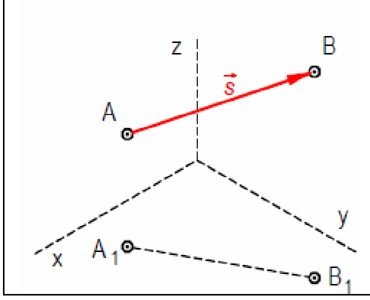
Analytická geometrie v E_3 - přímka a rovina

1) Vektor

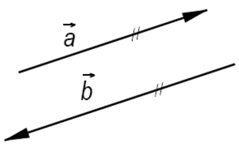


Vektor $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3) = \vec{B} - \vec{A}$

Velikost $\|\vec{s}\| = \sqrt{s_1^{\,2} + s_2^{\,2} + s_3^{\,2}}$

Příklad: *A[2,1,3], B[1,3,5]* $\Rightarrow$ $\vec{s}$ = ***(-1,2,2)***

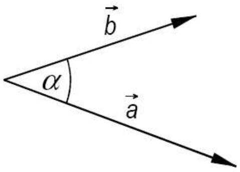
$\|\vec{s}\| = \sqrt{1+4+4} = \mathbf{3}$



Závislé ("rovnoběžné") nenulové **vektory**

$\vec{b} = k.\vec{a}$

Příklad: $\vec{a} = (-1,2,-3)$, $\vec{b} = (2,-4,6)$ $\Rightarrow$ $\vec{b} = -2.\vec{a}$ $\Rightarrow$ **závislé vektory**



Skalární součin nenulových vektorů

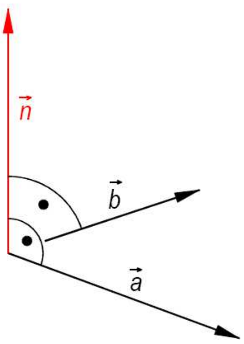
$$\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos\alpha$$

$$\vec{a}.\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b} \text{ - kolmé vektory}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|}, \quad \alpha = \text{úhel vektorů}$$

Příklad 1: $\vec{a} = (2,-4,2)$, $\vec{b} = (-1,2,2)$ $\Rightarrow$ $\vec{a}.\vec{b}$ = ***-6***

Příklad 2: $\vec{a} = (2,-4,2)$, $\vec{b} = (-1,2,?)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$ $\Rightarrow$ $\vec{b}$ = ***(-1,2,5)***



Vektorový součin nenulových vektorů

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_2.b_3 - a_3.b_2, -[a_1.b_3 - a_3.b_1], a_1.b_2 - a_2.b_1)$$

$$\boldsymbol{\vec{n} \perp (\vec{a}, \vec{b})}$$

Příklad: $\vec{a} = (2,4,3)$, $\vec{b} = (1,2,2)$, $\vec{a} \times \vec{b} = ?$

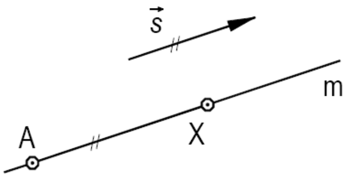
$$\begin{aligned} \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = &\ (2,4,3) \\ &\ \underline{\text{x}\,(1,2,2)} \\ &\ \mathbf{(2,-1,0)} \end{aligned}$$

$\vec{n}.\vec{a} = (2,-1,0).(2,4,3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \perp \vec{a}$

$\vec{n}.\vec{b} = (2,-1,0).(1,2,2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \perp \vec{b}$

2) Přímka

Parametrická rovnice přímky



určené bodem A a nenulovým směrovým vektorem $\vec{s}$:

$$X = A + t.\vec{s},\ t \in R \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= x_A + t.s_1 \\ y &= y_A + t.s_2 \quad t \in (-\infty, \infty) \\ z &= z_A + t.s_3 \end{aligned}$$

Poznámka: Jedna přímka má nekonečně mnoho tvarů rovnic závislých na volbě bodu a směrového vektoru.

Příklad 1: $m \equiv AB,\ \ A[1,-1,2],\ B[3,3,0]$

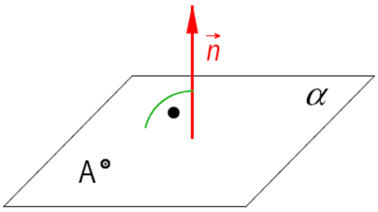
$\boldsymbol{X = [1,-1,2] + (2,4,-2)t,\ t \in (-\infty,+\infty)}$

$X = [1,-1,2] + (1,2,-1)t,\ t \in (-\infty,+\infty)$

Příklad 2: rovnice úsečky *AB*, polopřímky *AB*

3) Rovina

Obecná rovnice roviny α



$a.x + b.y + c.z = d\ ,\ (a,b,c) = \vec{n}$ je normálový vektor roviny **α**

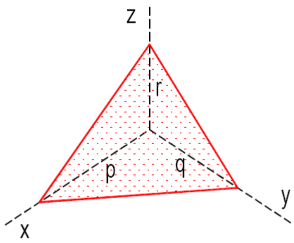
Příklad 1: $\alpha \equiv A[1,2,-1], \vec{n}(2,-1,3)$

$\alpha :\ 2x - y + 3z = -3$

Příklad 2: $\alpha \equiv A[0,-1,1], B[1,0,2], C[1,1,5]$

$(\vec{B} - \vec{A})x(\vec{C} - \vec{A}) = (2,-3,1)\ ,\ \alpha : 2x - 3y + z = 4$

Úsekový tvar rovnice roviny α ⇒ náčrtek



$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

Příklady: Načrtněte rovinu určenou rovnicí :

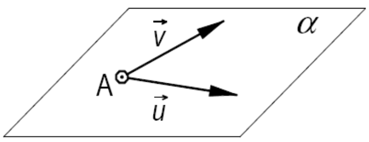
a) $2x + 3y + 6z = 6$ b) $4x - 3y + 6z = 12$

c) $3y + 2z = 6$ d) $z = 3$

e) $-x + y - z = 2$

Poznámka: v rovnici chybí jedna proměnná ⇒ rovina je rovnoběžná s příslušnou osou

Parametrická rovnice roviny α

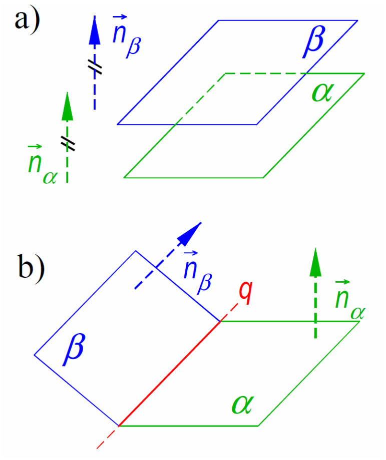


$X = A + t.\vec{u} + w.\vec{v}\ ,\ \ t \in R, w \in R$

Převod na obecnou rovnici roviny:

$(a,b,c) = \vec{u} \times \vec{v}\ ,\ \ a.x + b.y + c.z = d\ ,\ d = a.x_A + b.y_A + c.z_A$

4) Polohové úlohy



<u>Dvě roviny α a β</u>

a) $\vec{n}_\alpha = k.\vec{n}_\beta$ (závislé normálové vektory) $\Rightarrow$ rovnoběžné roviny

(úprava rovnic na totožný tvar $\Rightarrow$ totožné roviny)

b) $\vec{n}_\alpha \neq k.\vec{n}_\beta$ (nezávislé normálové vektory) $\Rightarrow$ různoběžné roviny

(řešením soustavy rovnic rovin je rovnice průsečnice $\boldsymbol{q}$)

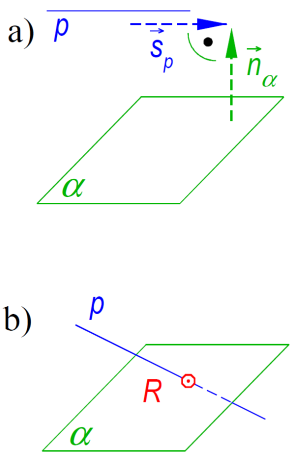
<u>*Poznámka*</u>: $\vec{n}_\alpha.\vec{n}_\beta = 0$ (kolmé vektory) $\Rightarrow \alpha \perp \beta$

<u>*Příklad 1*</u>: $\alpha \equiv 2x - y + z = 1$, $\beta \equiv -4x + 2y - 2.z = 2$

<u>*Příklad 2*</u>: $\alpha \equiv 2x + y + z = 3$, $\beta \equiv x - y + 2z = 0$

<u>*Příklad 3*</u>: $x=2,\ y=3$

[1) $\alpha // \beta,\ \alpha \neq \beta$ 2) různoběžné, průsečnice $q \equiv X = [1,1,0] + (-1,1,1).t$ 3) ?]



<u>Přímka *p* a rovina α</u>

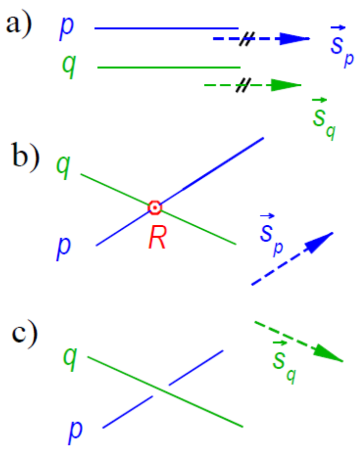
a) $\vec{s}_p.\vec{n}_\alpha = 0$ (kolmé vektory) $\Rightarrow$ přímka rovnoběžná s rovinou nebo $p \in \alpha$

b) $\vec{s}_p.\vec{n}_\alpha \neq 0$ $\Rightarrow$ přímka různoběžná s rovinou

Nebo početně řešením soustavy rovnic :

- žádné řešení $\Rightarrow$ $p // \alpha$
- nekonečně mnoho řešení $\Rightarrow$ $p \subset \alpha$
- jediné řešení (průsečík $\boldsymbol{R}$) $\Rightarrow$ $p \wedge \alpha$

<u>*Příklad*</u>: $p \equiv X = [1,1,1] + (2,1,-1)t$, $\alpha \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0$ [$p // \alpha,\ p \notin \alpha$]



<u>Dvě přímky *p, q*</u>

a) $\vec{s}_p = k.\vec{s}_q$ (závislé vektory) $\Rightarrow$ rovnoběžné přímky

\+ řešení soustavy rovnic : 0 řešení $\Rightarrow$ $p // q$, *různé*

∞ řešení $\Rightarrow$ $p \equiv q$

(nebo : určující bod jedné přímky neleží / leží na druhé)

b,c) $\vec{s}_p \neq k.\vec{s}_q$ (nezávislé vektory) $\Rightarrow$ přímky různých směrů

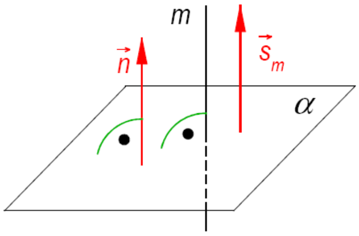
\+ řešení soustavy rovnic : 1 řešení $\Rightarrow$ b) $p \wedge q$ (průsečík $\boldsymbol{R}$)

0 řešení $\Rightarrow$ c) mimoběžné přímky

<u>*Příklad*</u>: $p \equiv X = [1,2,3] + (1,2,-3)t$, $q \equiv Y = [2,4,0] + (-2,-4,6)w$

[$p \equiv q$]

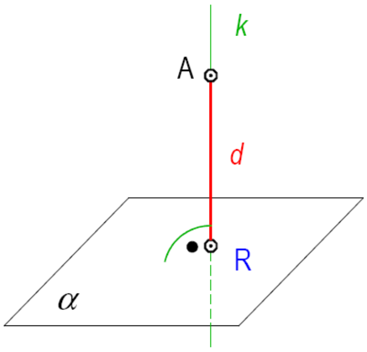
5) Metrické úlohy



Kolmost přímky *m* a roviny α

Směrový vektor $\vec{s}_m$ přímky a normálový vektor $\vec{n}$ roviny α jsou závislé

$$\vec{s}_m = k.\vec{n}$$



Vzdálenost *d* bodu *A* od roviny α

1) $k \perp \alpha$, $A \in k$

2) $R \equiv k \cap \alpha$

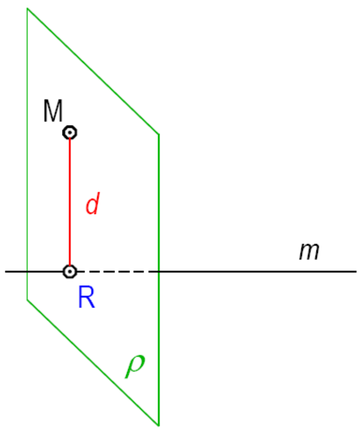
3) $d = \|AR\|$

Příklad: $A[3,-1,7]$, $\alpha: 2x - 3y + 4z = 8$

1) $k: X = [3,-1,7] + (2,-3,4)t$

2) $R = [1,2,3]$ (pro $t = -1$)

3) $d = \sqrt{(4+9+16)} = \sqrt{29}$



Vzdálenost *d* bodu *M* od přímky *m*

1) $\rho \perp m$, $M \in \rho$

2) $R \equiv m \cap \alpha$

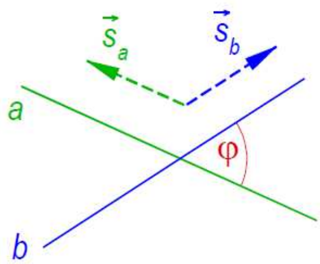
3) $d = \|AR\|$

Příklad: $M[2,0,-3]$, $m: X = [9,0,5] + (4,-1,1)t$

1) ρ: $4x - y + z = 5$

2) $R = [1,2,3]$ (pro $t = -2$)

3) $d = \sqrt{(1+4+36)} = \sqrt{41}$



Odchylka přímek

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{s}_a.\vec{s}_b|}{\|\vec{s}_a\| . \|\vec{s}_b\|}, \quad \varphi \in \langle 0°, 90° \rangle$$

Poznámka1: Je li úhel směrových vektorů tupý, pomocí absolutní hodnoty v čitateli dostaneme úhel vedlejší (doplněk do $180°$).

Poznámka2: Odchylku rovin určíme jako odchylku normál, odchylku přímky a roviny určíme jako doplněk do $90°$ odchylky přímky a normály roviny.

6) Úlohy k procvičení

Příklad 1: Určete rovnice souřadnicových os a souřadnicových rovin.

Příklad 2: Určete rovnice přímek *p* ve směru souřadnicových os jdoucích bodem M [1,2,3] a rovnice hlavních rovin σ jdoucích bodem M [1,2,3]. Výsledek doprovoďte náčrtkem.

Příklad 3: Určete rovnici roviny σ jdoucí bodem *S[1,0,1]* rovnoběžně s rovinou $x+2z=2$.

Příklad 4: Určete rovnici roviny σ určené přímkou *m* { *A[1,2,3]*, $\vec{s}$ *(1,2,-3)* } a bodem *B[3,2,4]*.

Příklad 5: Určete rovnici roviny souměrnosti úsečky *A[0,1,2] B[2,-3,4]*.

Příklad 6: Určete odchylku φ přímek $X = [1,2,3] + (-2,1,3)t$, $Y = [3,4,5] + (3,2,-1)w$.

Příklad 7: Určete odchylku φ rovin $2x + y - 2z = 6$, $3y + 4z = 7$.

Příklad 8: Určete odchylku φ přímky $X = [1,1,3] + (4,1,3)t$ od roviny $3x + 4y - z = 8$.

Výsledky

Příklad 1: osa *x* : $X = [0,0,0] + (1,0,0)t$ osa *y* : $X = [0,0,0] + (0,1,0)t$ osa z : $X = [0,0,0] + (0,0,1)t$
rovina (*x,y*) : *z=0*, rovina (*x,z*) : *y=0*, rovina (*y,z*) : *x=0*

Příklad 2: $p_x \,//\, x :\; X = [1,2,3] + (1,0,0)t$, $p_y \,//\, y :\; X = [1,2,3] + (0,1,0)t$, $p_z \,//\, z :\; X = [1,2,3] + (0,0,1)t$
$\sigma_{xy} //(x,y) : z=3$, $\sigma_{xz} //(x,z) : \mathrm{y}=2$, $\sigma_{yz} //(y,z) : \mathrm{x}=1$
Poznámka: Pro parametr *t* v příkladech *1* a *2* platí $t \in (-\infty, \infty)$

Příklad 3: $\sigma \;:\; x + 2z - 3 = 0$

Příklad 4: $\vec{n}_\sigma = \vec{s}_m \times (\vec{B} - \vec{A}) = (1,2,-3) \times (2,0,1) = (2,-7,-4) \quad \Rightarrow \sigma :\; 2x - 7y - 4z + 24 = 0$

Příklad 5: střed $S = \dfrac{A+B}{2} = [1,-1,3]$, $\vec{n}_\sigma = \vec{s}_{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (2,-4,2) \Rightarrow 2x - 4y + 2z = 12$
$\sigma \;: x - 2y + z - 6 = 0$

Příklad 6:
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{s}_a . \vec{s}_b|}{\|\vec{s}_a\| . \|\vec{s}_b\|} = \frac{|-7|}{\sqrt{14}.\sqrt{14}} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \varphi = 60°$$

Příklad 7:
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_\alpha . \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| . \|\vec{n}_\beta\|} = \frac{|3-8|}{\sqrt{9}.\sqrt{25}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 70{,}5°$$

Příklad 8:
$$\cos(\varphi') = \frac{|\vec{s} . \vec{n}|}{\|\vec{s}\| . \|\vec{n}\|} = \frac{12+4-3}{\sqrt{24}.\sqrt{24}} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi' = 60° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 90° - \varphi' = 30°$$