VARIANTA B 18.6.2012

1. Je dána soustava lineárních rovnic $Ax = b$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Zformulujte postačující podmínku (pro matici A) pro konvergenci Jacobiho iterační metody a ověřte, zda je splněna pro danou matici. [**10b**]

b) Zvolte $x^{(0)} = (-1, 1, 4)^T$ a spočítejte $x^{(1)}$ pomocí Jacobiho iterační metody. [**10b**]

c) Určete $\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$, tj. řádkovou (neboli maximovou) normu rozdílu obou aproximací. [**5b**]

2. Je dána soustava nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + y^2 &= 4 \\ y &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

a) Určete graficky polohu kořenů soustavy. [**6b**]

b) Zvolte $x^{(0)} = (\,2, -2)^T$ a Newtonovou metodou spočtěte $x^{(1)}$. [**14b**]

c) Lze za počáteční aproximaci zvolit $x^{(0)} = (\,1, 0\,)^T$? Odpověď odůvodněte. [**5b**]

3. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' = \frac{x}{y' + 1} + \sqrt{y - 3}\,, \qquad y(0) = 4,\ y'(0) = -2$$

a) Určete oblast, kde jsou splněny postačující podmínky existence a jednoznačnosti maximálního řešení této úlohy. [**10b**]

b) Užitím Eulerovy metody s krokem $h = 0.2$ určete přibližnou hodnotu y a y' v bodě $x = 0.2$. [**15b**]

4. Ve čtvercové oblasti určené body $A = [0,\ 1]$, $B = [1.5,\ 1]$, $C = [1.5,\ 2.5]$, $D = [0,\ 2.5]$ je dána parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y + 2$$

a na hranici čtverce ABCD je předepsána okrajová podmínka $u(x, y) = 3$.

a) V dané oblasti načrtněte síť s krokem $h = 0.5$. [**5b**]

b) Sestavte soustavu diferenčních rovnic pro řešení dané úlohy na této síti. [**14b**]

c) Bude pro tuto soustavu konvergovat Gaussova-Seidelova iterační metoda? Odpověď odůvodněte. [**6b**]