

1. Je dána soustava lineárních rovnic $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 3 & p \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Zformulujte postačující podmínky (pro matici A) pro konvergenci Jacobiho iterační metody. Určete všechny hodnoty parametru p , pro které je matice A ostře diagonálně dominantní. [8b]
- Je pro hodnotu parametru $p = 0$ Jacobiho iterační metoda konvergentní? Volte počáteční přiblížení $X^{(0)} = b$ a určete druhou iteraci $X^{(2)}$ pomocí Jacobiho iterační metody. [8b]
- Pro $p = 0$ proveďte LU rozklad matice A a užitím LU rozkladu vypočtete přesné řešení soustavy. [9b]

2. Je dána Cauchyova úloha

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2x - y_2 + y_1 \\ 4 - y_1 + \frac{2}{x} \end{pmatrix} \quad \vec{y}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Zapište interval maximálního řešení dané Cauchyovy úlohy. [5b]
- Užitím Eulerovy metody určete přibližně hodnotu řešení v bodě $x = 3$ s krokem $h = 1$ [10b]
- Přibližné hodnoty složky řešení $y_2(1)$, $y_2(2)$ a $y_2(3)$ interpolujte polynomem příslušného stupně. [10b]

3. Je dána Dirichletova okrajová úloha v samoadjungovaném tvaru

$$-(xy')' + 4y = x^2 - 2x \quad y(1) = 0, y(5) = 0$$

- Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy. Ověřte zda jsou splněny. [8b]
- Volte $h = 1$ a sestavte síťové rovnice pro Dirichletovu úlohu v samoadjungovaném tvaru získanou v a). [8b]
- Je Gauss-Seidelova iterační metoda pro soustavu rovnic z b) konvergentní? Volte počáteční přiblížení $X^{(0)}$ jako nulový vektor a spočtete $X^{(1)}$ Gauss-Seidelovou iterační metodou. [9b]

4. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x,$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= ax + b && \text{pro } x \in \langle 0, 4 \rangle, \\ u(0, t) &= 2 + t && u(4, t) = -2 \quad \text{pro } t \in \langle 0, 10 \rangle \end{aligned}$$

- Určete, pro které hodnoty $a, b \in R$ jsou splněny podmínky souhlasu. [7b]
- Volte krok $h = 1$ a $\tau = \frac{1}{10}$ a spočtete přibližné hodnoty řešení v bodě $A = [1; \frac{1}{5}]$ explicitním schématem. [18b]

Počet bodů je orientační!!!