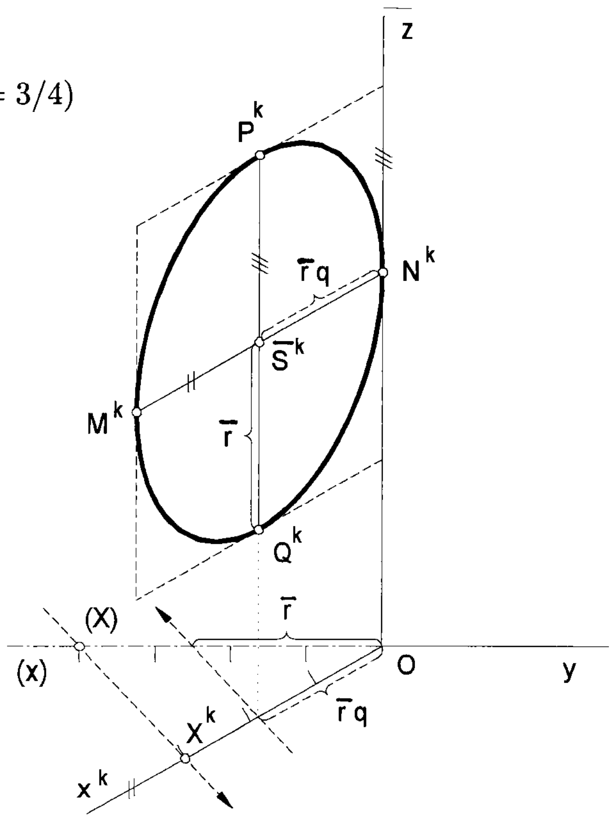
1) Kružnice $k$ v rovině $(x, y)$ se zobrazí jako elipsa (viz 1.8) určená sdruženými průměry $M^kN^k, P^kQ^k$, pro které platí $\mathbf{M^kN^k} \parallel \mathbf{x^k}, \mid \mathbf{M^kN^k} \mid = \mathbf{2rq}, \mathbf{P^kQ^k} \parallel \mathbf{y}, \mid \mathbf{P^kQ^k} \mid = \mathbf{2r}$.

2) Kružnice $\bar{k}$ v rovině $(x, z)$ se zobrazí jako elipsa (viz 1.8) určená sdruženými průměry $M^kN^k, P^kQ^k$, pro které platí $\mathbf{M^kN^k} \parallel \mathbf{x^k}, \mid \mathbf{M^kN^k} \mid = \mathbf{2rq}, \mathbf{P^kQ^k} \parallel \mathbf{z}, \mid \mathbf{P^kQ^k} \mid = \mathbf{2r}$.

3) Elipsu sestrojíme bodově příčkovou konstrukcí, nebo určíme osy elipsy Rytzovou konstrukcí, 1.8.4.




Obr.4.10 *Kružnice v půdorysně* $(q = 3/4)$




Obr. 4.11 *Kružnice v rovině (x, z)* $(q = 3/4)$

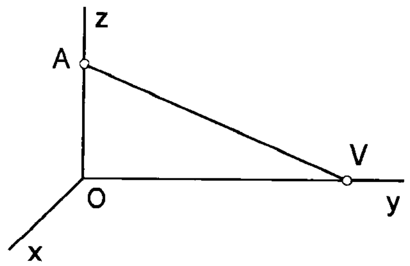
Poznámka.**Indexy pro značení kosoúhlých průmětů dále vynecháváme.**

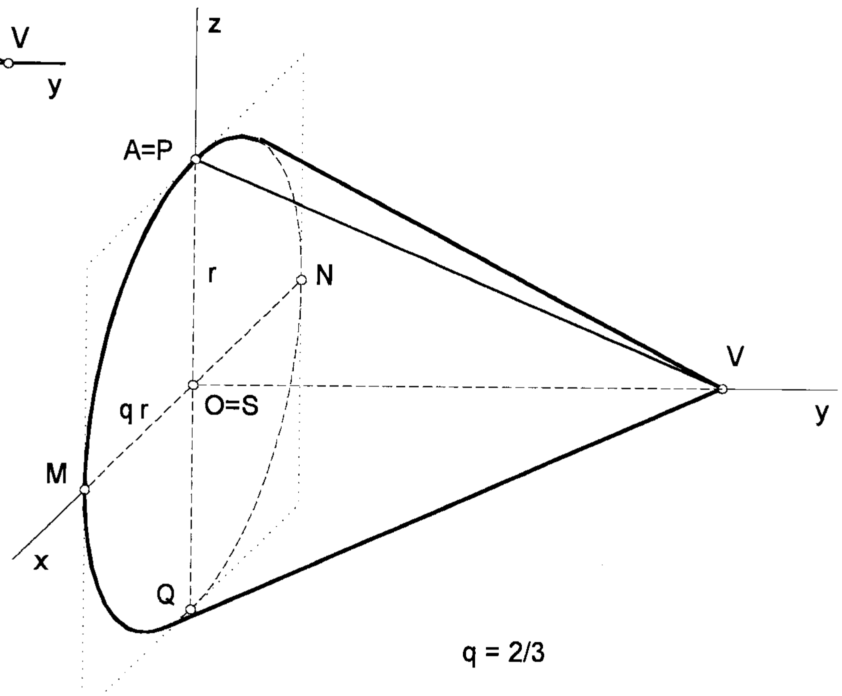
### 4.7 Úloha

V kosoúhlém promítání ($\omega = 135°, q = 2/3$) zobrazte rotační kužel o vrcholu $V$ s podstavou v rovině $(x, z)$, znáte-li jeho površku $VA$, viz obrázek 4.12.

Řešení

1) Osa $y$ je osou kužele, podstavná kružnice $k = (S, r)$ leží v rovině $(x, z)$, má střed $S \equiv O$ a prochází bodem $A$,
$A \in (x, z)$. Poloměr $r = OA$, je ve skutečné velikosti, protože úsečka $OA$ je částí osy $z$.
2) Podstavná kružnice se zobrazí jako
elipsa, určíme ji sdruženými průměry (podle 4.6, část 2):
$MN, PQ : MN \subset x,\ PQ \subset z,\ SM = qr,\ SP = r$ .
3) Kužel zobrazíme v nadhledu tzn. podstava nebude vidět, obrysové površky sestrojíme jako tečny z vrcholu $V$ k elipse (jen přibližně).



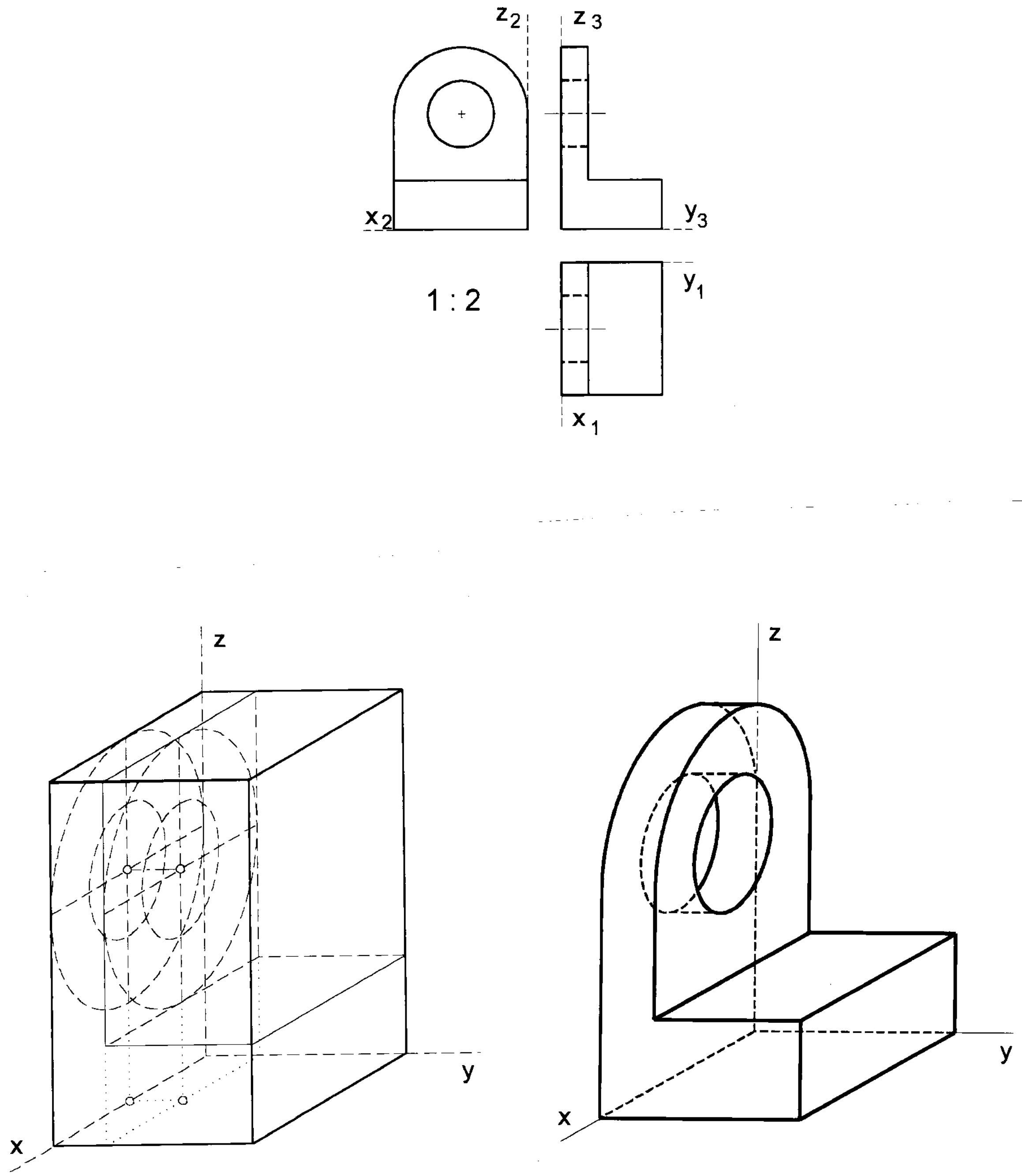

Obr.4.12.

### 4.8 Úloha

V kosoúhlém promítání ($\omega$, $q = 2/3$) zobrazte objekt, daný sdruženými průměty (měřítko 1:2), obr.4.13.

Řešení

1) Nejprve sestrojíme kosoúhlý průmět půdorysů důležitých bodů objektu. Souřadnice $y$ se promítáním nemění, souřadnice $x$ zkreslíme v daném poměru $q$ a to buďto graficky pomocí směru zkreslení, nebo početně tj. násobíme souřadnice $x$ daným poměrem zkreslení $q$.
2) Sestrojíme kosoúhlé průměty důležitých bodů (vrcholy těles, středy kružnic) pomocí nezkreslených $z$-ových souřadnic, jednotlivé kroky konstrukce vidíte nejlépe na obrázku 4.13.

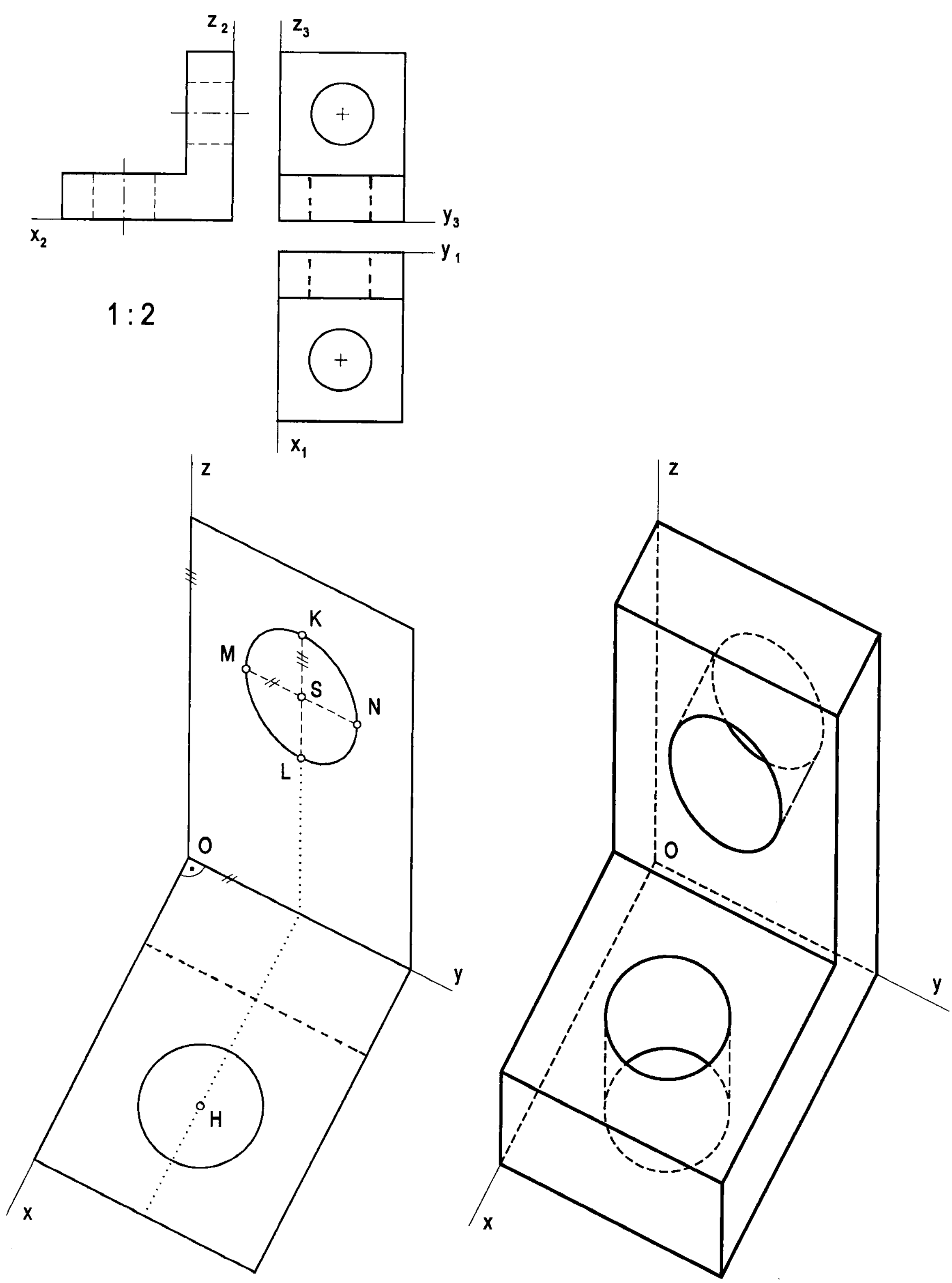



*Kosoúhlý průmět objektu daného sdruženými průměty v měřítku 1:2*

Obr.4.13

Poznámka
Útvary v rovině $(y, z)$ a v rovinách $\beta \parallel (y, z)$ se kosoúhlým promítáním nemění.

Zvláštním případem kosoúhlého promítání je vojenská perspektiva, viz obr.4.14




*Vojenská perspektiva objektu daného sdruženými průměty v měřítku 1:2*

Obr. 4.14 a Obr.4.14 b

### 4.9 Vojenská perspektiva

je rovnoběžné promítání na rovinu $(x, y)$ ve směru $s, s \not\perp (x, y)$.

**Je dána osovým křížem:** $\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}^{\mathbf{k}};\ \mathbf{x} \perp \mathbf{y}, \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}^{\mathbf{k}}, \mathbf{y} \equiv \mathbf{y}^{\mathbf{k}}$.

Poměr zkreslení z-ových souřadnic se obvykle volí rovný jedné, takže z-ové souřadnice se nezkreslují. Chceme-li nazorný obrázek, volíme $\angle xz = 150°$. Je snadné zobrazit ve vojenské perspektivě objekt daný sdruženými průměty, viz obrázek 4.14.

**Všechny souřadnice jsou nezkresleny a půdorys objektu se zobrazí ve skutečné velikosti.**

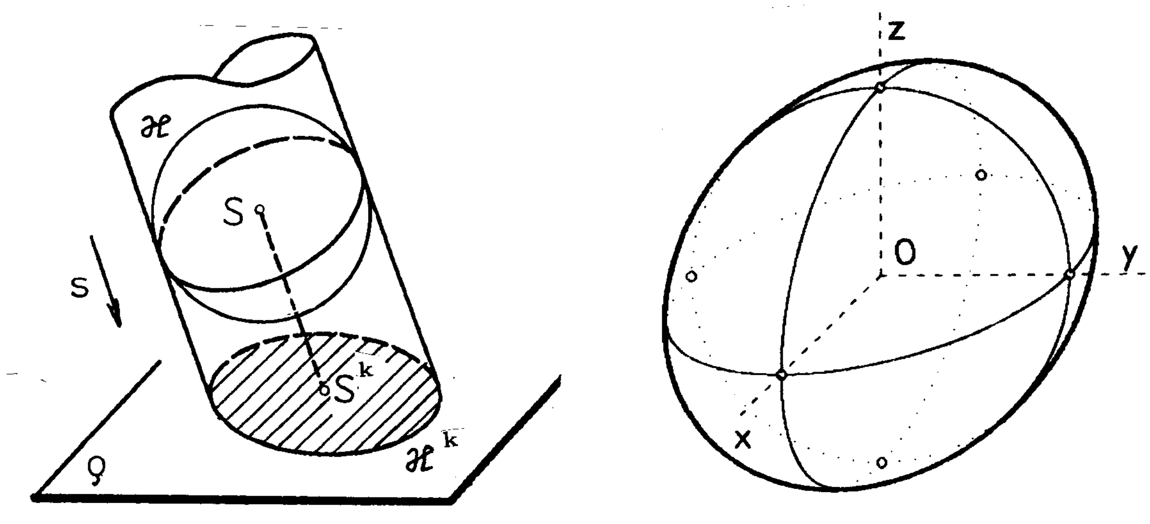
Postup zobrazení je zřejmý z obr.4.14:

1) Nejprve překreslíme skutečný půdorys, obr.4.14a, potom objekt "vytáhneme do prostoru ve směru osy $z$", obr.4.14b, užijeme skutečné výšky dané sdruženými průměty objektu.

2) Vojenská perspektiva kružnice ve vodorovné rovině je opět kružnice, kružnice v rovině $(y, z)$ se zobrazí jako elipsa, podle 4.6. Kružnice v rovnoběžných rovinách se zobrazí analogicky.

### 4.10 Průmět kulové plochy

V kosoúhlém promítání snadno zobrazíme objekty skládající se z elementárních těles (hranol, jehlan, kužel, válec). Výjimkou je zobrazení koule, **jejím kosoúhlým průmětem je elipsa a její vnitřek,** viz obr.4.15. Jedná se o řez promítacího válce koule průmětnou. Chceme-li zobrazovat kouli nebo kulovou plochu, volíme **pravoúhlé promítání, v němž se koule zobrazí jako kruh,** viz obrázek 3.36.
Poznámka
Kosoúhlé promítání je zvláštním typem obecné axonometrie, platí pro něj všechny vlastnosti uvedené ve 6.kapitole.




*Kosoúhlé promítání koule- náčrt* *Kosoúhlý průmět koule*
Obr.4.15

**Cvičení**

A) V kosoúhlém promítání : $\omega = 135°, q = 2/3$ , zobrazte:

(1-2) krychli o hraně $AO$ se stěnami v souřadnicových rovinách, viditelným stěnám vepište kružnice,

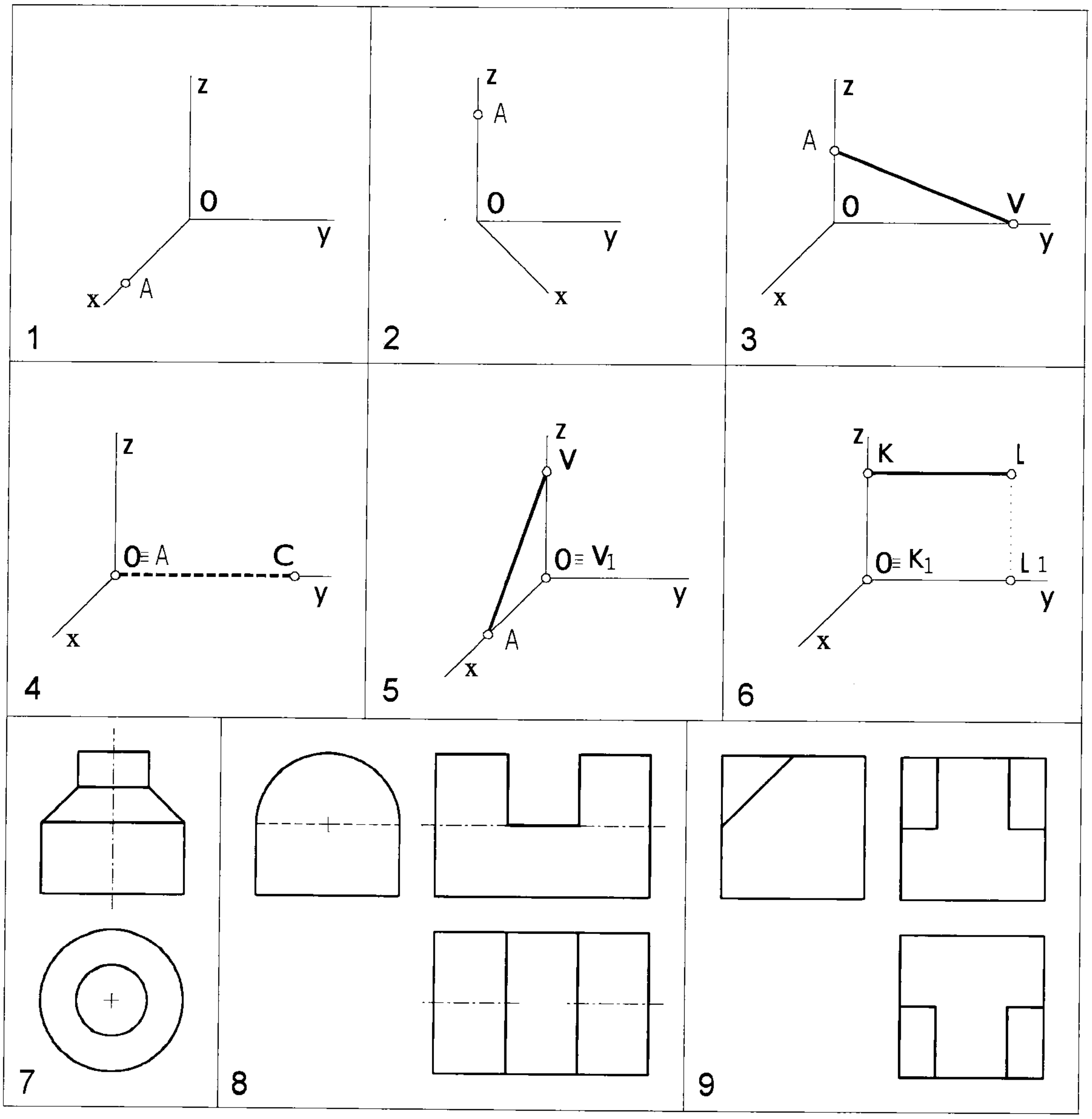
(3) pravidelný čtyřboký jehlan o vrcholu $V$, s podstavou v $(x, z)$ o vrcholu $A$,

(4) krychli $ABCD\bar{A}$ se stěnou $ABCD$ v $(x, y)$,

(5) rotační kužel, jehož plášť vznikne rotací úsečky $AV$ kolem osy $z$,

(6) rotační válec, jehož plášť vznikne rotací úsečky $KL$ kolem osy $y$.

B) Zobrazte objekty dané sdruženými průměty (7-9) v kosoúhlém promítání (viz A)) a ve vojenské perspektivě.




Obr.4.16