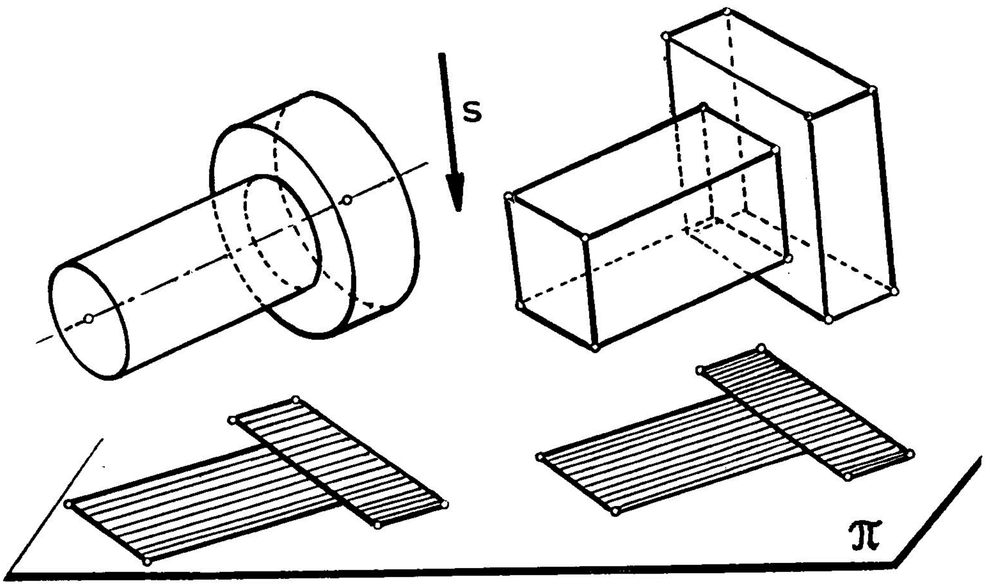
3. MONGEOVO PROMÍTÁNÍ

Rovnoběžné promítání na jednu průmětnu nám umožňuje zobrazit prostorový objekt na rovinu. Toto zobrazení není vzájemně jednoznačné, to znamená, že k obrazu (průmětu) objektu neumíme jednoznačně určit objekt v prostoru, obr. 3.1.

V technické praxi potřebujeme vyrobit součástku na základě technického výkresu (průmětu). K dosažení jednoznačného přiřazení mezi body technického výkresu a body prostoru užijeme více průmětů. Nejběžnějším způsobem je pravoúhlé promítání na dvě navzájem kolmé průmětny - Mongeovo promítání.



Obr.3.1

3.1 Kartézský souřadnicový systém, obr.3.2.

Tři navzájem kolmé roviny tvoří **pravoúhlý trojhran**.

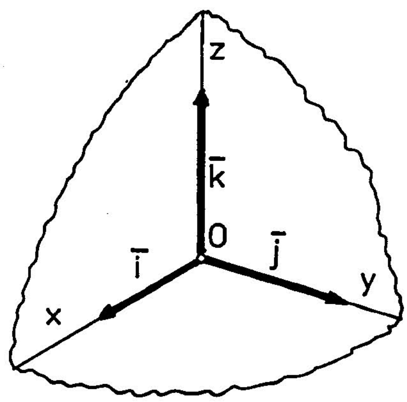
Označíme:

O.. společný bod rovin .... počátek souřadnic

x, y, z .... průsečnice rovin .... osy souřadnic

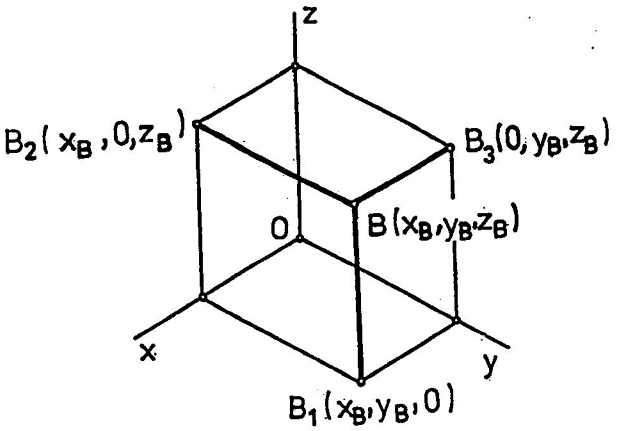
$(x, y), (y, z), (x, z)$...... souřadnicové roviny

j .... jednotka

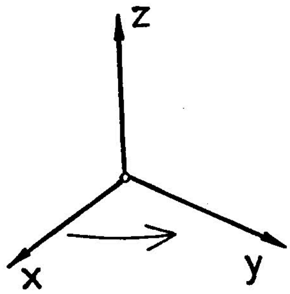


Obr.3.2

Na všechny souřadnicové osy umístíme jednotkové vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Tím získáme **kartézský souřadnicový systém** určený počátkem O a třemi ortonormálními vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Poloha bodu B v prostoru, obr. 3.3, je určena trojicí čísel x_B, y_B, z_B - jsou to orientované vzdálenosti bodu B od souřadnicových rovin vyjádřené v jednotce j. Trojici (x_B, y_B, z_B) nazýváme kartézskými souřadnicemi bodu B. Jsou to souřadnice vektoru $(B - O)$ v bázi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. V technické praxi se užívá pravotočivý kartézský systém, obr. 3.4 v nadhledu.



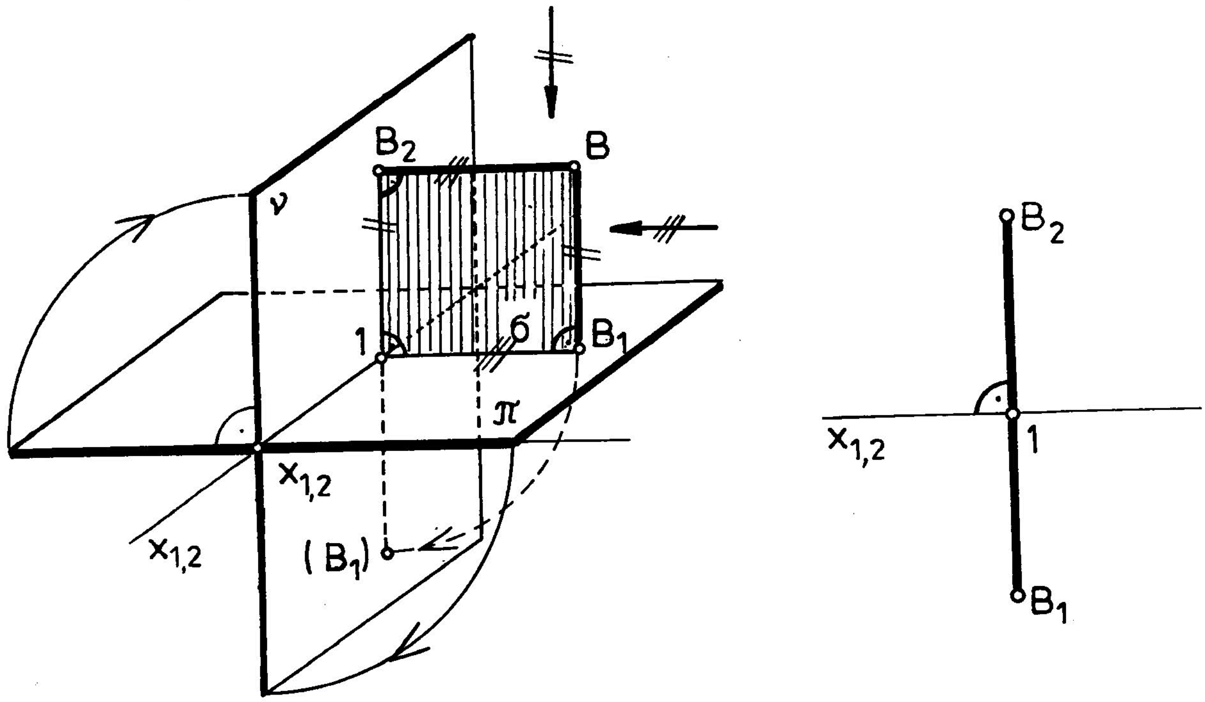
Obr.3.3



Obr.3.4

3.2 Mongeovo promítání, základní pojmy

Mongeovo promítání je určeno dvěma k sobě kolmými průmětnami a to půdorysnou π (ve vodorovné poloze) a nárysnou ν (ve svislé, obvykle průčelné poloze). Průsečnice $x_{1,2} \equiv \pi \cap \nu$ se jmenuje základnice, obr. 3.5.



Obr.3.5

Bod B v prostoru zobrazíme tak, že jej pravoúhle promítneme do nárysny, dostaneme nárys bodu B , značíme B_2. Potom pravoúhle promítneme bod B do půdorysny, dostaneme půdorys bodu B, označíme B_1. Půdorysnu otočíme kolem základnice do nárysny a tu ztotožníme s nákresnou (sešit). V nákresně tím získáme dvojici (B_1), B_2, kterou nazveme sdružené průměty bodu B a dále označíme B_1, B_2.

3.3 Věta

a) Spojnice sdružených průmětů B_1 B_2, $(B_1 \not\equiv B_2)$, je kolmá k základnici.

b) Přiřazení mezi body v prostoru a sdruženými průměty je vzájemně jednoznačné

$$B \rightleftarrows B_1\ ,\ B_2\ .$$

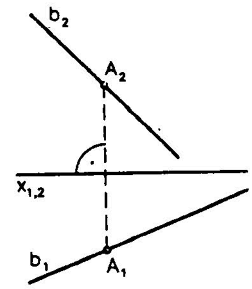
Důkaz. Je zřejmé, obr. 3.5, že promítací přímky bodu B tvoří rovinu σ , která je kolmá k základnici x, neboť $BB_1 \perp \pi$, $BB_2 \perp \nu$ a tedy $BB_1 \perp x$ a $BB_2 \perp x$. Z kolmosti $x \perp \sigma$ plyne $x \perp B_1 1$ a $x \perp B_2 1$, kde $1 \equiv \sigma \cap x$.

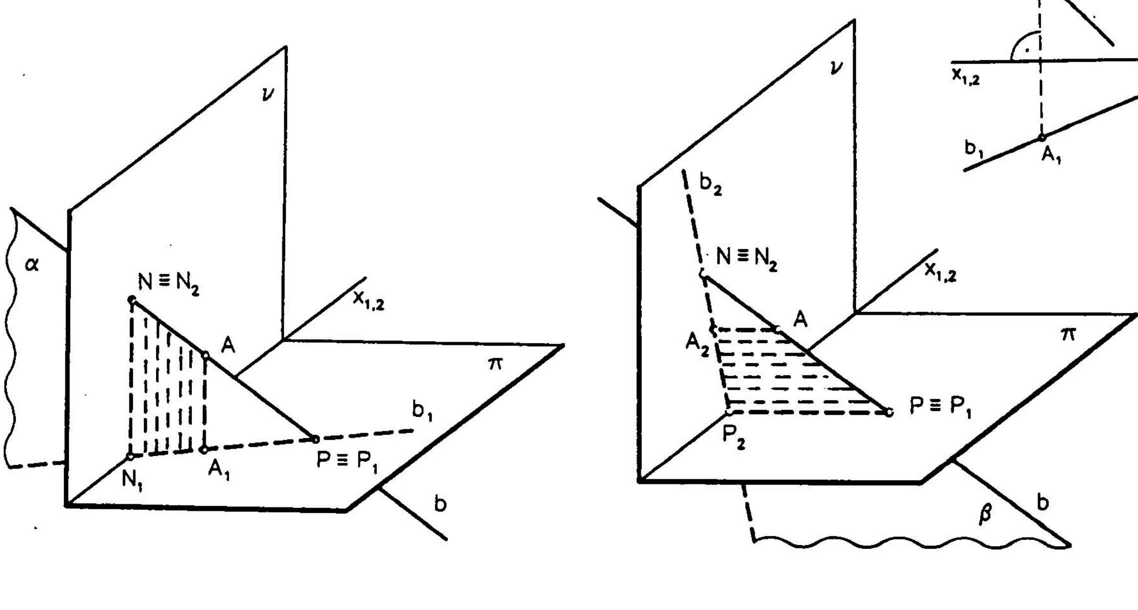
Snadno nahlédneme, že příslušné promítací přímky vedené půdorysem B_1 a nárysem B_2 leží v σ a jsou tedy různoběžné.

Poznámka. Spojnice sdružených průmětů B_1 B_2 se nazývá ordinála.

3.4 Průměty základních útvarů

Sdružené průměty přímky $b, (b \not\perp x)$, jsou tvořeny dvojicí přímek a to půdorysem b_1 a nárysem b_2 přímky b , obr. 3.6.



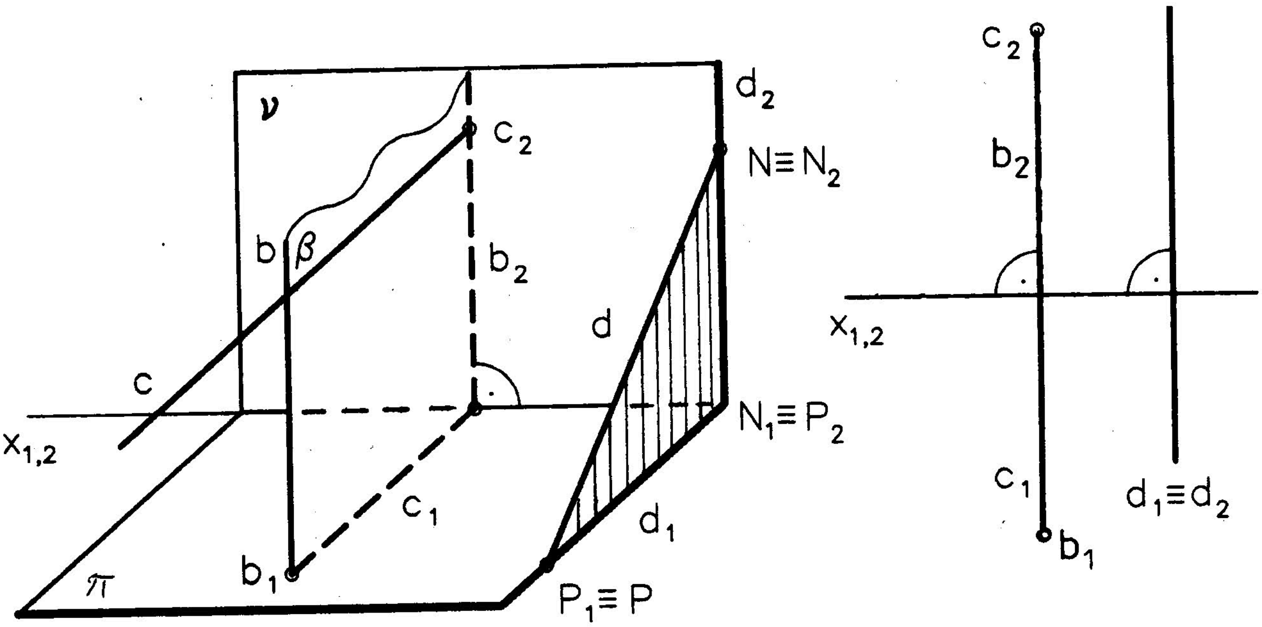


Obr.3.6

Poznámka. Sdružené průměty b_1, b_2 přímky určují přímku b v prostoru jednoznačně, vyloučíme-li případ, kdy $b_1 \equiv b_2$ a $b_1 \perp x_{1,2}$.

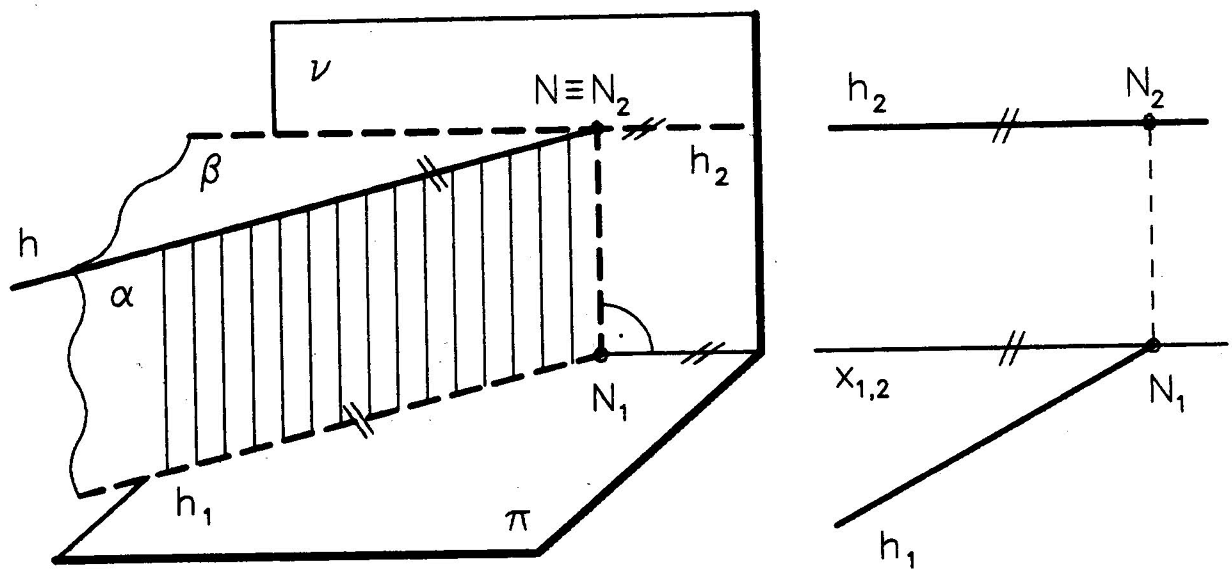
Zvláštní polohy přímky, obr. 3.7, 3.8, 3.9.

$b \perp \pi$ $\quad$ $c \perp \nu$ $\quad$ $d \perp x, (d \not\perp \pi, d \not\perp \nu)$



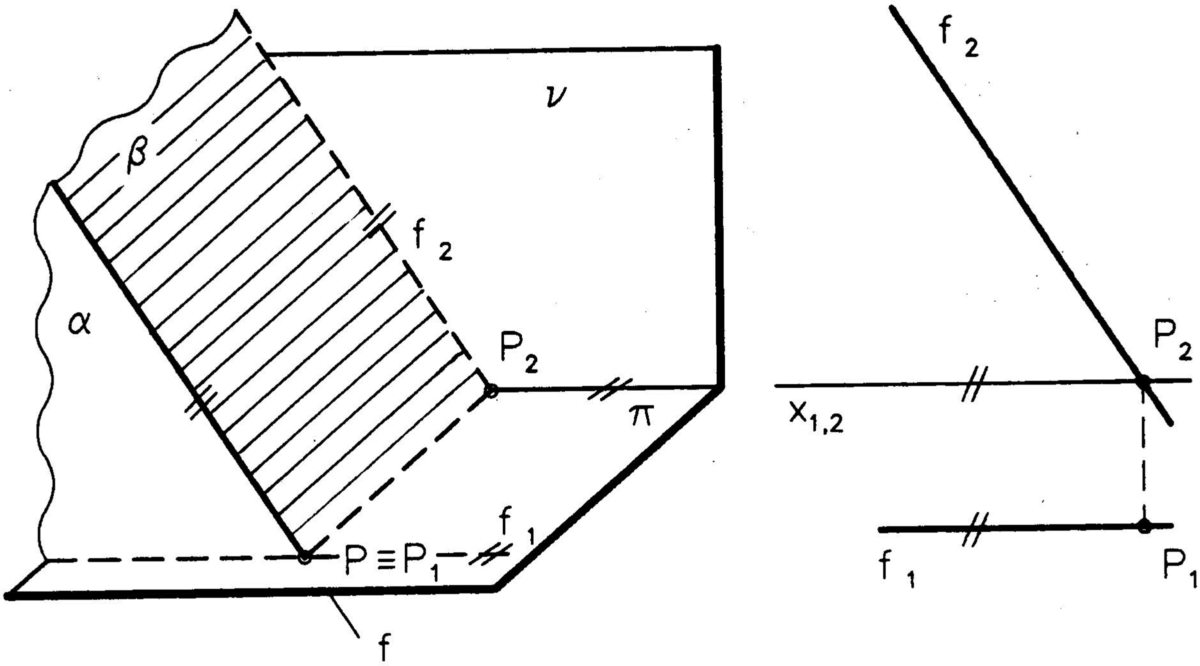
Obr.3.7

$h \parallel \pi$, vodorovná, horizontální hlavní přímka, $(h_2 \parallel x_{1,2})$



Obr.3.8

$f \parallel \nu$, **průčelná, frontální hlavní přímka,** $(f_1 \parallel x_{1,2})$



Obr.3.9

Značíme.

$P \equiv b \cap \pi$ půdorysný stopník

$N \equiv b \cap \nu$ nárysný stopník

α půdorysně promítací rovina přímky $b, \alpha \perp \pi$

β nárysně promítací rovina přímky $b, \beta \perp \nu$

$p^\sigma \equiv \sigma \cap \pi$ půdorysná stopa roviny σ

$n^\sigma \equiv \sigma \cap \nu$ nárysná stopa roviny σ

h vodorovná hlavní přímka, $h \parallel \pi$

f průčelná hlavní přímka, $f \parallel \nu$

Rovina

Ze stereometrie víme, že rovina v prostoru je určena

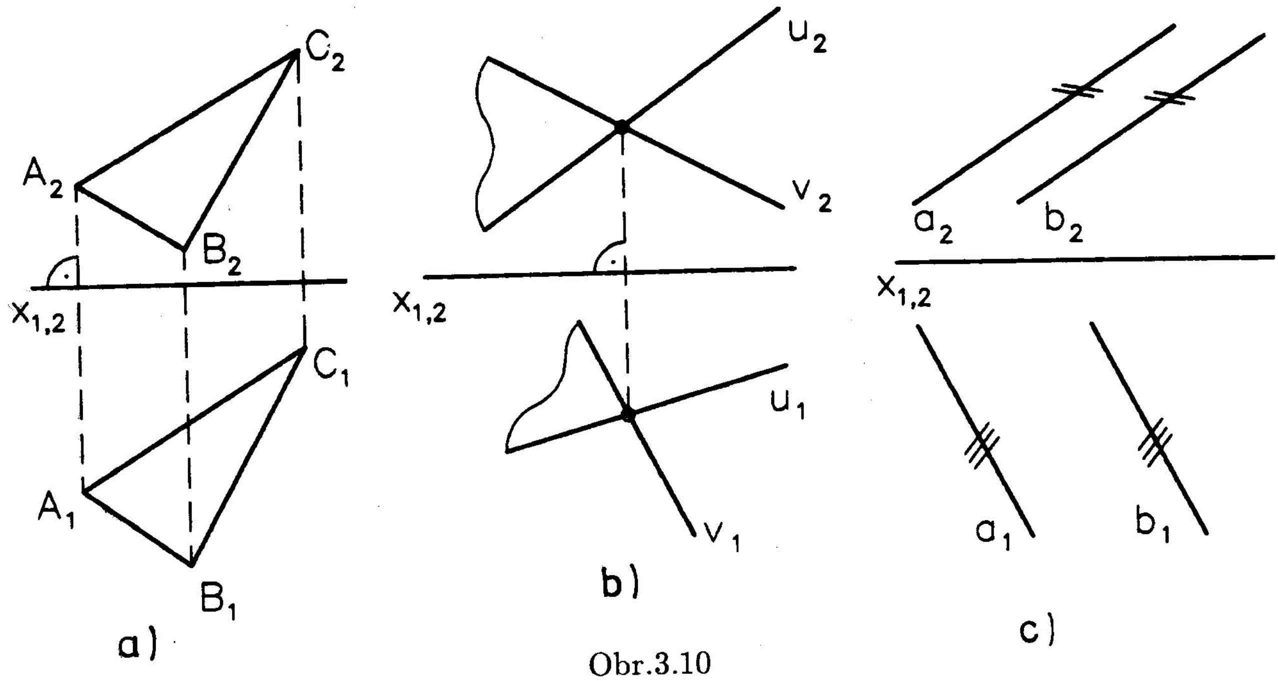
a) třemi body, které neleží v přímce......... $\sigma = (ABC)$

b) dvěma různoběžnými přímkami u, v.........$\sigma = (u, v)$

c) dvěma rovnoběžnými, různými přímkami a, b.......$\sigma = (a, b)$

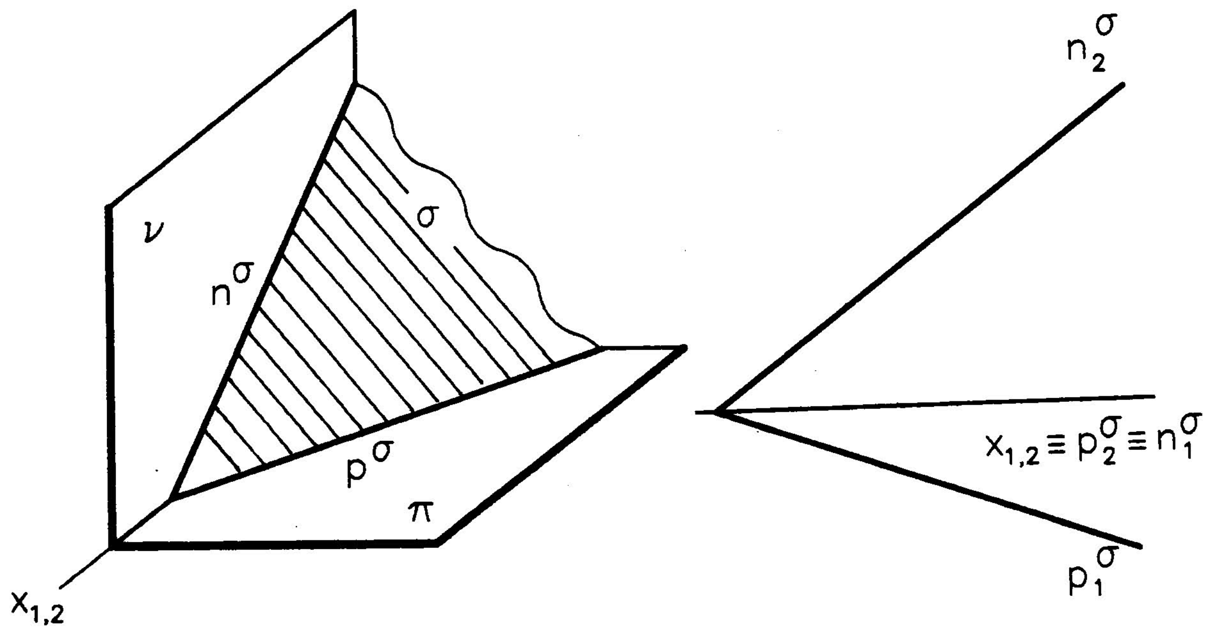
d) přímkou b a bodem M, který na ní neleží........ $\sigma = (b\ ,\ M)$.

V Mongeově promítání budeme rovinu, která není kolmá k průmětně, zadávat pomocí sdružených průmětů určujících prvků, obr. 3.10.



Obr.3.10

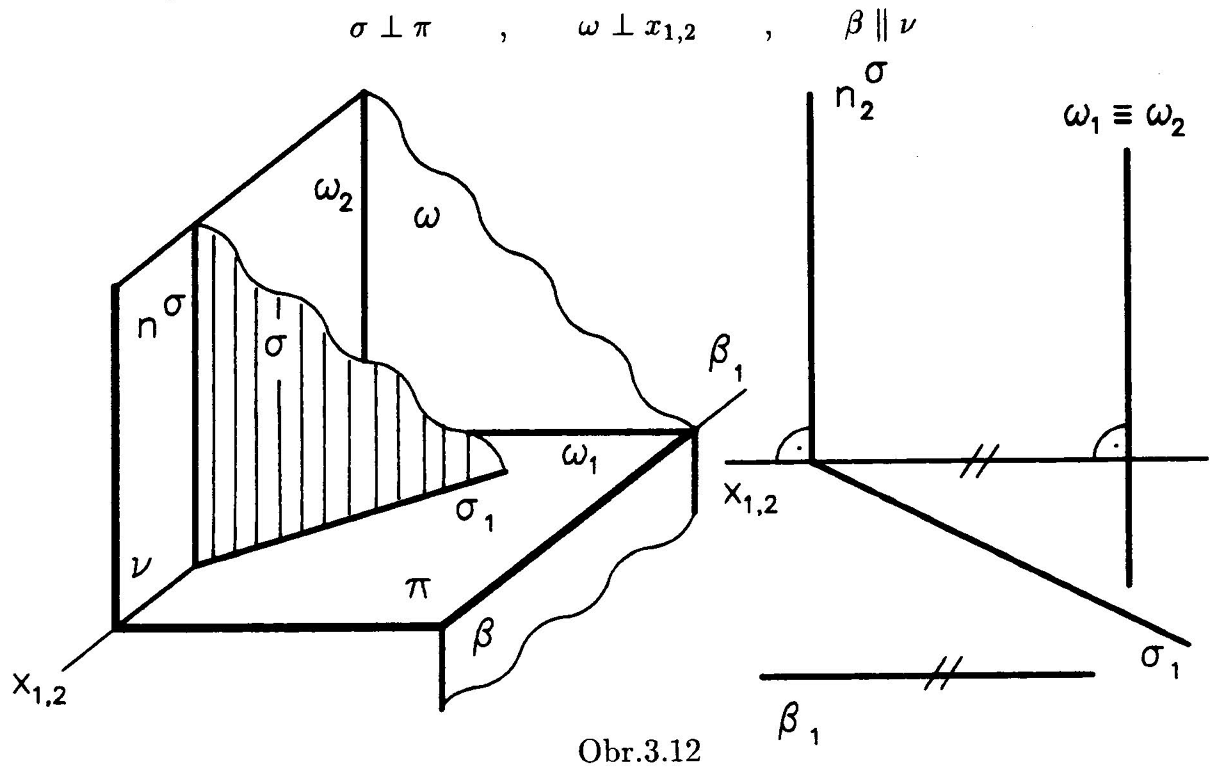
Poznámka. Zadání $\sigma = (p^\sigma, n^\sigma)$ budeme považovat za určení c) nebo b), obr. 3.11.



Obr.3.11

Zvláštní polohy roviny, obr. 3.12.

$$\sigma \perp \pi \qquad , \qquad \omega \perp x_{1,2} \qquad , \qquad \beta \parallel \nu$$



Obr.3.12

3.5 Polohové úlohy

Zkoumáme-li vzájemnou polohu základních útvarů,t.j. bodů, přímek a rovin, vycházíme z toho,že rovnoběžné promítání zachovává incidenci. Takže platí

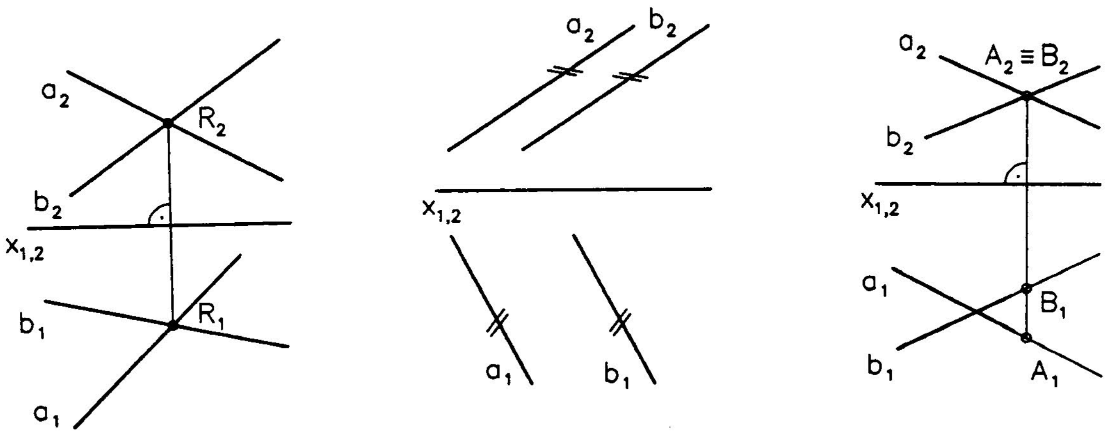
$$A \in m \qquad \Rightarrow \qquad A_1 \in m_1 \quad , \quad A_2 \in m_2$$

Snadno nahlédneme, že sdružené průměty různoběžných přímek (v obecné poloze) jsou dvojice různoběžných přímek, jejichž průsečíky leží na kolmici k základnici.

$$R \equiv a \cap b \quad \Rightarrow \quad R_1 \equiv a_1 \cap b_1 \ , \quad R_1\, R_2 \perp x_{1,2} \ , \quad R_2 \equiv a_2 \cap b_2$$

Na následujícím obrázku 3.13 jsou zobrazeny sdružené průměty dvojic přímek

$a \cap b \equiv R$ $\qquad$ $a \parallel b$ $\qquad$ a, b jsou mimoběžné.



Obr.3.13

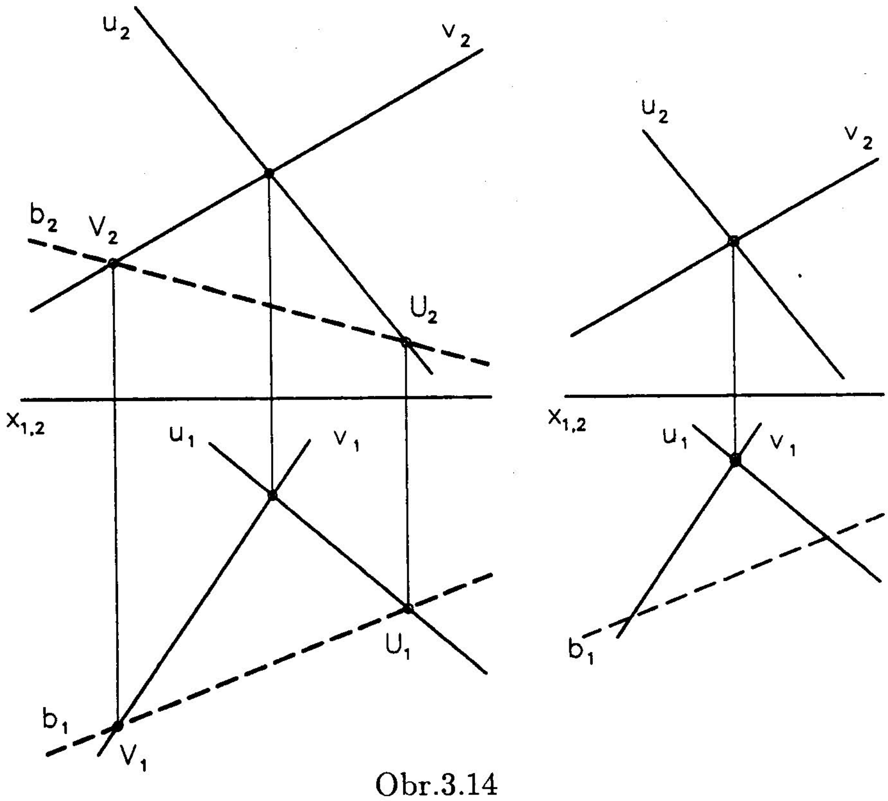
3.5.1 Úloha

Rovina σ je dána dvěma různoběžnými přímkami u, v . Určete nárys přímky b, která leží v rovině σ a má daný půdorys b_1 .

Dáno: u , v , b_1 , $b \subset (u,v)$

Hledáme : b_2

Návod. Přímka b leží v rovině σ, protíná tedy její přímky u, v v bodech $U \equiv b \cap u$, $V \equiv b \cap v$. Známe půdorysy bodů U , V ; $U_1 \equiv b_1 \cap u_1, V_1 \equiv b_1 \cap v_1$. Lehce odvodíme nárysy bodů U, V a tím určíme $b_2 \equiv U_2\ V_2$, obr. 3.14.



Obr.3.14

Analogicky řešíme úlohu, ve které máme určit zbývající průmět bodu, ležícího v rovině, je-li dán jeden průmět bodu. Bodem proložíme přímku l roviny σ a podle (3.5.1) odvodíme zbývající průmět přímky l .

3.5.2 Úloha , (viz 3.4)

Sestrojte hlavní přímky v rovině σ , která je dána třemi body A , B , C .

Dáno: $\sigma = (ABC)$

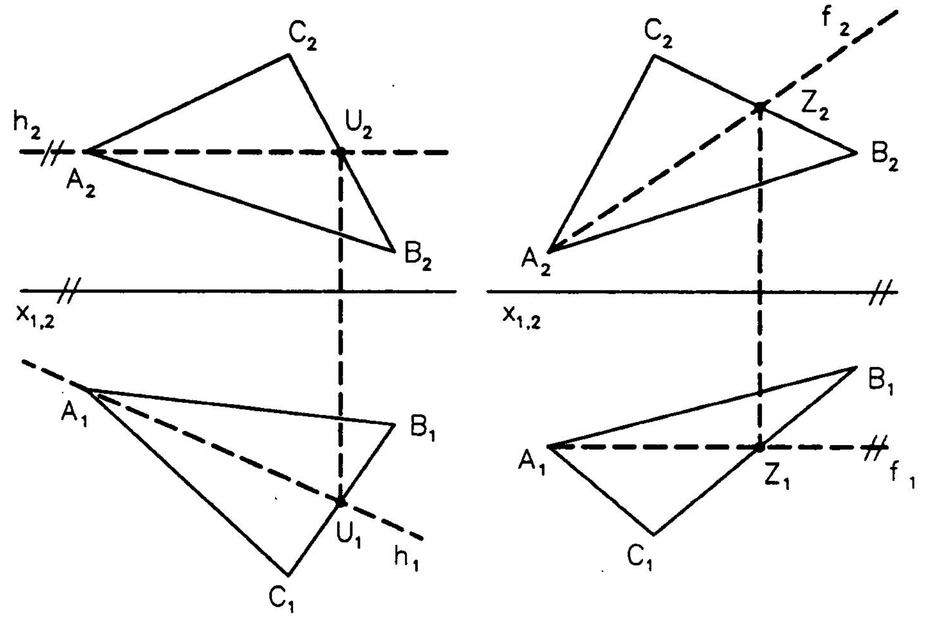
Hledáme: h horizontální, vodorovnou hlavní přímku $h \parallel \pi$, $h \subset \sigma$

Hledáme: f frontální, průčelnou hlavní přímku $f \parallel \nu$, $f \subset \sigma$

Konstrukce, obr. 3.15:

1) Zvolíme nárys $h_2 \parallel x_{1,2}$, resp. $f_1 \parallel x_{1,2}$.

2) Přímka h, resp. f leží v σ a tedy protíná přímky této roviny (viz 3.5.1).

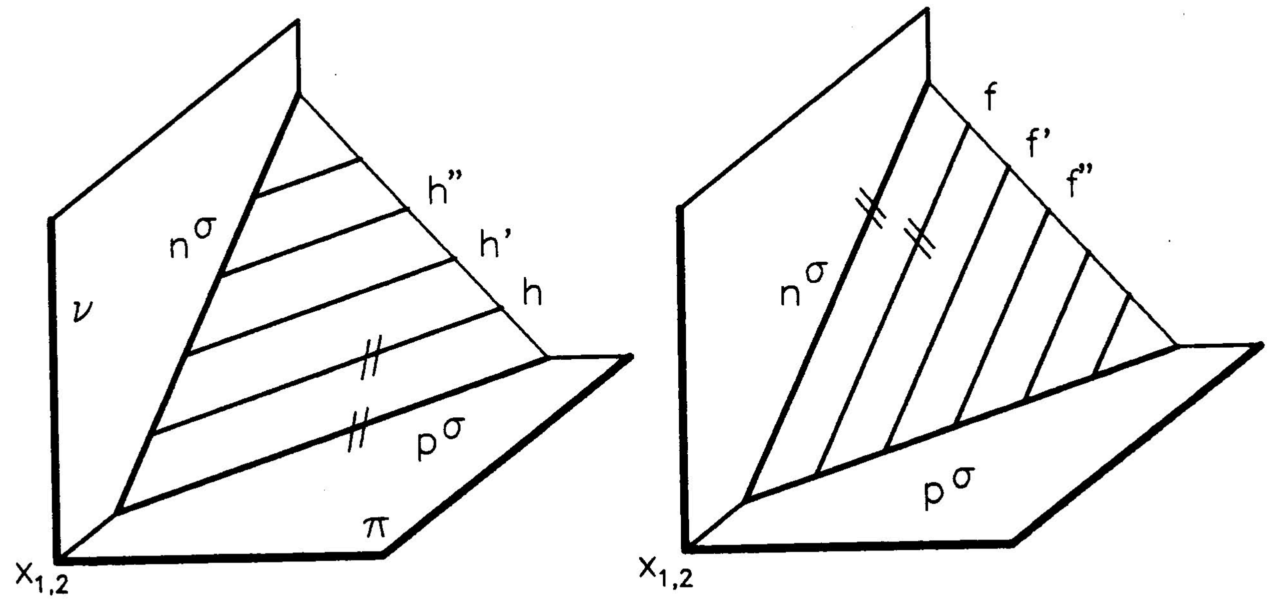


Obr.3.15

Pro průměty hlavních přímek platí, obr. 3.16.

$$h: \quad h_1 \parallel p_1^\sigma \ , \ h_2 \parallel x_{1,2}$$

$$f: \quad f_2 \parallel n_2^\sigma \ , \ f_1 \parallel x_{1,2}$$



Obr.3.16

3.5.3 Úloha

Sestrojte průsečík přímky m s rovinou σ.

Dáno: $\sigma = (ABC)$, m

Hledáme: $M \equiv m \cap \sigma$

Návod. Přímkou m proložíme půdorysně promítací rovinu α. Průsečnici $q \equiv \alpha \cap \sigma$ nazveme **krycí přímkou** přímky m. Hledaný bod $M \equiv m \cap \sigma$ je průsečík přímky m s její krycí přímkou $M \equiv q \cap m$, obr 3.17. Rovněž můžeme použít nárysně promítací rovinu β .

Konstrukce, obr 3.17:

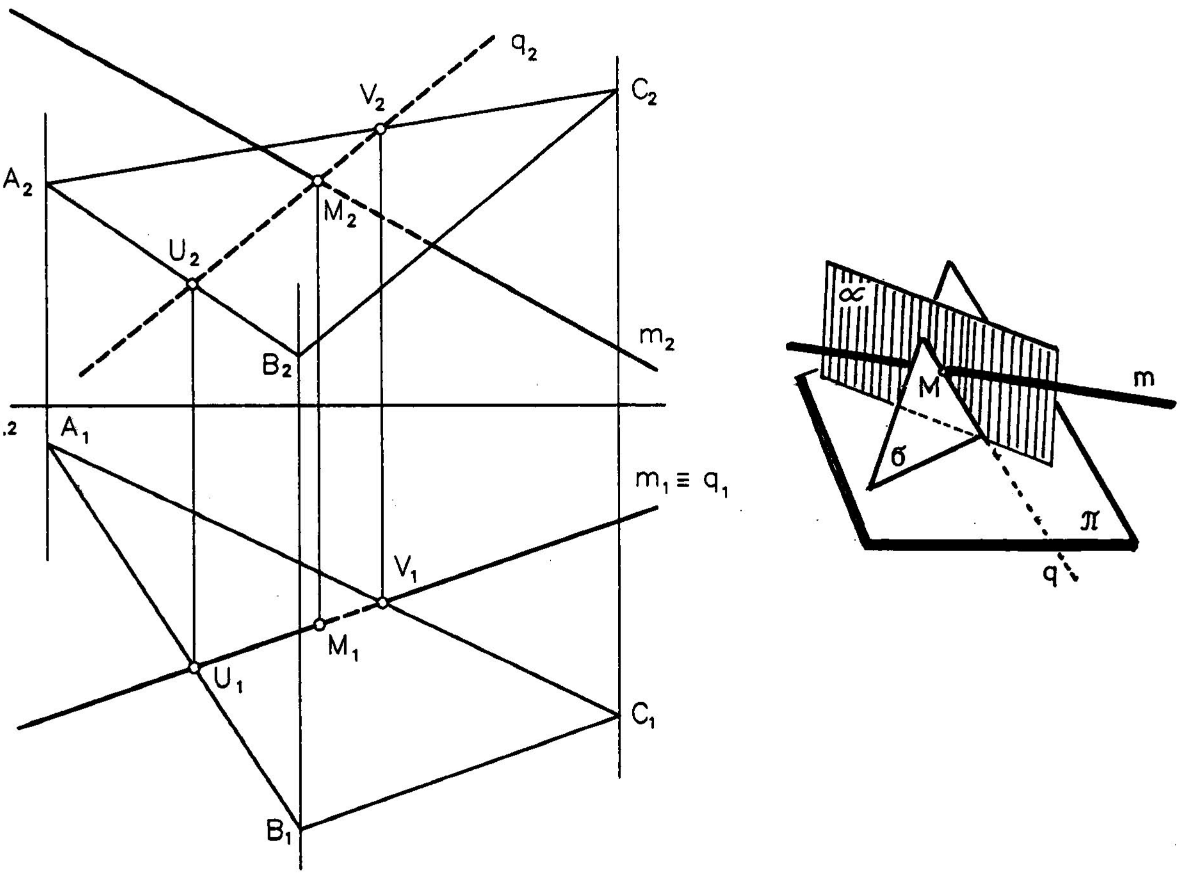
1) Půdorys krycí přímky $q_1 \equiv m_1$

2) $U_1 \equiv q_1 \cap A_1 B_1$, $V_1 \equiv q_1 \cap A_1 C_1$; $q \equiv UV$

3) nárys krycí přímky $q_2 \equiv U_2 V_2$

4) $M_2 \equiv q_2 \cap m_2$; $M_1 \in m_1$

Poznámka. Úlohu sestrojení průsečnice dvou rovin řešíme na základě předcházející úlohy. Vybereme dvě přímky jedné roviny a sestrojíme jejich průsečíky s rovinou druhou. Hledaná průsečnice je určena dvěma body.

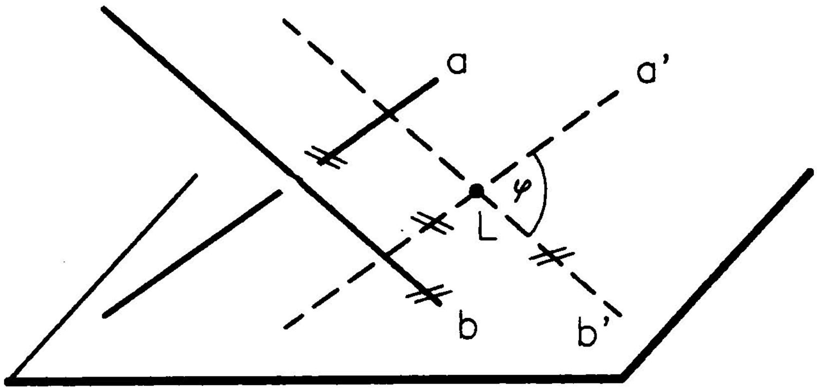


Obr.3.17

3.6 Metrické úlohy

Při konstruování útvarů v prostoru nevystačíme jen s polohovými úlohami, ale setkáváme se též s úlohami,které se týkají **velikostí a úhlů**.Takovým úlohám říkáme metrické. Nejdříve si připomeneme některé poznatky ze stereometrie, které jsou východiskem při řešení metrických úloh v Mongeově promítání.

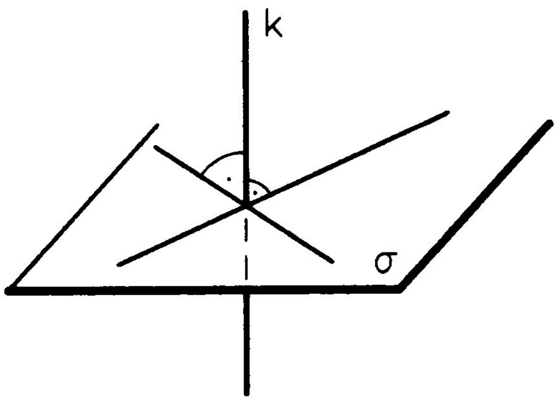
Definice. Úhel dvou mimoběžných přímek a, b je definován jako úhel dvou přímek a', b' , které procházejí libovolným bodem L v prostoru a pro které platí
$a' \parallel a$, $b' \parallel b$, obr. 3.18.

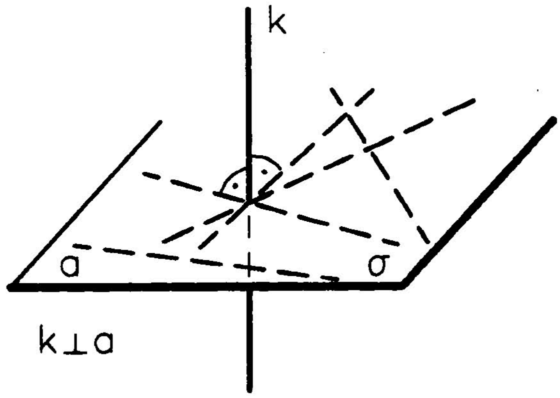


Obr.3.18

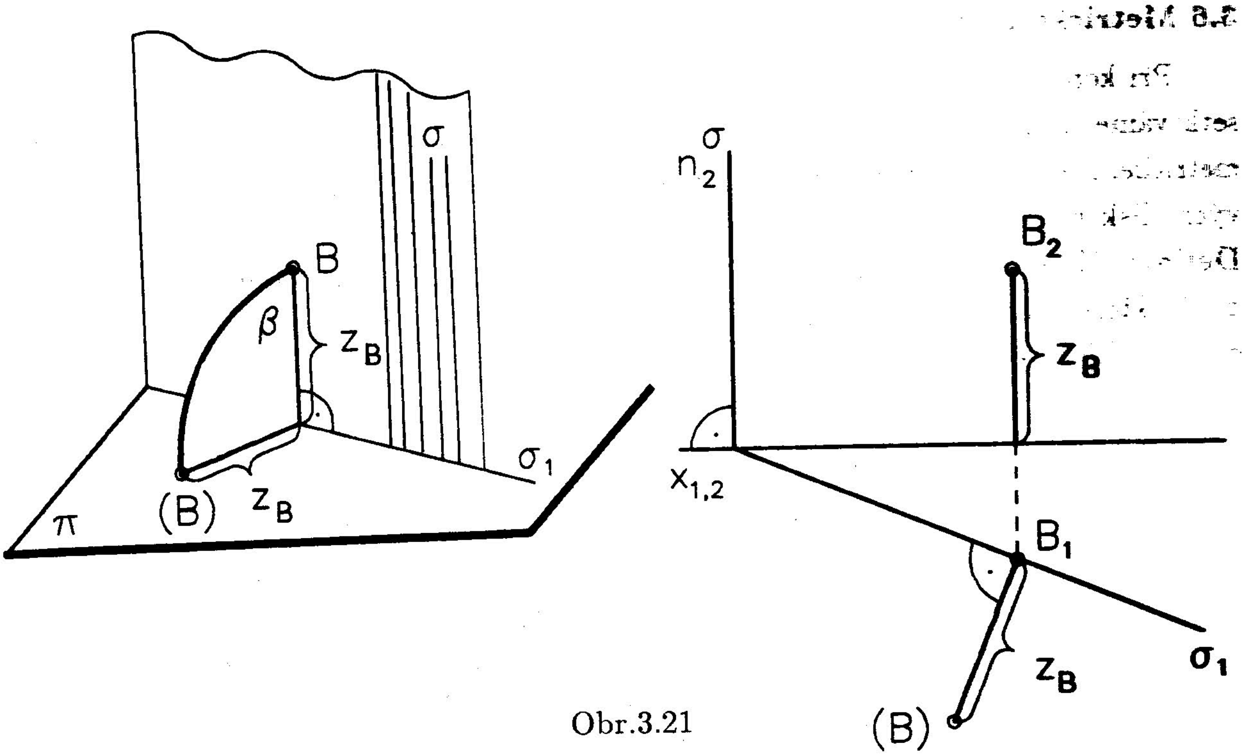
Definice. Přímka je kolmá k rovině, je-li kolmá ke všem přímkám této roviny, obr. 3.20.

Věta. Přímka je kolmá k rovině tehdy a jen tehdy, je-li kolmá alespoň ke dvěma různoběžným přímkám této roviny, obr. 3.19.





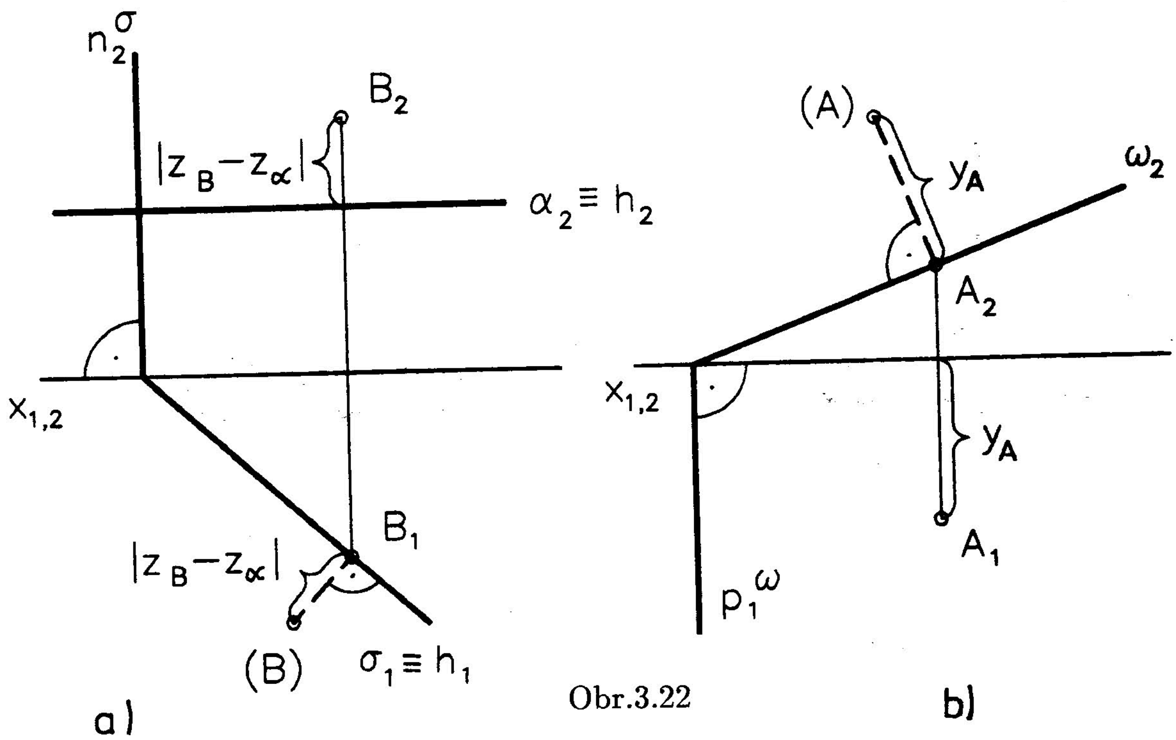
Obr.3.19 Obr.3.20



Obr.3.21

3.6.1 Sklápění promítací roviny σ do průmětny

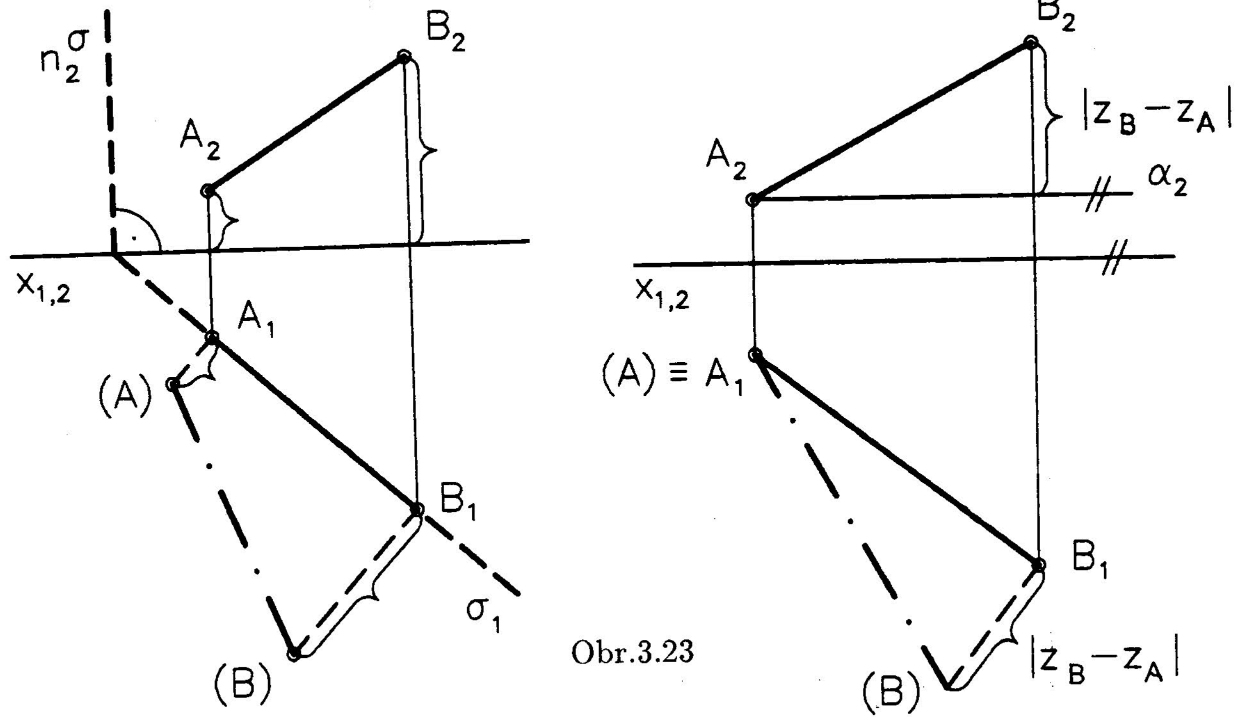
Budeme sklápět rovinu σ ($\sigma \perp \pi$) do půdorysny π (respektive do **vodorovné roviny** $\alpha \parallel \pi$) . Osou sklápění je σ_1 (respektive hlavní přímka $h \equiv \alpha \cap \sigma$). **Dráha bodu B** sklápěné roviny σ je kružnice, která leží v rovině β kolmé k ose sklápění **a má poloměr** $r = z_B$, obr. 3.21,(resp. $r = \mid z_B - z_\alpha \mid$) , obr. 3.22a. Sklápění **nárysně promítací** roviny ω, $\omega \perp \nu$, do nárysny je analogické, obr. 3.22b.



Obr.3.22

3.6.2 Úloha. Sestrojte skutečnou velikost úsečky AB.

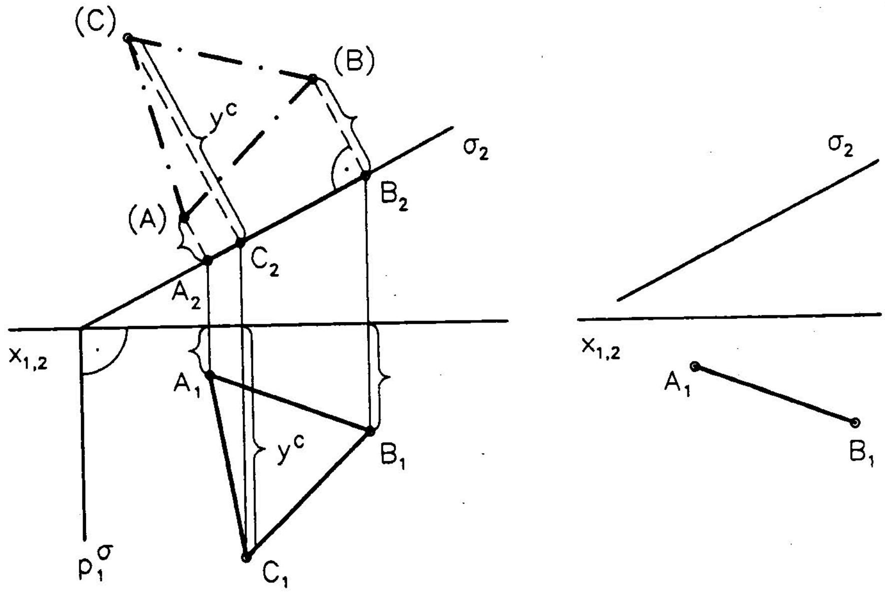
Řešení. Přímkou AB proložíme půdorysně promítací rovinu $\sigma, (\sigma \perp \pi)$, a sklopíme ji do půdorysny (resp. do roviny $\alpha \parallel \pi$) , obr. 3.23. (A) (B) je skutečná velikost úsečky AB .



Obr.3.23

3.6.3 Úloha. Zobrazte rovnostranný $\triangle ABC$ ležící v rovině $\sigma, (\sigma \perp \nu)$, je-li dána jeho strana $A\ B$.

Řešení. Nárysně promítací rovinu σ sklopíme do nárysny. Sestrojíme rovnostranný $\triangle(A)(B)(C)$. Bod (C) sklopíme zpět, obr. 3.24. Úloha má dvě řešení .



Obr.3.24

3.6.4 Úloha. Zobrazte kružnici $k = (S, r)$ ležící v rovině σ, $(\sigma \perp \pi)$, obr. 3.25.

Řešení.

1) Půdorysně promítací rovinu σ sklopíme do půdorysny.

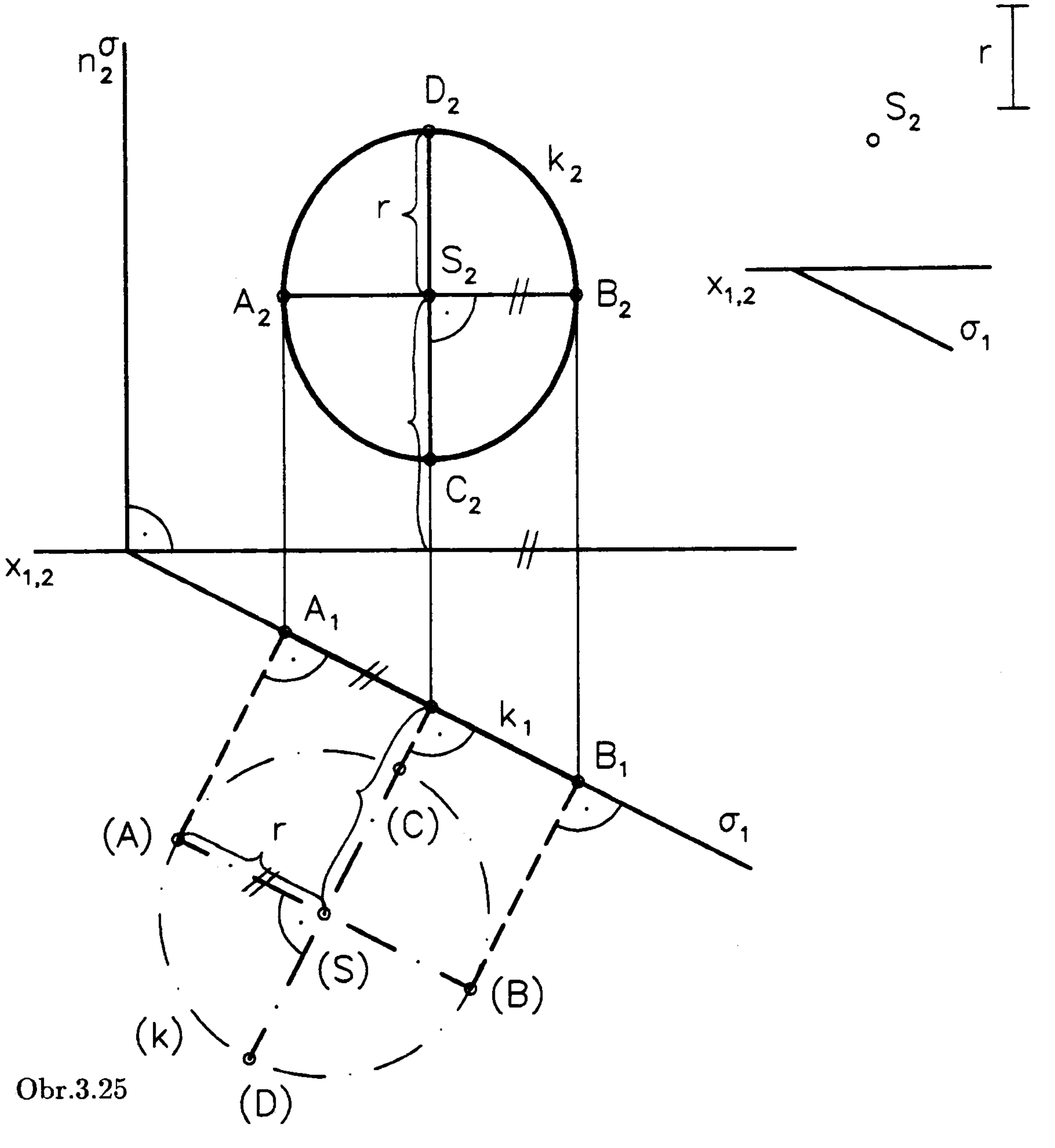
2) Sestrojíme sklopenou kružnici $(k) = ((S), r)$.

3) Sdružené průměry $(A)(B)$, $(C)(D)$ kružnice (k) sklopíme zpět.

Půdorysem kružnice je úsečka $A_1B_1 = 2r$, nárysem je elipsa určená osami A_2B_2, C_2D_2 , $A_2B_2 \perp C_2D_2$.

Platí $A_2B_2 \perp C_2D_2$, protože $AB \parallel \pi$.

Snadno nahlédneme,že sdružené průměty kružnice ležící v promítací rovině můžeme sestrojit přímo bez sklopení kružnice.



Obr.3.25

3.6.5 Přímka kolmá k rovině

Ze stereometrie víme, že kolmice k rovině σ je kolmá ke všem přímkám roviny σ, tedy i k hlavním přímkám této roviny. Použijeme-li větu (2.7.2) o pravoúhlém průmětu pravého úhlu dostaneme

$$m \perp h, \qquad h \parallel \pi \qquad \Rightarrow \qquad m_1 \perp h_1$$

$$m \perp f, \qquad f \parallel \nu \qquad \Rightarrow \qquad m_2 \perp f_2$$

3.6.6 Úloha. Daným bodem M sestrojte přímku m kolmou k rovině σ. Uvažujme různá zadání a) - d) roviny σ.

a) σ je daná hlavními přímkami $\sigma = (h, f)$, obr.3.26

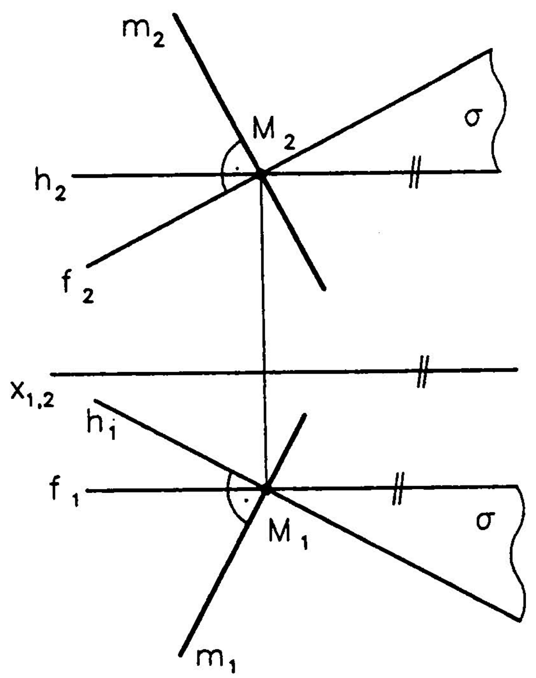
b) σ je dána stopami, $\sigma = (p^\sigma, n^\sigma)$. Je zřejmé, že $p^\sigma \parallel h, n^\sigma \parallel f$, obr. 3.27

c) σ je dána třemi body, $\sigma = (MQR)$

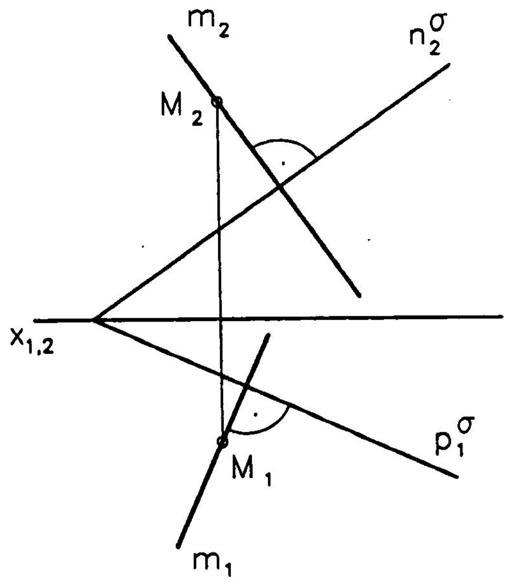
Návod:Sestrojíme hlavní přímky h, f roviny σ , (viz 3.5.2), obr. 3.28.

d) σ je dána nárysem σ_2 , obr. 3.29.

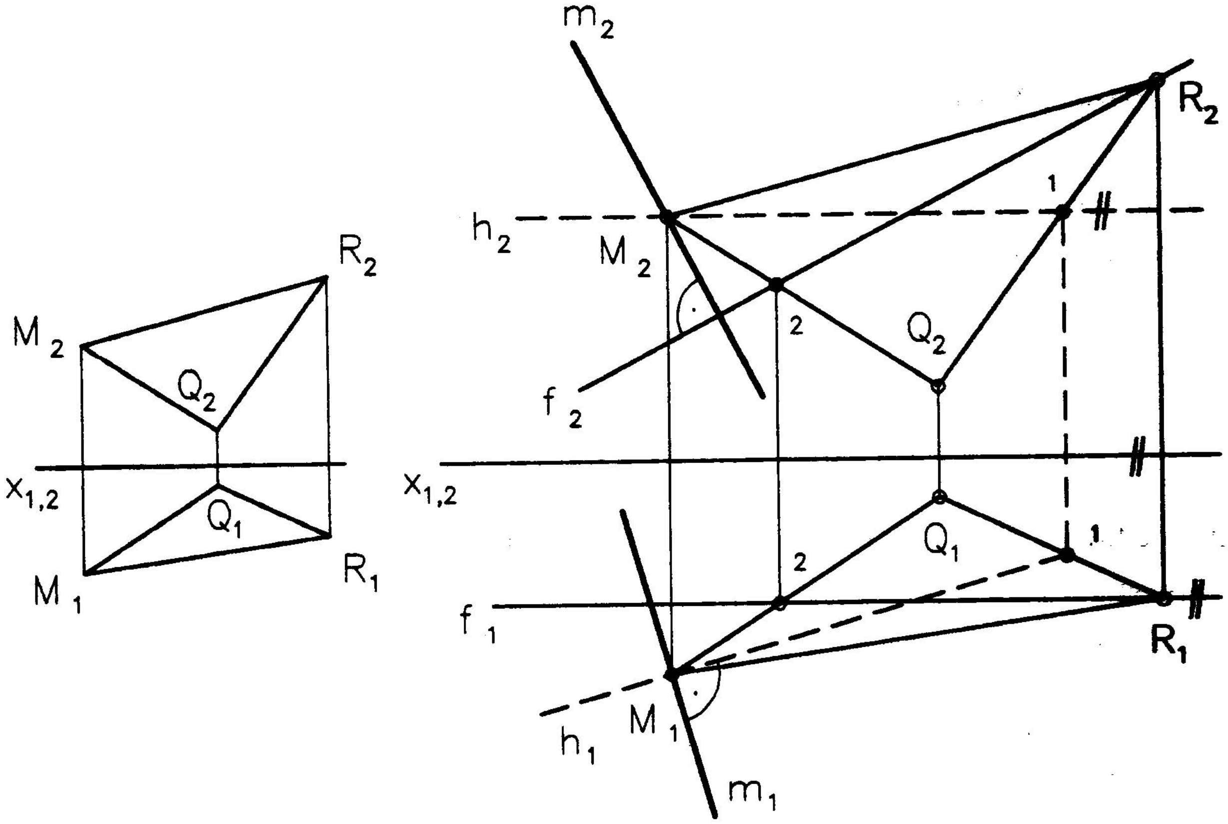
Návod: Rovina σ je nárysně promítací, platí tedy $\sigma \perp \nu$, $m \perp \sigma \;\Rightarrow\; m \parallel \nu$.



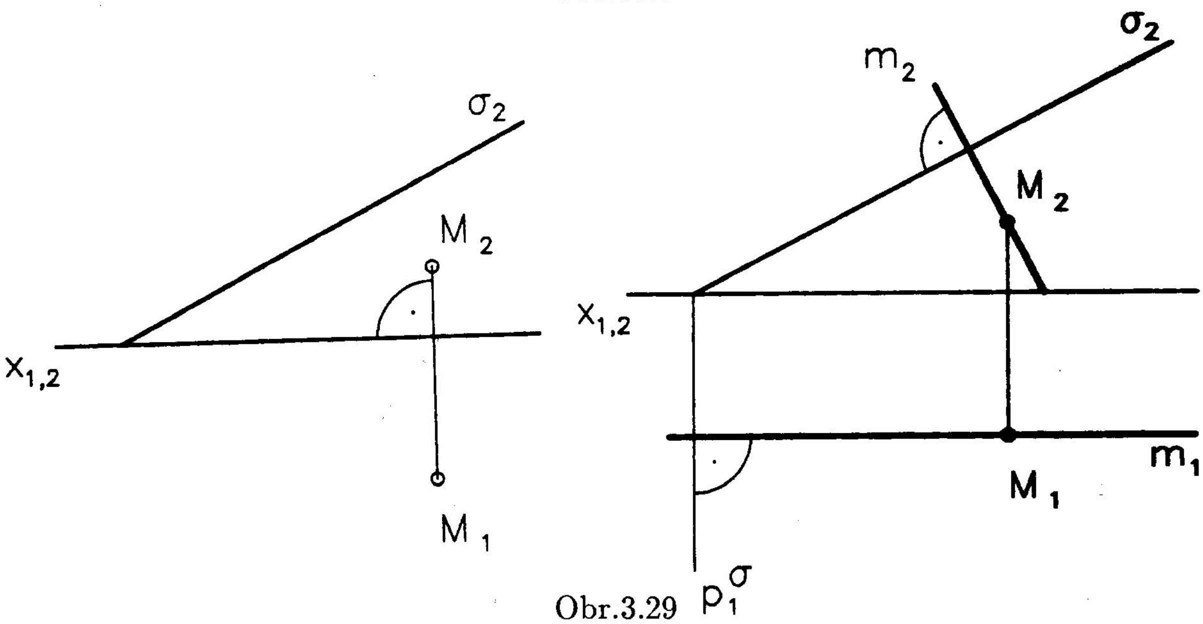
Obr.3.26



Obr.3.27



Obr.3.28



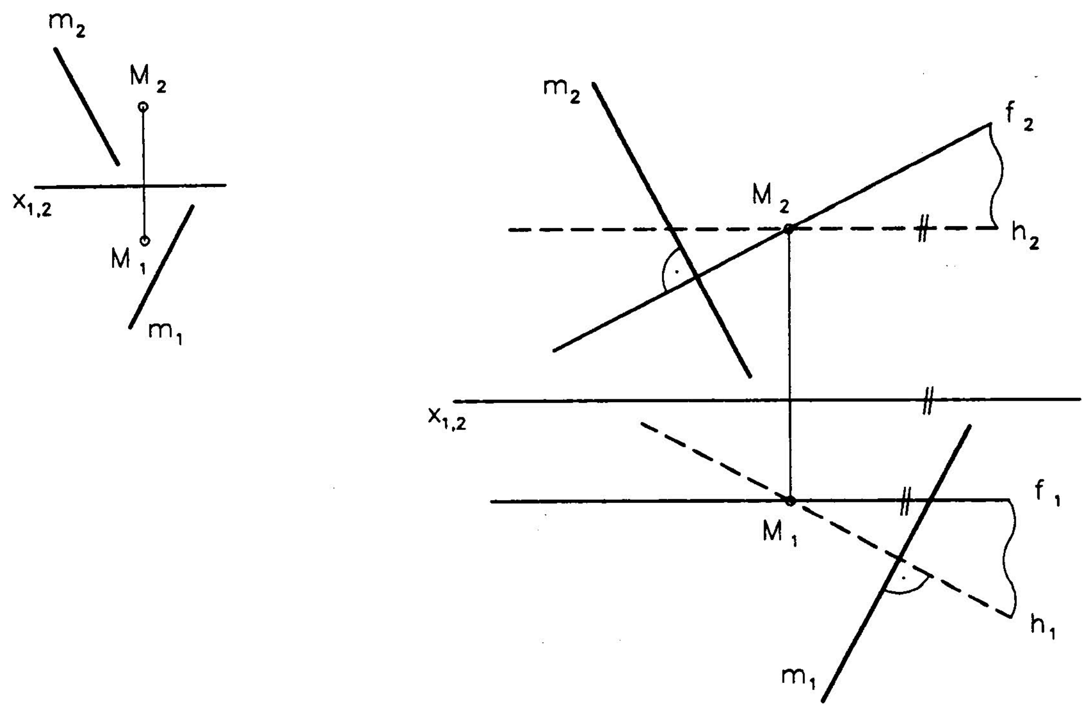
Obr.3.29

3.6.7 Úloha. Daným bodem M sestrojte rovinu ω kolmou k **dané přímce** $\boldsymbol{m}$.
Návod. Rovinu ω určíme hlavními přímkami h, f , které procházejí **daným bodem** $\boldsymbol{M}$ a pro jejichž sdružené průměty platí

$$h: \qquad h_1 \perp m_1, \qquad h_2 \parallel x_{1,2}$$

$$f: \qquad f_2 \perp m_2\ ,\ f_1 \parallel x_{1,2}$$

a samozřejmě $M_1 \in h_1,\ M_2 \in h_2,\ M_1 \in f_1,\ M_2 \in f_2$, obr. 3.30.



Obr.3.30

3.6.8 Úloha. Zobrazte kružnici $k = (S, r)$ ležící v rovině σ , která je dána hlavními přímkami h, f. $\sigma = (h, f), S \equiv h \cap f$, obr. 3.31.
Řešení. Sdružené průměty kružnice k jsou elipsy k_1, k_2 , (viz 2.8).
Půdorys k_1 kružnice k určíme

a) hlavní osou A_1B_1 ,která leží na půdorysu vodorovné hlavní přímky h a má skutečnou velikost $A_1B_1 = 2r$,

b) dalším bodem elipsy U_1; $U \in f, U \in k$,

c) vedlejší osu elipsy k_1 omezíme proužkovou konstrukcí.

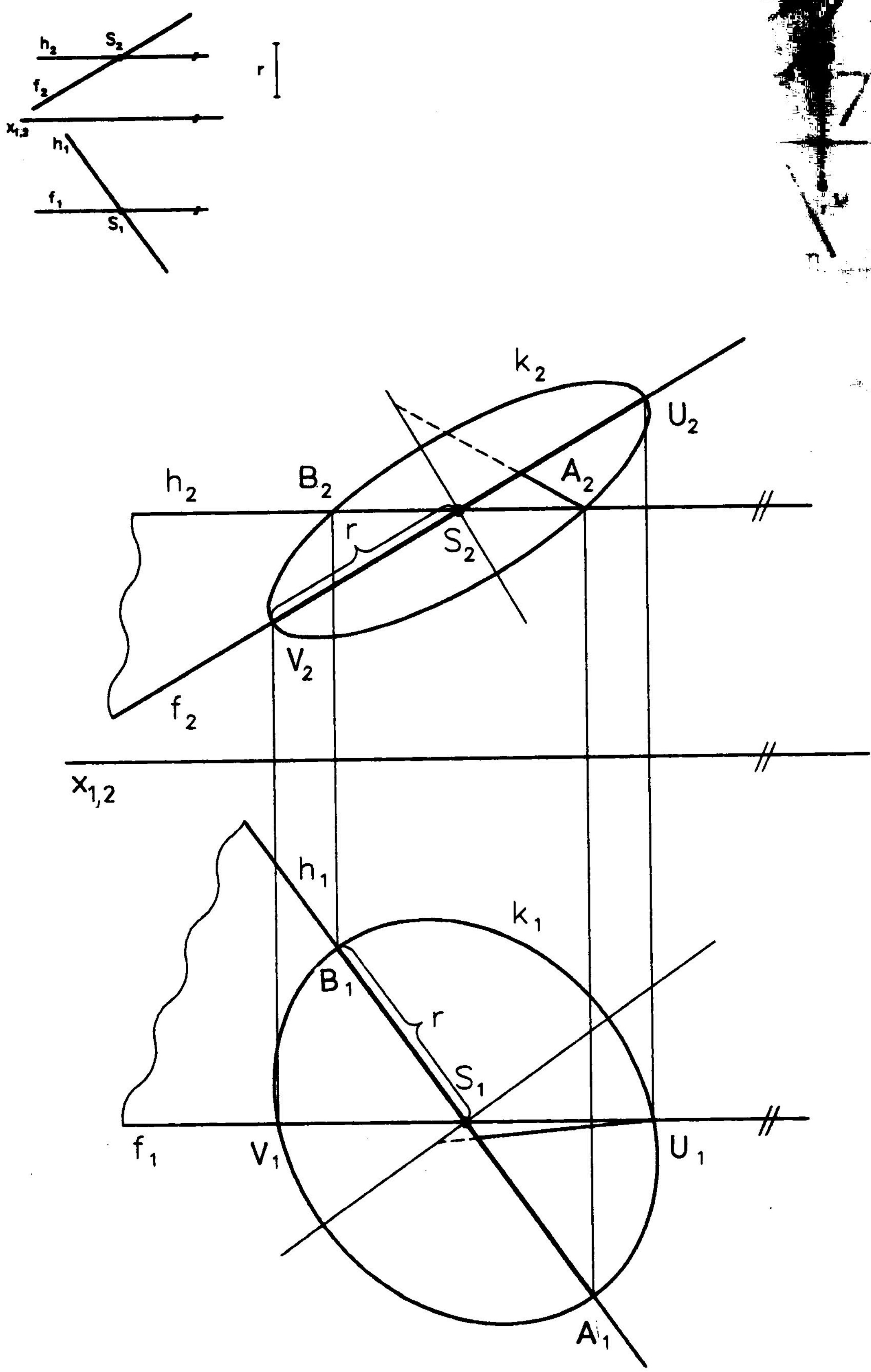
Nárys k_2 kružnice k určíme analogicky

a) hlavní osa U_2V_2, $U_2V_2 = 2r$, $UV \subset f$,

b) další bod A_2 ,

c) proužková konstrukce - omezení vedlejší osy.

Poznámka. Zabývali jsme se pouze některými úlohami z Mongeova promítání. Obsáhlejší znalosti může čtenář získat v literatuře,na př. [1].


h₂
S₂
f₂
x₁,₂
h₁
f₁
S₁
r
k₂
U₂
h₂
B₂
A₂
r
S₂
V₂
f₂
x₁,₂
h₁
k₁
B₁
r
S₁
f₁
V₁
U₁
A₁

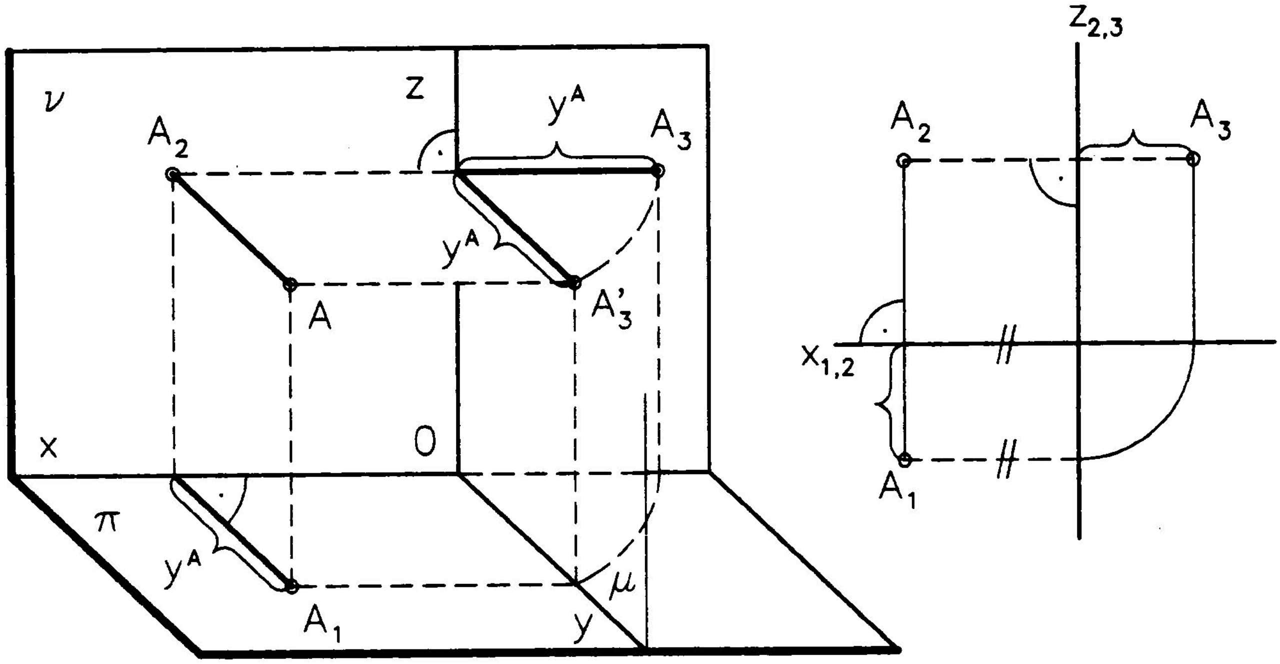
Obr.3.31

3.7 Bokorys , třetí průmět

V Mongeově promítání promítáme pravoúhle na dvě roviny souřadnicového trojhranu a to na půdorysnu $\pi = (x, y)$ a nárysnu $\nu = (x, z)$. Často užíváme další pravoúhlý průmět na rovinu $\mu = (y, z)$ - bokorysnu.

Bod A promítneme pravoúhle do μ , dostaneme třetí průmět bodu A . Bokorysnu sdružíme s nárysnou (případně s půdorysnou), to znamená, že bokorysnu sklopíme kolem osy z do nárysny a tu ztotožníme s nákresnou. Získaný třetí průmět bodu A označíme A_3 a nazveme jej bokorysem bodu A .

Dostaneme další pár sdružených průmětů bodu A : nárys A_2 , bokorys A_3 pro které platí $A_2A_3 \perp z$. Směr kolmý k ose z nazveme směrem nových ordinál.

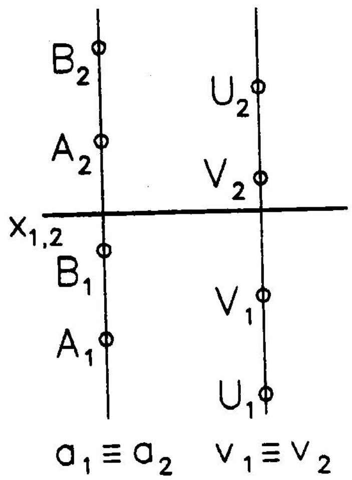


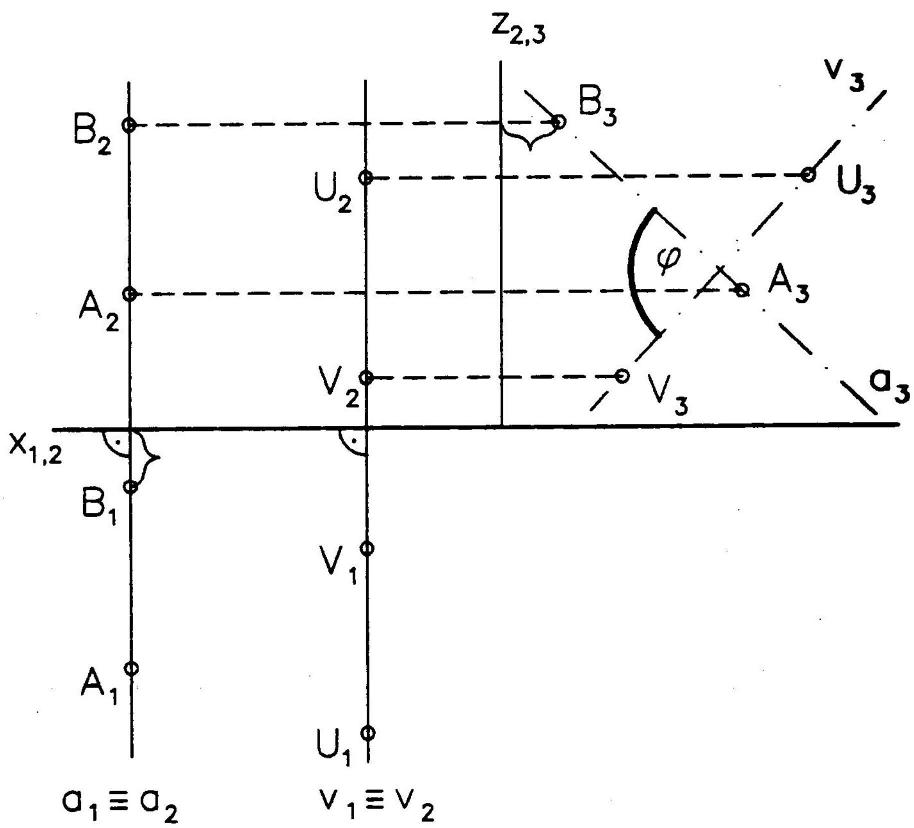
Obr.3.32

3.7.1 Úloha. Určete vzájemnou polohu přímek a, v, které jsou kolmé k **ose x, obr.** 3.33.

Dáno: $a = AB$, $v = UV$

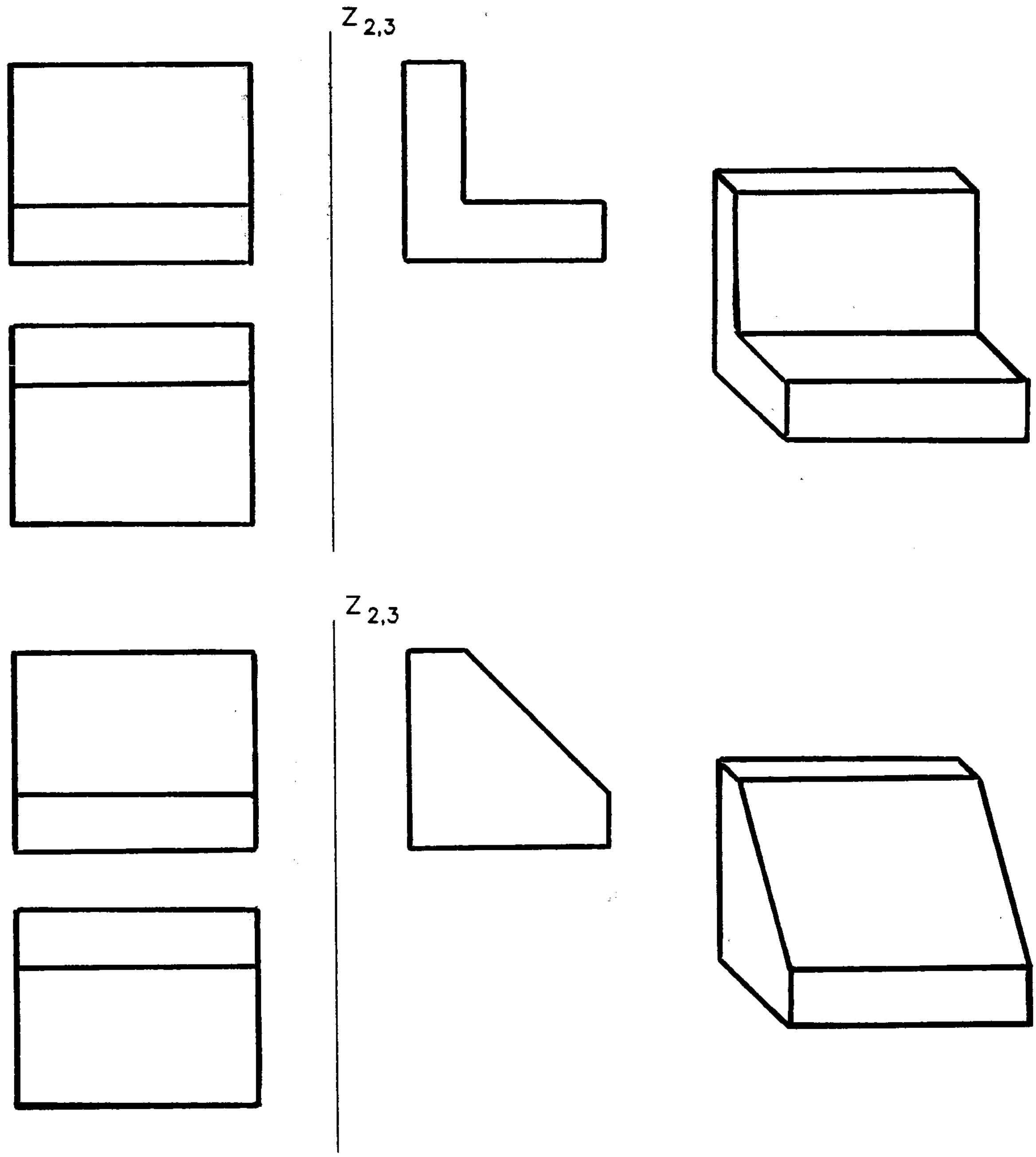
Řešení: Sestrojíme bokorysy $a_3 = A_3B_3$, $v_3 = U_3V_3$ přímek a, v a snadno **určíme nejen** vzájemnou polohu přímek a, v, ale i jejich úhel φ.





Obr.3.33

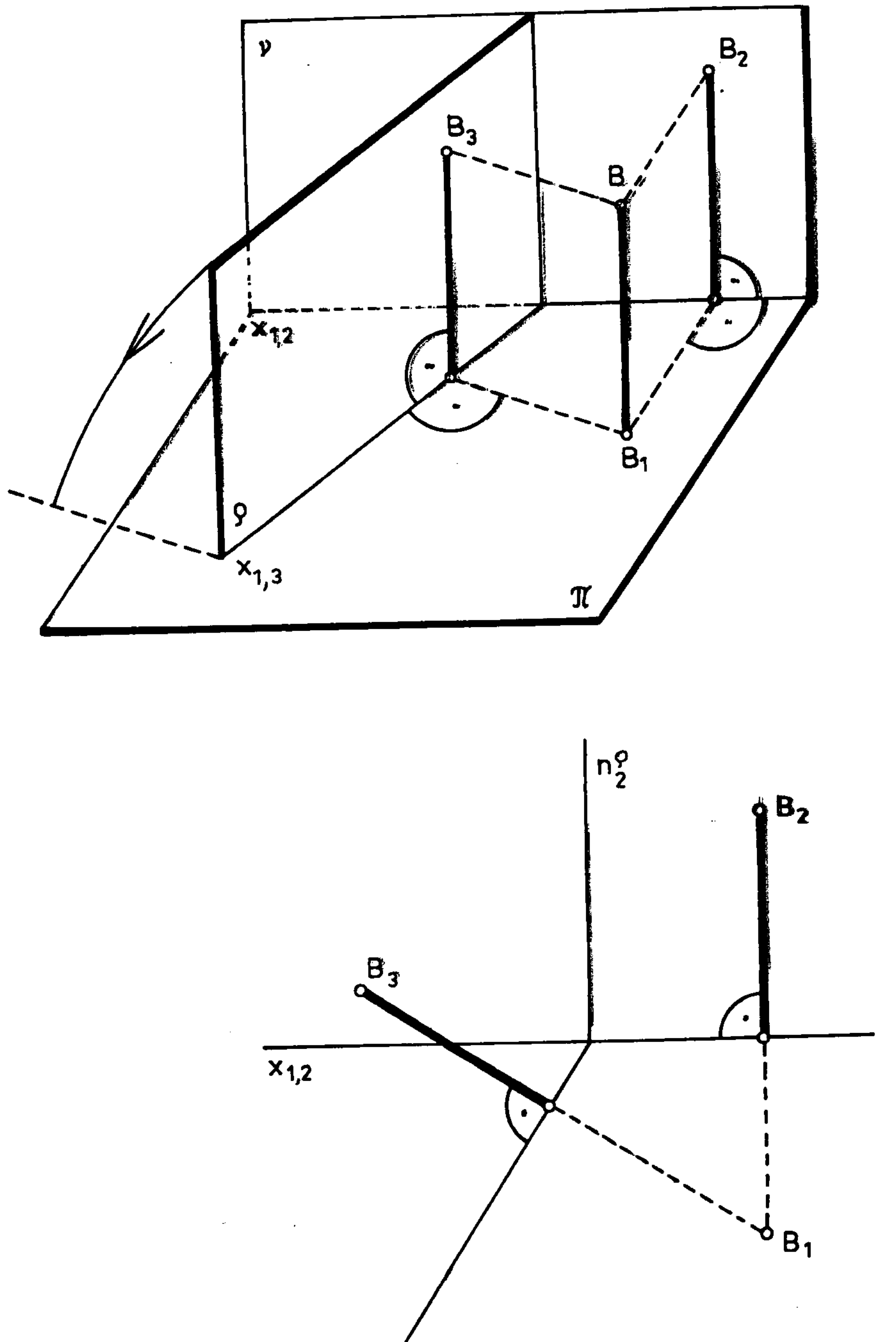
Bokorysu používáme pro zlepšení názornosti, zjednodušení konstrukce a k jednoznačnému zadání objektu v prostoru. Z obrázku 3.34 je zřejmé, že půdorys a nárys objektu (s neoznačenými průměty bodů) neurčují objekt v prostoru jednoznačně.



Obr.3.34

Pro zjednodušení konstrukcí můžeme též užít **další třetí průmětnu** ρ, která je kolmá **pouze k jedné** z průměten π, ν .

Uvažujme tedy třetí průmětnu ρ : $\rho \perp \pi$, $\rho \not\perp \nu$. Průmětnu ρ sdružíme s půdorysnou kolem průsečnice $x_{1,3} \equiv \rho \cap \pi$. Konstrukce třetího průmětu A_3 bodu A je zřejmá z obr. 3.35.



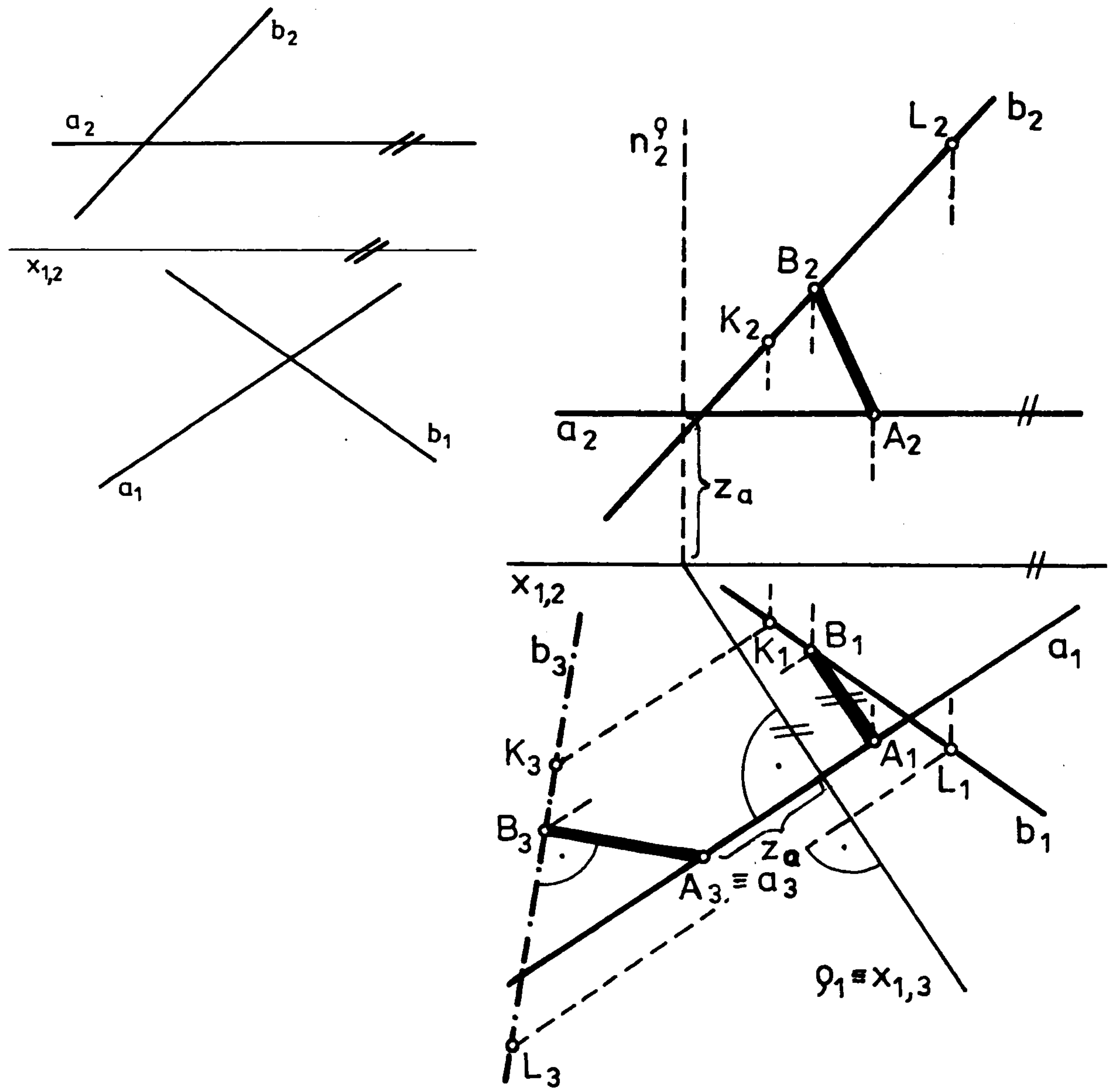
Obr.3.35

3.7.2 Úloha. Sestrojte nejkratší příčku (osu) mimoběžek a, b , obr. 3.36.
Dáno: a , b ($a \parallel \pi$)
Poznámka. Označme A, B krajní body nejkratší příčky, $A \in a, B \in b$. Potom platí $AB \perp a$, $AB \perp b$.
Řešení.

a) $a \parallel \pi$ $\Rightarrow$ můžeme zvolit třetí průmětnu ρ tak, aby $\rho \perp a$, $\rho \perp \pi$,

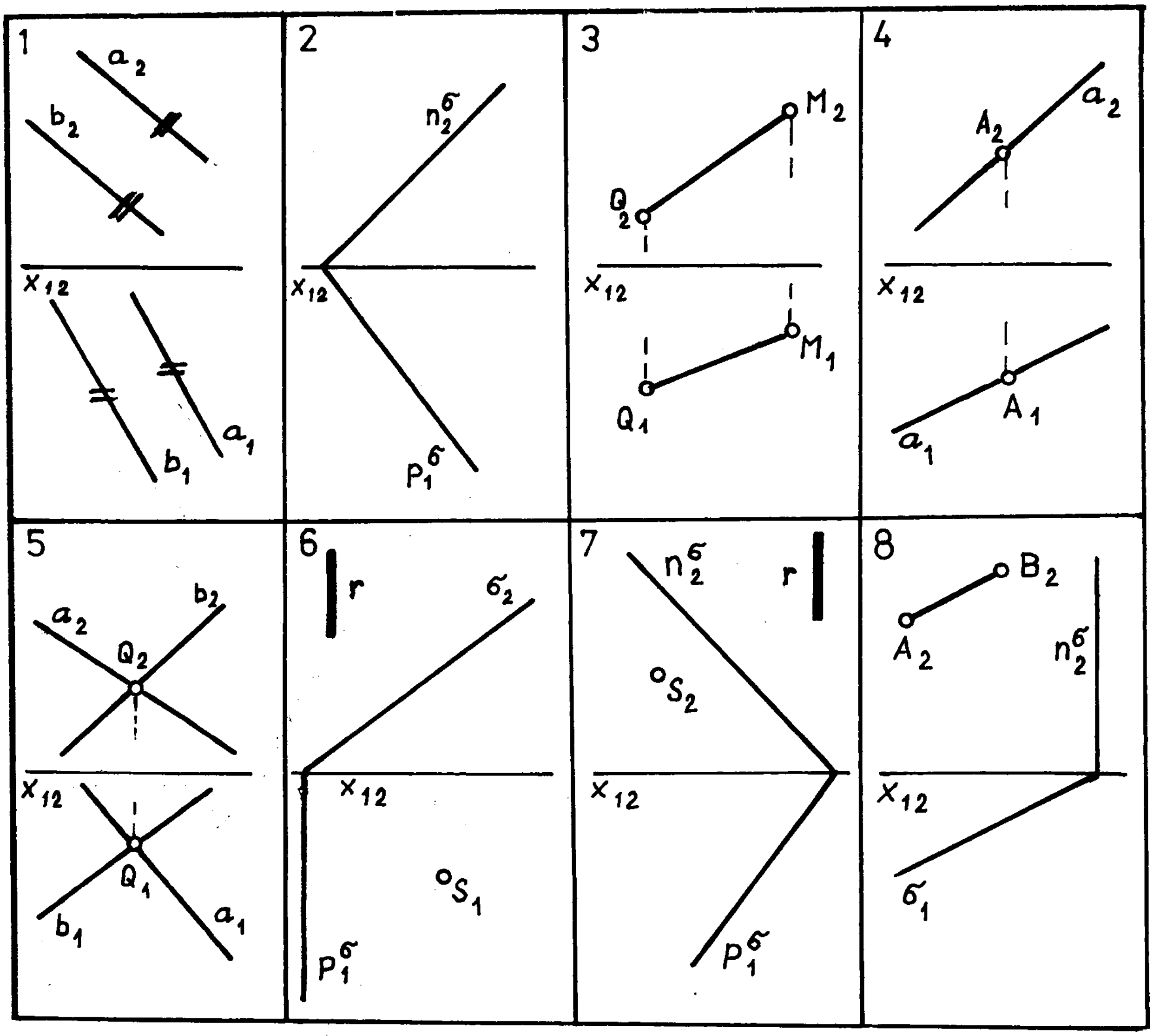
b) sestrojíme třetí průměty mimoběžek a, b a příčky AB . Přímka a se promítá do ρ jako bod $a_3 \equiv A_3$ a $A_3B_3 \perp b_3$ (viz 2.7.2), neboť $AB \parallel \rho$.

Poznámka. Ve třetím průmětu dostáváme skutečnou vzdálenost mimoběžek a, b.



Obr.3.36

Kontrolní otázky.



1) Sestrojte hlavní přímky roviny $\sigma = (a, b)$.

2) Sestrojte hlavní přímky roviny $\sigma = (p^{\sigma}, n^{\sigma})$.

3) Sestrojte velikost úsečky QM .

4) Bodem A veďte rovinu kolmou k přímce a .

5) Bodem Q sestrojte kolmici k rovině $\sigma \doteq (a, b)$.

6) V rovině $\sigma \perp \nu$ sestrojte kružnici $k = (S, r)$.

7) V rovině $\sigma = (p^{\sigma}, n^{\sigma})$ sestrojte kružnici $k = (S, r)$.

8) Sestrojte čtverec $ABCD$ nad úsečkou AB v rovině $\sigma \perp \pi$.