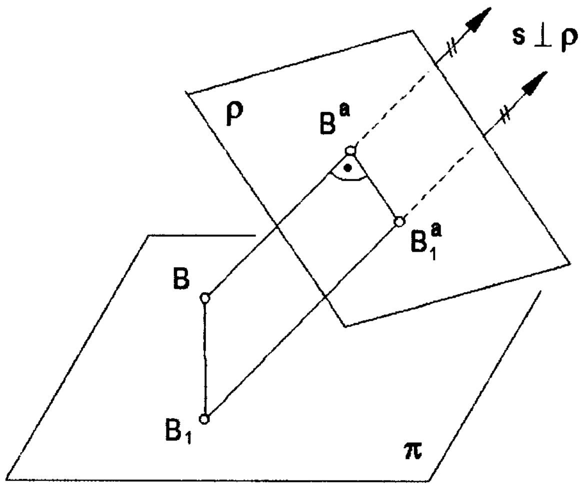
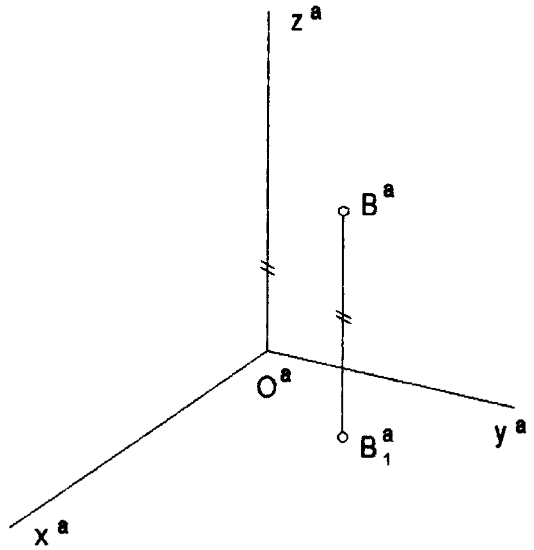
5. PRAVOÚHLÁ AXONOMETRIE

Pravoúhlá axonometrie je pravoúhlé promítání na axonometrickou průmětnu ρ, která má obecnou polohu vzhledem k souřadnicovému trojhranu $\mathrm{O}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ (3.1), směr promítání je $\mathrm{s}, \mathrm{s} \perp \rho$.





Obr.5.1 Obr.5.2

Uvažujme kartézský souřadnicový systém, bod $B(B \notin \pi)$ v prostoru, jeho pravoúhlý průmět B_1 (resp. B_2, B_3) do půdorysny (resp. nárysny, bokorysny). Bod B a jeho půdorys B_1 promítneme pravoúhle do axonometrické průmětny, dostaneme axonometrický průmět B^a bodu B a axonometrický průmět ${B_1}^a$ půdorysu B_1, obr.5.1. Axonometrickou průmětnu ρ ztotožníme s nákresnou, obr.5.2.

Dvojici $\mathrm{B^a}, \mathrm{B_1^a}$ nazveme axonometrií bodu B.

Je zřejmé, že bodu B v prostoru je **vzájemně jednoznačně** přiřazena dvojice bodů v axonometrické průmětně a to B^a, B_1^a, kde $B^aB_1^a \parallel z^a$, kde z^a je axonometrický průmět osy z.

Osový kříž $\mathrm{O^a}, \mathrm{x^a}, \mathrm{y^a}, \mathrm{z^a}$ je tvořen axonometrickými průměty počátku O a os x, y, z.

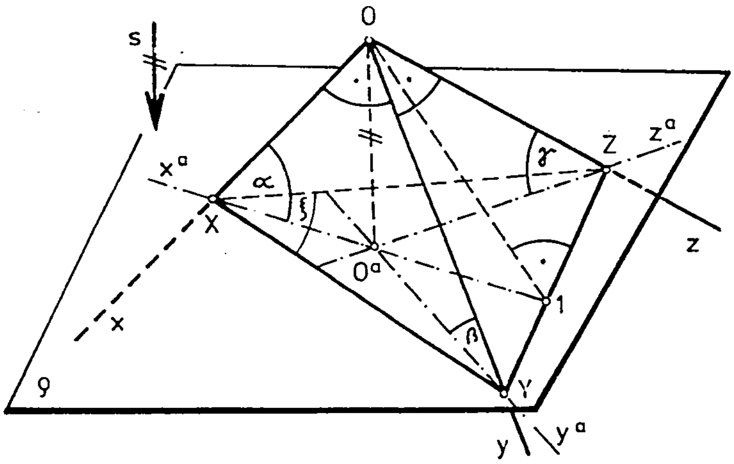
Poznámka. Analogicky můžeme též uvažovat B_2^a jako axonometrický průmět nárysu nebo B_3^a jako axonometrický průmět bokorysu bodu B místo B_1^a.

Průsečíky souřadnicových os s axonometrickou průmětnou označíme X, Y, Z, $X \equiv x \cap \rho, Y \equiv y \cap \rho, Z \equiv z \cap \rho$ a úhly α, β, γ jsou
$\alpha = \angle\, x\, \rho\;,\ \beta = \angle\, y\, \rho\;,\ \gamma = \angle\, z\, \rho\;.$

Trojúhelník XYZ nazveme axonometrickým trojúhelníkem, viz obrázek 5.3.

Pravoúhlá axonometrie je příkladem pravoúhlého a tím i rovnoběžného promítání, platí pro ni tedy všechny vlastnosti uvedené v 1. kapitole (1.1-1.8), kterou doporučujeme čtenáři prostudovat předem.

Pravoúhlá axonometrie je zvláštním typem obecné axonometrie, platí pro ni všechny vlastnosti uvedené ve 6. kapitole.



Obr.5.3

5.1 Vlastnosti pravoúhlé axonometrie

(1) Axonometrické průměty os $\mathbf{x^a}$, $\mathbf{y^a}$, $\mathbf{z^a}$ jsou výškami axonometrického trojúhelníka $\triangle\mathbf{XYZ}$, viz obrázek 5.4.

Důkaz

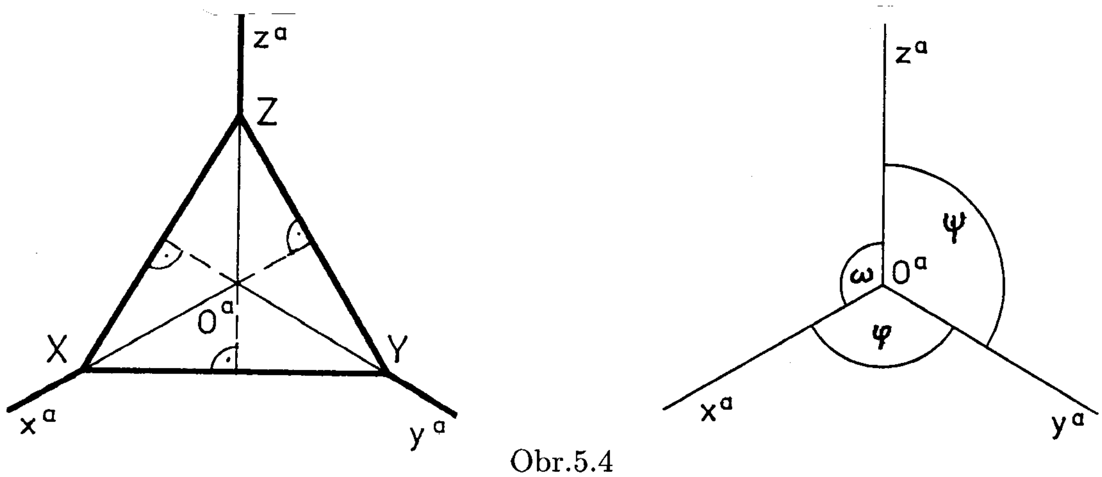
Z obrázku 5.3 je zřejmé, že platí $YZ \perp OO^a \wedge YZ \perp XO \Rightarrow YZ \perp (XOO^a)$,

$YZ \perp (XOO^a) \wedge x^a \subset (XOO^a) \Rightarrow YZ \perp x^a$.

Analogicky dokážeme, že $XZ \perp y^a, XY \perp z^a$.

(2) Axonometrický trojúhelník je ostroúhlý.

Důkaz. Dokážeme, že úhel $\xi = \angle YXZ$ je ostrý, viz obrázek 5.3. Z kosinové věty pro trojúhelník $\triangle XYZ$ plyne $|ZY|^2 = |XY|^2 + |XZ|^2 - 2\,|XY|\,|XZ|\cos\xi$. Z pravoúhlých trojúhelníků $\triangle XYO$, $\triangle XZO, \triangle YZO$ plyne $|ZY|^2 = |XY|^2 + |XZ|^2 - 2|OX|^2$. Porovnáním těchto vztahů dostaneme $|OX|^2 = |XY|\,|XZ|\cos\xi$ a tedy $\cos\xi > 0$. Úhel ξ je úhel v trojúhelníku $\triangle XYZ$ a musí být ostrý, $0 < \xi < 90°$.



Obr.5.4

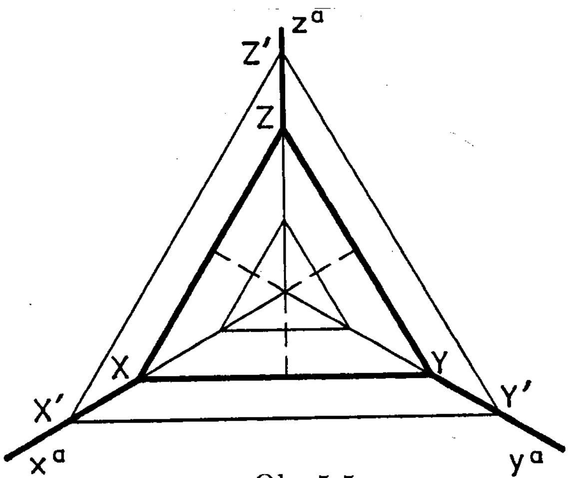
(3) Úhly φ, ψ, ω v osovém kříži mezi kladnými částmi os $\mathbf{x^a}, \mathbf{y^a}, \mathbf{z^a}$ jsou tupé $(90° < \varphi < 180°)$, viz obrázek 5.4.

Důkaz plyne z (1), (2).

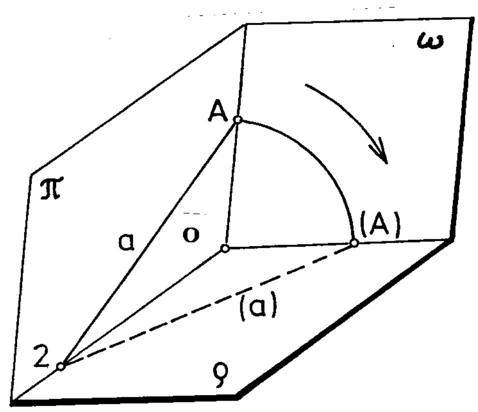
(4) Poměry zkrácení m, n, p velikostí úseček na osách x, y, z jsou dány vztahy $\mathbf{m} = \cos\alpha$, $\mathbf{n} = \cos\beta$, $\mathbf{p} = \cos\gamma$ **a platí pro ně** $\mathbf{0 < m < 1, 0 < n < 1, 0 < p < 1}$ **.**
Důkaz je zřejmý z obrázku 5.3.
(5) Pro poměry zkrácení platí $\mathbf{m^2 + n^2 + p^2 = 2}$.
Důkaz
$m^2 + n^2 + p^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 3 - (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = 2$.
Je zřejmé, že $\sin\alpha = cos(\pi/2 - \alpha)$, $\sin\beta = cos(\pi/2 - \beta)$, $\sin\gamma = cos(\pi/2 - \gamma)$ jsou směrové kosiny úsečky OO^a.

5.2 Úloha

je dán osový kříž $(O^a; x^a, y^a, z^a)$ tak, že úhly mezi kladnými částmi os x^a, y^a, z^a jsou tupé. Sestrojte axonometrický trojúhelník $\triangle XYZ$, viz obrázek 5.5.
Řešení
1) Zvolíme $X \in x^a$, 2) $Y : XY \perp z^a, Y \in y^a$, 3) $Z : XZ \perp y^a, Z \in z^a$.



Obr.5.5



Obr.5.6

Poznámka. Ke každému bodu $X \in x^a$ dostaneme trojúhelník $\triangle XYZ$ a tím i axonometrickou průmětnu ρ . Všechny tyto axonometrické průmětny jsou rovnoběžné. Pravoúhlé průměty do rovnoběžných průměten můžeme považovat za shodné.

5.3 Věta

Pravoúhlá axonometrie je určena jednoznačně osovým křížem $(\mathbf{O^a};\ \mathbf{x^a},\ \mathbf{y^a},\ \mathbf{z^a})$ splňujícím vlastnost (3) z 5.1 .
Důkaz plyne z Pohlkeovy věty (6. kapitola), nebudeme jej provádět.

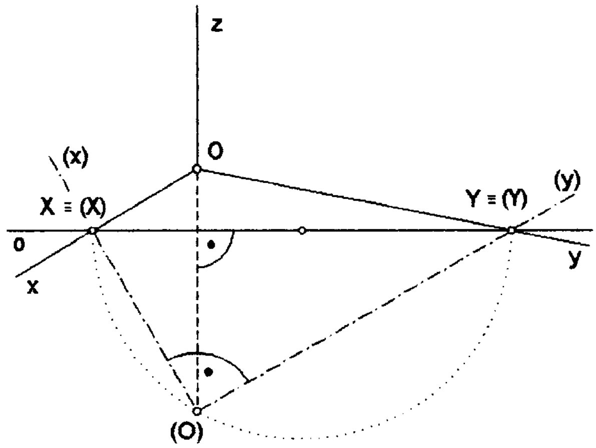
V následujících úlohách se budeme zabývat konstrukcemi útvarů ležících v souřadnicových nebo hlavních rovinách. Uvažovanou rovinu otočíme do axonometrické průmětny tj. do nákresny, tam konstrukci provedeme a výsledek otočíme zpět. Na náčrtu 5.6 vidíme otáčení roviny π do roviny ρ kolem osy $o, o \equiv \pi \cap \rho$.

Dráha bodu A, A $\in \pi$**, je kružnice ležící v rovině** ω **kolmé k ose otáčení o. Přímka a se s otočenou přímkou (a) protíná v pevném bodě 2 na ose otáčení.**

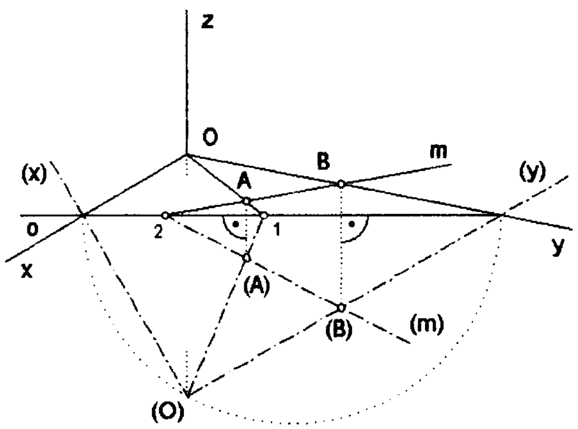
5.4 Konstrukce v souřadnicové rovině (x, y)

Rovinu (x, y) otočíme do axonometrické průmětny ρ , viz obrázek 5.7.
1) Osa otáčení je $o \equiv XY, o \equiv \pi \cap \rho$.
2) Otočíme počátek O do bodu (O) , $(O) : O(O) \perp o$, (O) leží na Thaletově kružnici nad průměrem XY $(O \equiv x \cap y, x \perp y)$, obr.5.7a.
3) Otočíme obecný bod $A \in (x, y)$ do bodu (A) tak, že

$(A) : A(A) \perp o,\ \ AO \cap o \equiv 1,\ \ 1 \in (A)(O)$, obr.5.7b.
Pro otočený bod (B) máme: $B(B) \parallel O(O), B \in y \Rightarrow (B) \in (y)$.
Pomocná přímka OA protíná osu o v pevném bodě 1 a rovina otáčení bodu A se zobrazí jako přímka $A(A) \perp o$.
Poznámka. **Indexy (a) dále vynecháme.**



Obr.5.7a

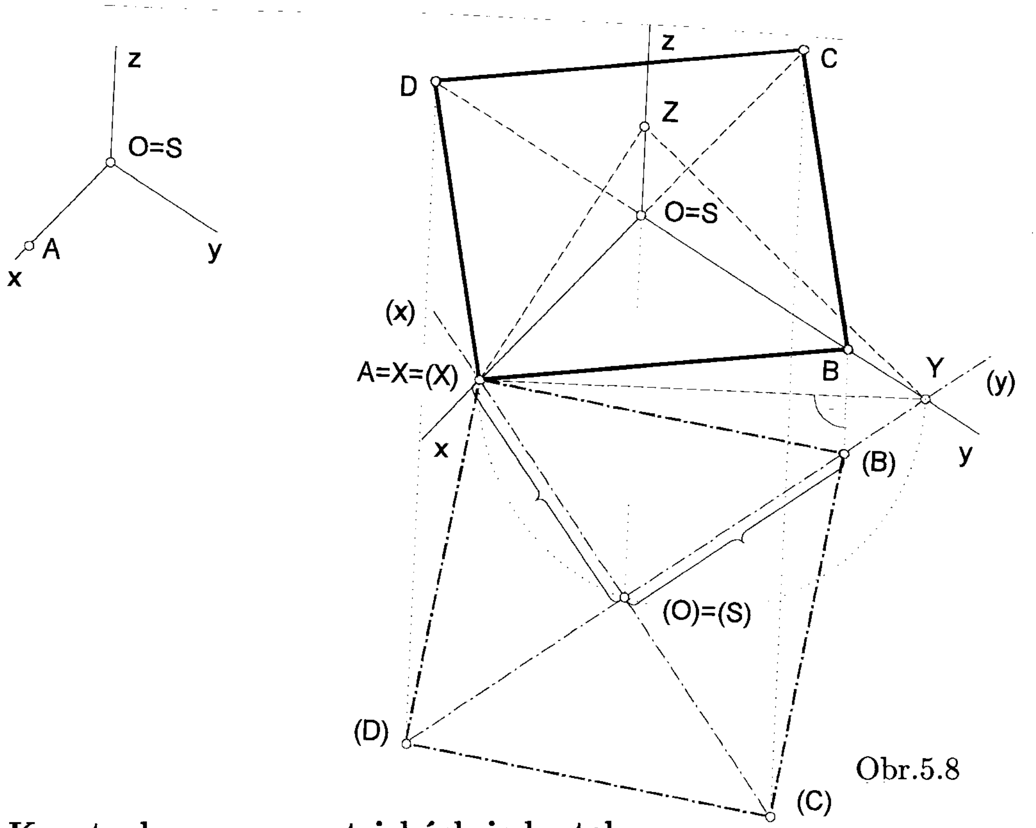


Obr.5.7b

Vztahy mezi otočenými útvary a průměty útvarů, viz obr.5.6 a 5.7
a) **Spojnice otočených bodů a jejich průmětů jsou kolmé k ose otáčení,** což plyne z toho, že leží v rovině otáčení kolmé k ose o otáčení.
V našem případě je $A(A) \parallel O(O) \parallel B(B) \parallel z$.
b) **Přímky $\mathbf{m}, (\mathbf{m})$ se protínají na ose otáčení, nebo jsou s ní rovnoběžné.** Na obrázku 5.7b je $AB \cap (A)(B) \equiv 2,\ \ 2 \in o$. Je zřejmé, že body $1, 2$ na ose otáčení jsou při pohybu pevné.
Poznámka. Analogicky otočíme další souřadnicové a hlavní roviny do axonometrické průmětny ρ.

5.5 Úloha

Pravoúhlá axonometrie je dána osovým křížem O, x, y, z. Sestrojte čtverec $ABCD$ v rovině (x, y), je-li dán jeho vrchol A a střed S.
Řešení, viz obr.5.8, $A \in x, S \equiv O$.
1) Sestrojíme axonometrický $\triangle XYZ$, podle 5.2. Zvolíme $X \equiv A$.
2) Otočíme rovinu (x, y) do průmětny ρ kolem XY ,
$(A) : A(A) \perp XY, (A) \in (x), (S) \equiv (O)$, podle 5.4.
3) V otočení sestrojíme čtverec $(A)(B)(C)(D)$ se středem (S) a vrcholem (A).
4) Bod (B) otočíme zpět do bodu B, $B : B(B) \perp XY, B \in y$. Podobně zbývající vrcholy čtverce.



Obr.5.8

5.6 Konstrukce axonometrických jednotek

Axonometrickými jednotkami j_x, j_y, j_z, rozumíme ax. průměty jednotkových úseček j ležících na osách x, y, z, viz 6.2.

Pravoúhlá axonometrie je dána axonometrickým trojúhelníkem XYZ , jednotku j si zvolíme.

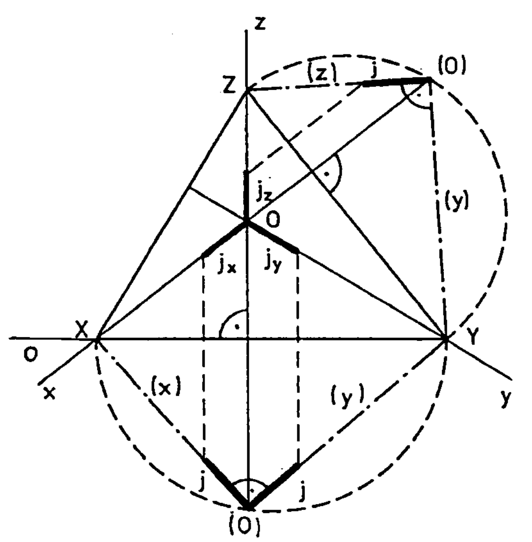
Řešení, viz obr.5.9.

1) Osový kříž je tvořen výškami $\triangle XYZ$, viz 5.1.

2) Otočíme rovinu (x, y) do průmětny ρ kolem XY , $O \Rightarrow (O)$, body X, Y jsou samodružné (pevné), otočené osy jsou $(x) \equiv (O)X, (y) \equiv (O)Y$, viz 5.4.

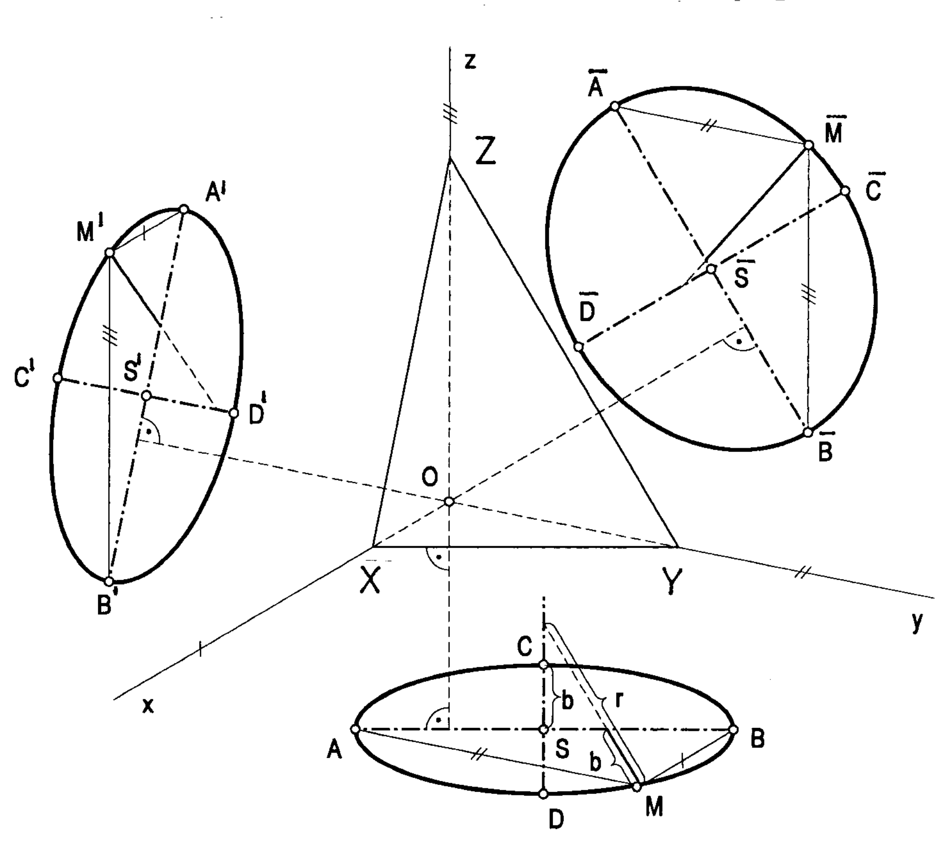
3) Podobně otočíme rovinu y, z a osy: $(y) \equiv (O)Y, (z) \equiv (O)Z$.

4) Jednotku j naneseme na otočené osy $(x), (y), (z)$ a otočíme zpět do j_x, j_y, j_z.



Obr.5.9

5.7 Zobrazení kružnice $k = (S; r)$ v souřadnicové rovině (x, y), viz obrázek 5.10 .
Řešení
1) Axonometrickým průmětem kružnice je elipsa (1.8.6), jejíž hlavní osa AB je kolmá k axonometrickému průmětu osy z.
Platí $AB \perp z$, protože $AB \subset \pi$ a $z \perp \pi$. V pravoúhlé axonometrii se pravý úhel $AB \perp z$ zachová, jelikož přímka AB je rovnoběžná s axonometrickou průmětnou $\rho = (XYZ)$.
2) Velikost hlavní osy je $\mid AB \mid = 2\ r$.
3) Průmětem bodu M kružnice k je bod elipsy , $M : MA \parallel y,\ MB \parallel x$, kde M je vrchol pravého úhlu nad průměrem AB a leží tedy na kružnici k .
4) Vedlejší osu elipsy omezíme proužkovou konstrukcí, viz 2.1.
Poznámka. Z podmínky 1) pro hlavní osu elipsy v (x, y) plyne $AB \parallel XY$.



Obr.5.10
Analogicky zobrazíme kružnici ležící v jiné souřadnicové rovině.

5.8 Úloha

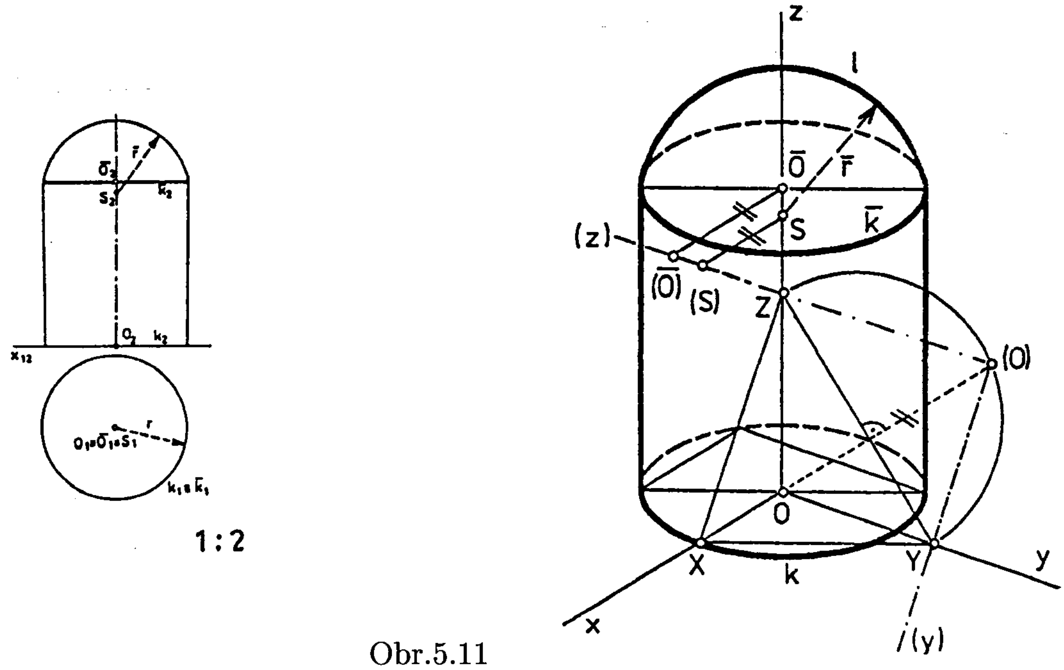
V pravoúhlé axonometrii (O; x, y, z) zobrazte objekt daný sdruženými průměty, viz obrázek 5.11. Umístění zvolte!

Řešení

1)Zobrazíme střed S kulové plochy a střed $\bar{O}$ kružnice $\bar{k}$ tzn., že vyneseme výšky na osu z v otočení (y,z) do ρ, viz (5.4) .

2) Zobrazíme kružnice $k = (O,r)$, $\bar{k} = (\bar{O},r)$, $k \subset \pi$, $\bar{k} \subset \bar{\pi}$, $\pi \parallel \bar{\pi}$, podle (5.7).

3) Kulová plocha $\kappa = (S,\bar{r})$ se zobrazí jako kruh, jehož hraniční kružnice $l = (S,\bar{r})$ má střed v průmětu středu S kulové plochy a její poloměr se rovná poloměru kulové plochy $\kappa = (S,\bar{r})$, viz obrázek 3.36.



Obr.5.11

5.9 Úloha

V pravoúhlé axonometrii $(O; x, y, z)$ zobrazte krychli $ABCD\bar{A}$ se stěnou $ABCD$ v (x,y) , znáte-li její hranu AB, viz obrázek 5.12 $(A \in x, B \equiv O)$.

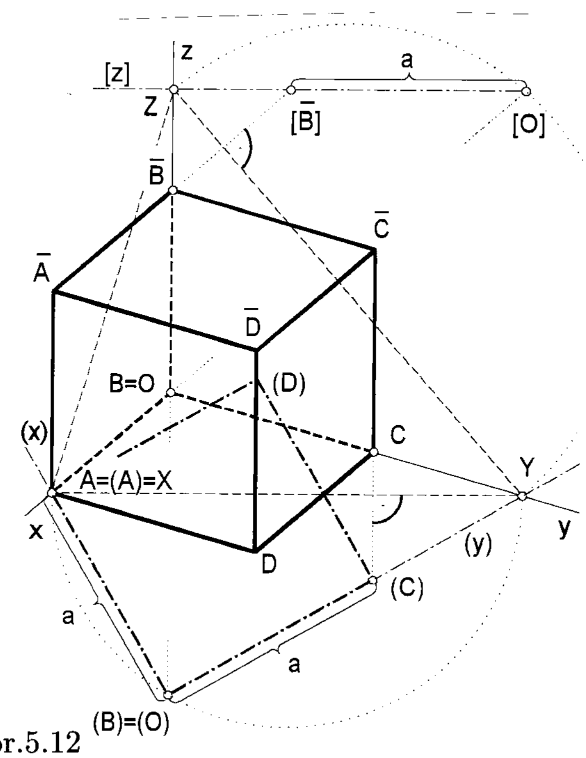
Řešení

1) Sestrojíme axonometrický $\triangle XYZ$, podle (5.2). Zvolíme $X \equiv A$.

2) Stěna krychle je čtverec o straně AB ležící v (x,y).

3) Otočíme rovinu (x,y) do roviny ρ kolem XY, pro otočené body (A) a (B) : $A \equiv (A) \equiv X, (A) \in (x), (B) \equiv (O)$. V otočení sestrojíme čtverec $(A)(B)(C)(D)$, $(C) \in (y)$, vybereme jedno ze dvou řešení.

4) (C) otočíme zpět $C(C) \perp XY, C \in y$.



Obr.5.12

5) V otočení roviny (x, z) do ρ kolem XZ naneseme délku a hrany na otočenou osu $(z), \mid (\bar{B})(O) \mid = a$ a vrchol horní podstavy $(\bar{B}), (\bar{B}) \in (z)$ otočíme zpět do bodu $\bar{B} \in z$. Svislé hrany krychle se promítají jako shodné úsečky s $B\bar{B}(B \equiv O)$ a rovnoběžné s osou z. Volíme $z_{\bar{B}} > 0$.

5.10 Typy pravoúhlé axonometrie

Označíme-li $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$ poměry zkrácení velikostí úseček na osách x, y, z, viz 5.1(4), dostaneme následující typy pravoúhlé axonometrie.

A) Isometrie : $\mathbf{m} = \mathbf{n} = \mathbf{p}$

Z tohoto vztahu a z 5.1 plyne $\varphi = \psi = \omega = \mathbf{120°}$ a trojúhelník $\triangle XYZ$ je rovnostranný, viz obrázek 5.13.

Pro poměry zkrácení $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$ v isometrii platí $\mathbf{m} = \mathbf{n} = \mathbf{p} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

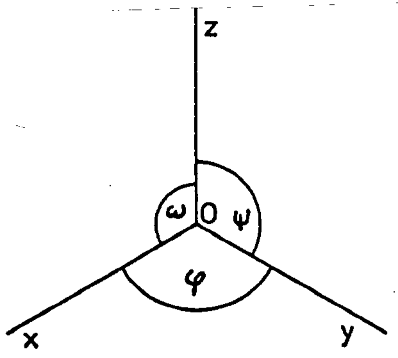
Toto tvrzení vyplývá ze vztahů $m^2 + n^2 + p^2 = 2$, $m : n : p = 1 : 1 : 1$.
Označíme-li $k = m = n = p$, $k > 0$, potom $3k^2 = 2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Z toho plyne, že v pravoúhlé isometrii se všechny souřadnice zkracují v poměru $\sqrt{\frac{2}{3}}$. To znamená značné zjednodušení pro zobrazování prostorových objektů.

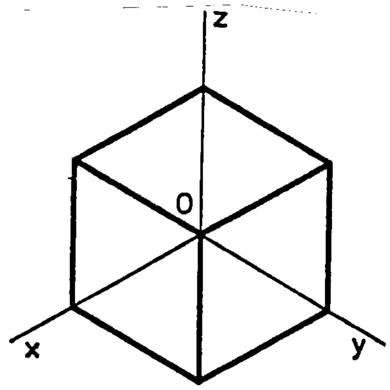
A1) Technická isometrie

V praxi zobrazování v isometrii zjednodušujeme ještě více a ve směru os vynášíme **nezkrácené souřadnice.** Zobrazujeme tedy útvar podobný a sice K - násobně zvětšený, kde $K = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Toto zvětšení nemá vliv na kvalitu zobrazení, pouze pokud chceme v této isometrii zobrazit **kružnici nebo kulovou plochu, je třeba poloměr násobit koeficientem podobnosti $\mathbf{K} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.**

Pravoúhlá isometrie se zkreslením $\mathbf{m} = \mathbf{n} = \mathbf{p} = \mathbf{1}$ se nazývá **technická isometrie** a je velmi oblíbena, přesto, že některé obrázky nejsou vždy nejnázornější, jak snadno nahlédneme z isometrie krychle na obrázku 5.14.



Obr.5.13

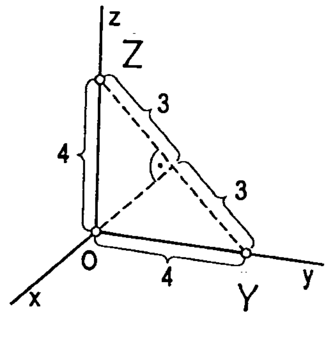


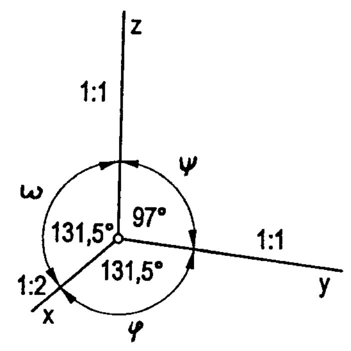
Obr.5.14

B) Dimetrie : $\mathbf{m} : \mathbf{n} : \mathbf{p} = \mathbf{1} : \mathbf{2} : \mathbf{2}$.

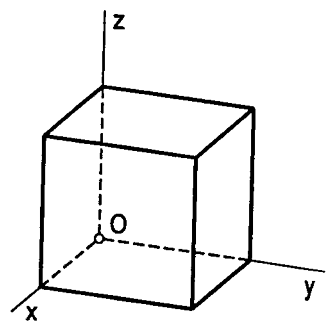
Označíme-li $k = m, 2k = n = p$, potom dosazením do vztahu $m^2 + n^2 + p^2 = 2$ dostaneme $k = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Poměry zkrácení pro tuto dimetrii jsou $\mathbf{m} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\mathbf{n} = \mathbf{p} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
Trojúhelník $\triangle XYZ$ je rovnoramenný a pro úhly φ, ψ, ω v osovém kříži platí
$\varphi = \omega = 131°25', \psi = 97°11'$.

V praxi nanášíme y, z - souřadnice nezkreslené, x - souřadnici poloviční a úhly v osovém kříži φ, ψ, ω upravíme na hodnoty $\psi = 97°$, $\varphi = 132°$, $\omega = 131°$. Zobrazujeme tím podobně jako v technické isometrii útvar K- násobně větší, $K = \frac{3}{4}\sqrt{2}$. Tato zjednodušená dimetrie se nazývá **technická dimetrie** . Konstrukce osového kříže pro technickou dimetrii je zřejmá z obrázku 5.15. Posuďte dimetrii krychle na obrázku 5.16.





Obr.5.15

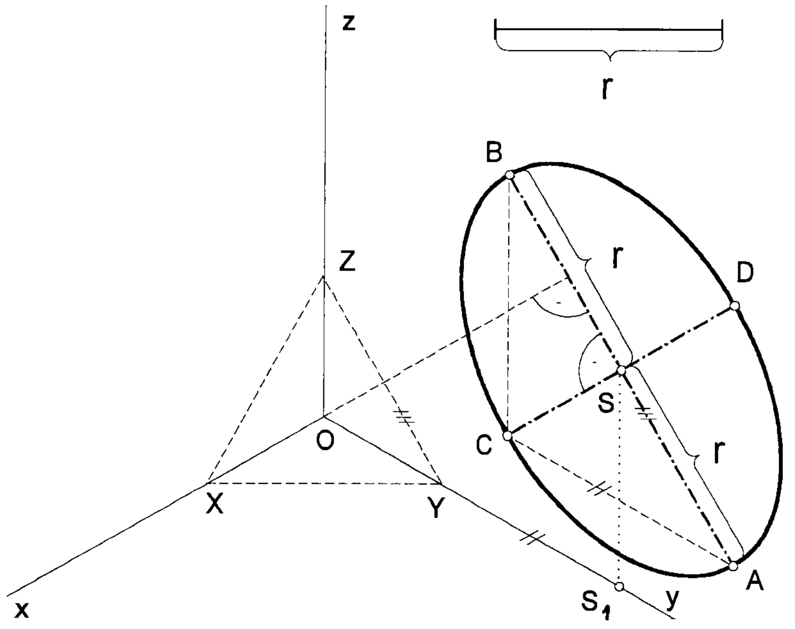


Obr.5.16

Poznámka
V technické praxi se pod pojmem isometrie (isometry) rozumí pravoúhlá isometrie, tedy nikoliv obecná isometrie z 6.8.

C) Trimetrie : poměry zkrácení $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$ velikostí úseček na osách x, y, z jsou navzájem různé, trojúhelník $\triangle XYZ$ je obecný ostroúhlý, úhly φ, ψ, ω v osovém kříži jsou navzájem různé.

5.11 Úloha - isometrie
V isometrii, dané osovým křížem $O, x, y, z, \varphi = \psi = \omega = 120°$, zobrazte kružnici $k = (S, r)$ v rovině (y, z). Je dán střed S axonometrií S, S_1 $(S_1 \in y)$ a poloměr $r = 3$.
Řešení, viz obr.5.17.
Isometrie kružnice v (y, z) je elipsa, viz 5.7.
Hlavní osa $\mathbf{AB} \parallel \mathbf{YZ}(\mathbf{AB} \perp \mathbf{x})$, $\mathbf{AB} = \mathbf{2r}$, vedlejší vrchol $C : CA \parallel y, CS \perp AB$. Osa x půlí úhel os $z, y \Rightarrow CB \parallel z$.



Obr.5.17

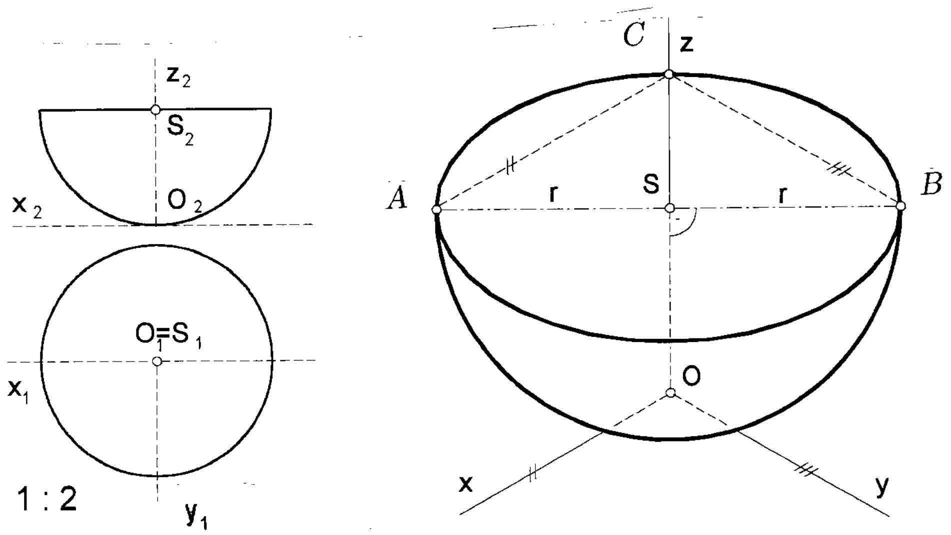
5.12 Úloha - isometrie

V isometrii, dané osovým křížem $O; x, y, z, \varphi = \psi = \omega = 120°$, zobrazte polokouli o středu S, která je dána sdruženými průměty, obr.5.18.

Řešení, viz obr.5.18.

1) Souřadnice středu násobíme koeficientem $k = \sqrt{2/3} = 0.816$ (přibližně).
2) Isometrie koule je kruh o středu S a poloměru r (skutečná velikost).
3) Isometrie kružnice v (x, y) je elipsa, viz 5.7.

Hlavní osa $AB \perp z (AB \parallel XY), AB = 2r$, vedlejší vrchol $C : CA \parallel x, CS \perp AB$.



Obr.5.18

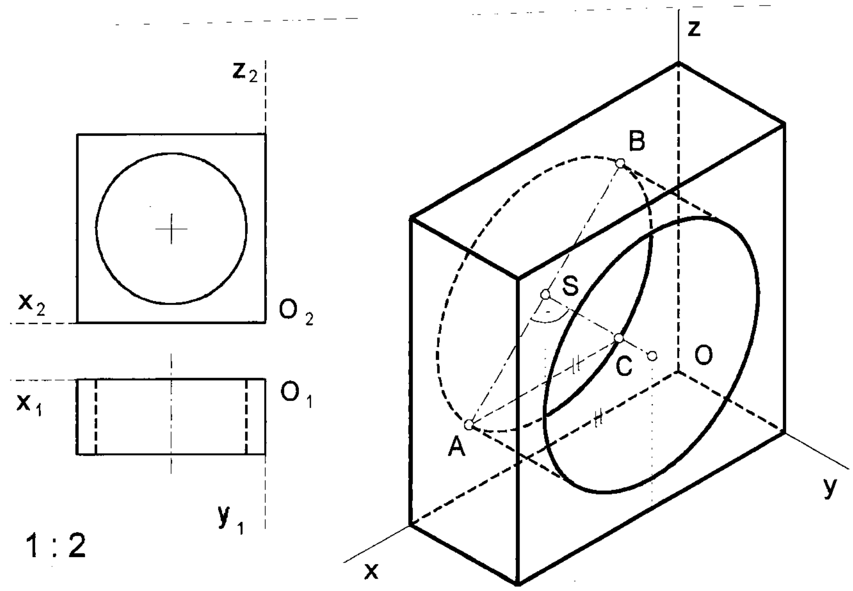
5.13 Úloha - isometrie

V isometrii, dané osovým křížem $O; x, y, z, \varphi = \psi = \omega = 120°$, zobrazte objekt daný sdruženými průměty, obr.5.19.

Řešení, viz obr.5.19.

1) Objekt se skládá z kvádru a válcové "díry".
2) Souřadnice důležitých bodů násobíme koeficientem $k = \sqrt{2/3} = 0.816$ (přibližně).
2) Isometrie kružnice v (x, z) (rovněž v rovině s ní rovnoběžné) je elipsa.

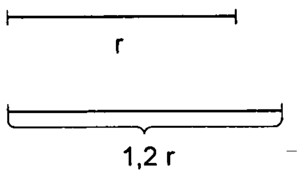
Hlavní osa elipsy $AB \perp y$ $(AB \parallel XZ), AB = 2r$, vedlejší vrchol $C : CA \parallel x, SC \perp AB$.

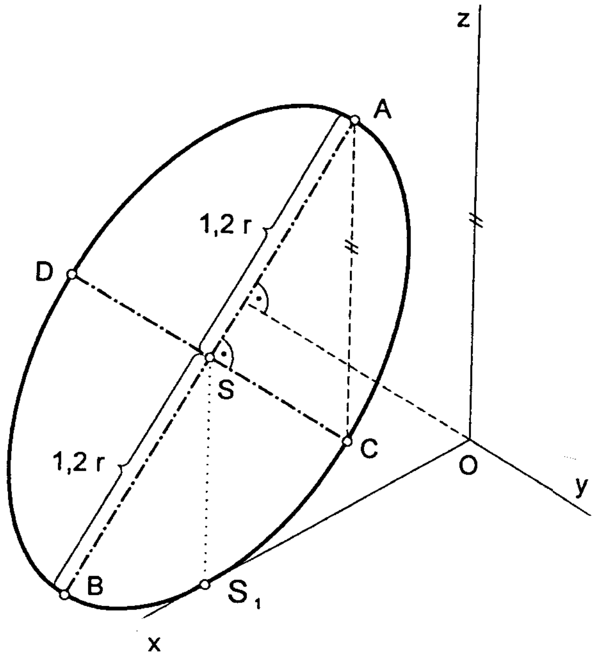


Obr.5.19

5.14 Úloha - technická isometrie

V technické isometrii, dané osovým křížem $O; x, y, z, \varphi = \psi = \omega = 120°$, zobrazte v rovině (x, z) kružnici se středem $S(4, 0, 3)$ a poloměrem $r = 3$.
Řešení, viz obr.5.20.
1) Souřadnice středu vyneseme ve skutečné velikosti, podle 5.10(A1).
2) Technická isometrie kružnice je elipsa. Hlavní osa AB :
$AB \perp y$ $(AB \parallel XZ), \mid AB \mid = K2r$, násobíme ji koeficientem $\mathbf{K} = \sqrt{\mathbf{3/2}} = \mathbf{1.2}$ (přibližně). Vedlejší vrchol elipsy $C : CA \parallel z, CS \perp AB$.

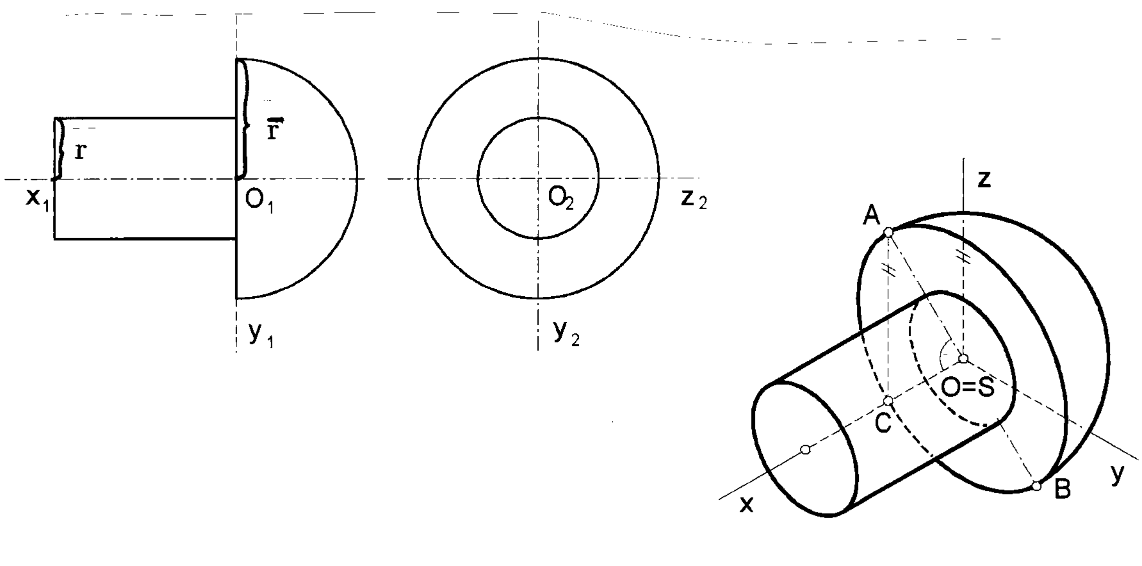




Obr.5.20

5.15 Úloha-technická isometrie

V technické isometrii, dané osovým křížem $O; x, y, z, \varphi = \psi = \omega = 120°$, zobrazte rotační objekt daný sdruženými průměty, obr.5.21.
Řešení, viz obr.5.21.
1) Objekt se skládá z polokoule a rotačního válce, souřadnice důležitých bodů vyneseme ve skutečné velikosti.
2) Technická isometrie koule je kruh o středu S a poloměru $\mathbf{K}\ \bar{\mathbf{r}}$, $\mathbf{K} = \sqrt{\mathbf{3/2}}$.
3) Technická isometrie kružnice v rovině (y, z) je elipsa,
hlavní osa $AB \perp x$ $(AB \parallel YZ), \mid \mathbf{AB} \mid = \mathbf{K2\bar{r}}$, vedlejší vrchol $C : CA \parallel z, CS \perp AB$.



$\mathbf{SA = K\ \bar{r}}$!!!!!   Obr.5.21 $\mathbf{K} = \sqrt{\mathbf{3/2}} = 1.2$

5.16 Úloha

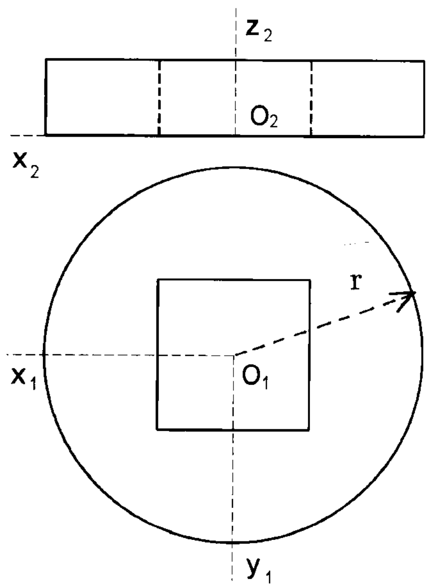
V technické isometrii, dané osovým křížem $O; x, y, z, \varphi = \psi = \omega = 120°$, zobrazte objekt daný sdruženými průměty, obr.5.22.

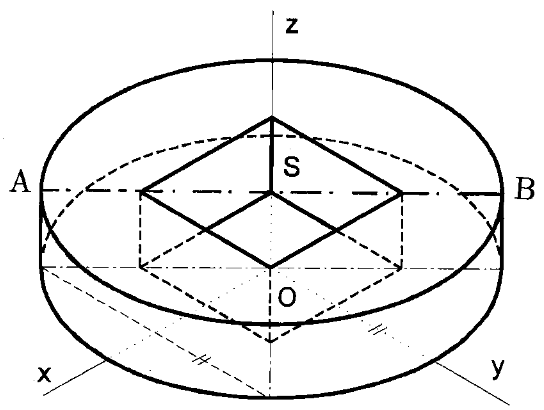
Řešení, viz obr.5.22.

Objekt se skládá z válce a "díry" ve tvaru kvádru. Zmíněná tělesa zobrazíme snadno, použijeme-li modifikované kroky 1) a 3) z řešení úlohy **5.13.**

Uvědomte si: a) Hrany kvádru jsou rovnoběžné s osami souřadnic, zobrazí se tedy ve skutečné velikosti a totéž platí pro výšku válce.

b) Podstavné kružnice válce se zobrazí jako elipsy, pro hlavní osu AB **horní elipsy platí** $AB \perp z, |AB| = K\ 2r.$



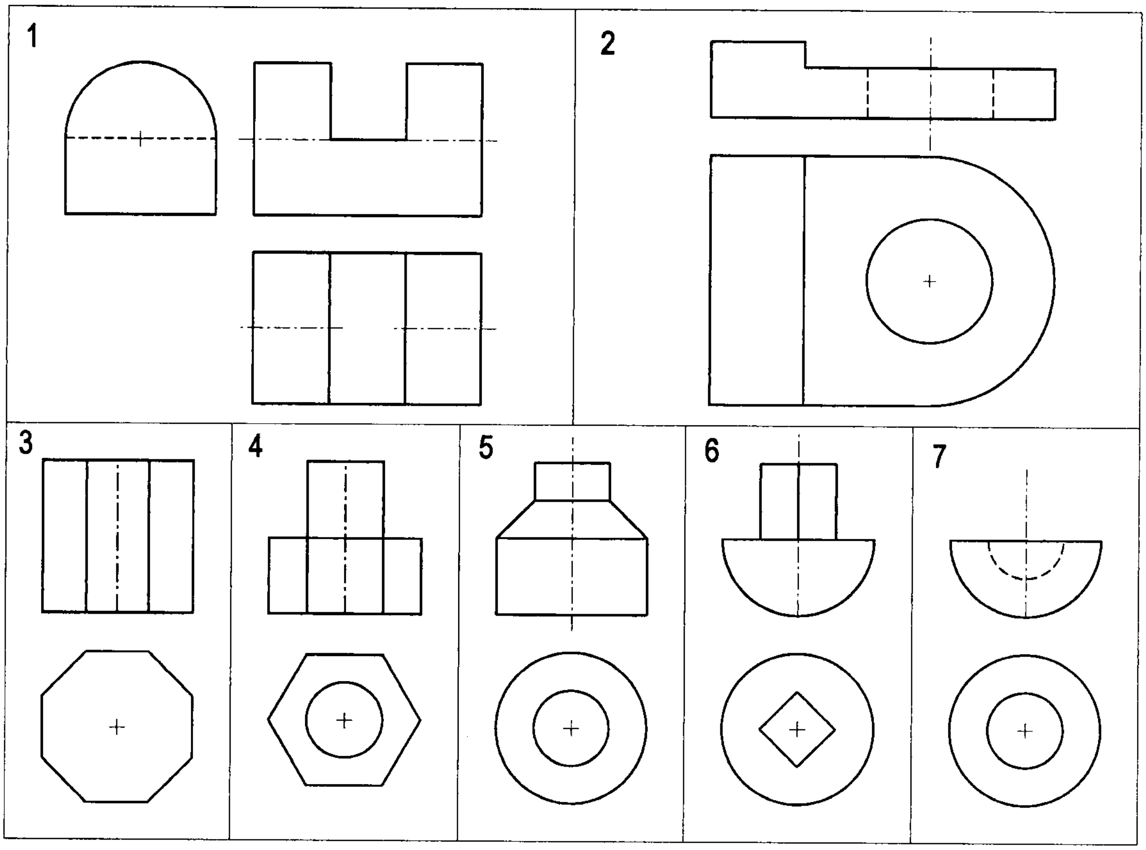


$|AB| = K2r$

$K = \sqrt{3/2}$

Obr.5.22

Cvičení
V technické isometrii zobrazte objekty dané sdruženými průměty, viz obr.5.23.



Obr.5.23