

## VARIANTA A 18.6.2012

1. Je dána soustava lineárních rovnic  $Ax = b$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & p \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & p & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- a) Určete všechny hodnoty parametru  $p$ , pro které je matice  $A$  ostře diagonálně dominantní (ODD). [5b]
- b) Co víme o konvergenci Jacobiho iterační metody pro soustavy s ODD maticí? Co víme o konvergenci Jacobiho metody pro soustavy, jejichž matice není ODD? [5b]
- c) Zvolte  $p = 1$  a  $x^{(0)} = (-1, 1, 4)^T$  a spočítejte  $x^{(1)}$  pomocí Jacobiho metody. [7b]
- d) Bude pro volbu  $p = 1$  a  $x^{(0)} = (-1, 1, 4)^T$  Jacobiho metoda konvergovat k přesnému řešení? Odpověď odůvodněte. [8b]

2. Je dána soustava nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 4 \\ x^2 - y &= 2 \end{aligned}$$

- a) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy. [4b]
- b) Odvoďte vztahy pro řešení soustavy dvou nelineárních rovnic  $f(x, y) = 0$ ,  $g(x, y) = 0$  Newtonovou metodou. [9b]
- c) Zvolte  $x^{(0)} = (2, 1)^T$  a Newtonovou metodou spočítejte  $x^{(1)}$ . [12b]

3. Je dána Cauchyova úloha

$$y''' = \frac{x}{y' + 1} + \sqrt{y - 3}, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = 1$$

- a) Určete oblast, kde jsou splněny postačující podmínky existence a jednoznačnosti maximálního řešení této úlohy. [8b]
- b) Užitím Eulerovy metody s krokem  $h = 0.1$  určete přibližnou hodnotu  $y$  a  $y'$  v bodě  $x = 0.2$ . [12b]
- c) Odhadněte, jak se teoreticky změní velikost chyby (s ohledem na řád metody), zmenšíme-li krok  $h$  na  $h = 0.02$ . [5b]

4. V oblasti  $\Omega = \{[x, t] : x \in (0, 3), t > 0\}$  je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = 5t^2 + t, \quad u(3, t) = \sin t.$$

- a) Odvoďte explicitní schéma pro rovnici  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . [6b]
- b) Zvolte prostorový krok  $h = 0.5$  a časový krok  $\tau = 0.2$  a určete přibližnou hodnotu  $u(0.5, 0.4)$  použitím explicitního schématu. Hodnoty v první časové vrstvě počítejte s chybou  $O(\tau)$ . [14b]
- c) Bude pro volbu  $h = 0.5$  a  $\tau = 0.2$  explicitní schéma stabilní? Odpověď odůvodněte. [5b]